



Rendiconti  
Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL  
*Memorie e Rendiconti di Chimica, Fisica,  
Matematica e Scienze Naturali*  
138° (2020), Vol. I, fasc. 3, pp. 261-262  
ISSN 0392-4130 • ISBN 978-88-98075-41-6

## Vito Volterra e il laser

ORAZIO SVELTO

Uno dei XL. Dipartimento di Fisica del Politecnico di Milano  
E.mail: orazio.svelto@polimi.it

**Abstract** – A connection is established between Vito Volterra, who is celebrated in these days in his hundredth anniversary of being President of this Academy, and the Laser, one of the most important inventions of last century.

**Keywords:** Vito Volterra, Laser, laser equations

**Riassunto** – Viene stabilito un collegamento fra Vito Volterra, di cui si celebra in questo periodo il centenario come Presidente di questa Accademia e il Laser, una delle invenzioni più importanti dello scorso secolo.

**Parole chiave:** Vito Volterra, Laser, Equazioni del Laser

Con questo mio scritto vorrei stabilire un collegamento fra Vito Volterra e il Laser, campo di ricerca cui ho dedicato tutta la mia attività scientifica sin dagli albori di questa affascinante invenzione.

Uno dei contributi scientifici, molto importanti, di Volterra è rappresentato dalle così dette equazioni nonlineari che portano il suo nome e che descrivono l'andamento oscillatorio di un sistema chiuso predatore-preda [1]. Ad esempio, possiamo fare riferimento ad un sistema di popolazioni di volpi e lepri in un bosco recintato. Oppure, se si è particolarmente simpatetici con le povere lepri, si può considerare il sistema (dettagliatamente studiato nell'Isola Reale, Stato del Michigan, USA) del lupo, come predatore, e dell'alce come preda [2]. Si era osservato sperimentalmente che l'insieme di queste due popolazioni, predatore e preda, esibiva un andamento oscillatorio e alternato nel tempo costituito da picchi di oscillazione, dette oscillazioni di rilassamento. Da un punto vista fisico, questa fenomenologia può essere discussa considerando ad esempio un bosco in cui siano presenti inizialmente pochi esemplari di lepri e di volpi. Le lepri, prive di una consistente minaccia da parte delle volpi, potranno allora crescere e moltiplicarsi notevolmente. Ma quando la popolazione delle lepri aumenterà oltre un certo limite, le volpi si troveranno ad avere parecchio cibo disponibile e potranno quindi, a loro volta, crescere e moltiplicarsi parecchio. Tuttavia, quando la popolazione delle volpi oltrepasserà anch'essa un certo limite, la distruzione delle lepri da parte delle volpi aumenterà così tanto fino a ridurle a pochi esemplari. A quel punto saranno le volpi a diminuire rapidamente a causa

della carenza di cibo, originato dalla mancanza delle lepri, fino a ridursi anch'esse a pochi esemplari. E a quel punto il ciclo oscillatorio si ripeterà.

Orbene le equazioni che regolano il comportamento dinamico del laser sono molto simili alle equazioni non-lineari di Volterra e possono essere esaminate con metodi matematici analoghi. Nel caso del laser, il sistema chiuso è costituito dai due specchi che formano la cavità laser, la popolazione dei predatori è rappresentata dai fotoni dentro detta cavità e le prede sono gli atomi eccitati nella cavità stessa. Il processo di "abbattimento" predatore-preda corrisponde ora al fenomeno della emissione stimolata, predetto e descritto da Einstein nel lontano 1917 [3]. Secondo esso, i fotoni inducono il decadimento degli atomi dallo stato eccitato allo stato fondamentale, "abbattendo" quindi gli atomi dallo stato eccitato. Il processo di generazione delle prede è poi costituito dalla eccitazione degli atomi dallo stato fondamentale a quello eccitato mediante un processo detto di pompaggio, mentre il processo di generazione dei predatori, cioè dei fotoni, è costituito dalla emissione spontanea. Si ottengono così le così dette equazioni di bilancio del laser [4] che descrivono un andamento oscillatorio delle due popolazioni simile a quello previsto dalle equazioni di Volterra [5] e quindi trattabile con gli stessi metodi matematici sviluppati in passato per queste equazioni nonlineari (non risolvibili analiticamente).

Concludo osservando che – come più volte anche evidenziato dal Presidente del CNR Massimo Inguscio nei suoi discorsi – il Laser è da considerarsi come una delle più importanti, se non la più importante, invenzione del secolo scorso. Il collegamento con uno scienziato così rilevante, sempre del secolo scorso, come Vito Volterra e

che stiamo celebrando in questo periodo mi pare dunque appropriato. Questa connessione risulta ancora più stringente qualora si tenga conto che Vito Volterra è stato il fondatore del CNR (e anche il suo primo Presidente) e che il CNR ha avuto un ruolo molto determinante, direi fondamentale, nello sviluppo del campo laser in Italia.

#### BIBLIOGRAFIA

- [1] V. Volterra, Mem. Acad. Lincei, **2**, 31 (1926). V. Volterra, *Leçons sur la theorie mathematique de la lutte pour la vie*, Paris, Gauthier-Villars (1931). In realtà le stesse equazioni erano già state sviluppate per le oscillazioni nonlineari osservate in un sistema chimico da parte di A.J. Lotka [v. A.J. Lotka J. Am. Chem. Soc. **42**, 1595 (1920); Proc. Nat. Acad. Sci. US **6**, 410 (1920)]. Ed è per questo motivo che le equazioni sono citate in letteratura come equazioni di Lotka-Volterra.
- [2] D.C. Gazis, E.W. Montroll, and J.E. Ryniker, *Age-specific, Deterministic Model of Predator-Prey Populations: Application to Isle Royale*, IBM J. Res. Devel. **17**, 47 (1973).
- [3] Albert Einstein, *On the Quantum Theory of Radiation*, Z. für Physik, **18**, pp. 121-128 (1917).
- [4] Orazio Svelto, *Principles of Lasers*, fifth edition, Springer New York 2010, Chapt. 8, Sect. 8.2.
- [5] In realtà le equazioni del laser prevedono oscillazioni di rilassamento che portano ad una soluzione stazionaria passando attraverso una serie di oscillazioni smorzate mentre le equazioni originali di Lotka-Volterra portano ad un ciclo limite di oscillazioni stazionarie (oscillazioni non smorzate). Tuttavia, l'estensione delle equazioni di Lotka-Volterra con l'inclusione di un termine di "saturazione" per le prede, dovuto a Verhulst [6] ed usato per riprodurre la dinamica delle popolazioni di lupi ed alci nell'Isola Reale, conduce ad oscillazioni smorzate delle popolazioni proprio come nel caso del laser.
- [6] P.F. Verhulst, *Recherches mathématiques sur la loi d'accroissement de la population*, Nuov. Mem. de l'Acad. Roy. de Bruxelles, **18**, 1 (1945).