Rendiconti
Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL
Memorie di Matematica e Applicazioni
121° (2003), Vol. XXVII, fasc. 1, pagg. 35-45

LAURENT MAZLIAK (*)

Paul Lévy – Maurice Fréchet 50 anni di corrispondenza in 103 lettere (**)

SUNTO. — In questo articolo, presentiamo la voluminosa corrispondenza scambiata, nell'arco di cinquant'anni tra due dei più grandi matematici francesi del ventesimo secolo, Paul Lévy e Maurice Fréchet.

Paul Lévy–Maurice Fréchet
50 years of correspondence in 103 letters

ABSTRACT. — In this paper, we present the voluminous correspondence exchanged between two major French mathematicians of the XXth Century, Paul Lévy and Maurice Fréchet.

INTRODUZIONE

La corrispondenza di cui si tratta nel presente articolo è stata scambiata tra due grandi matematici francesi del ventesimo secolo, Paul Lévy (1886-1971) e Maurice Fréchet (1878-1973). Essa comprende 103 lettere, conservate nella cartella «Fréchet» dell'Archivio dell'Accademia delle Scienze di Parigi.

Cominciamo col dire che la maggior parte della corrispondenza è costituita da vere

(*) Indirizzo dell'Autore: Laboratoire de Probabilités et Modèles aléatoires, UMR CNRS 7599 et Université Paris VI, 4 place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France. E-mail: mazliak@ccr.jussieu.fr
(**) Memoria presentata il 14 aprile 2003 da Giorgio Letta, uno dei XL.

e proprie lettere, e non soltanto da semplici scambi di saluti. Si tratta di lettere molto dense, di contenuto essenzialmente matematico. Gli scambi tra i due si sono prolungati lungo tutto il corso della vita, a partire dal momento della loro conoscenza, avvenuta subito dopo la Prima Guerra Mondiale. La prima lettera risale alla fine del 1918, mentre l'ultima è dell'autunno del 1965. Per la sua lunghezza e la sua ricchezza, la corrispondenza di cui vogliamo occuparci assume così il carattere di un documento di eccezionale valore, tanto più che si tratta di una delle ultime testimonianze di un genere che l'uso del telefono e, più recentemente, della posta elettronica e dei mezzi moderni di comunicazione rischia di rendere effimero. È veramente sorprendente, ma è una fortuna per lo storico, vedere gli scambi prolungarsi anche nei periodi in cui i due matematici si vedevano ogni giorno. Essi dovevano aver trovato il giusto modo per condividere riflessioni di ogni sorta, profonde o superficiali, attraverso la loro traduzione in una forma che la comunicazione orale difficilmente permette di raggiungere.

Una seconda osservazione s'impone subito. Una particolarità della presente corrispondenza è che essa contiene soltanto lettere di Paul Lévy per Maurice Fréchet, quelle di quest'ultimo essendo andate perdute per diversi motivi. Innanzitutto, va detto che Fréchet si è rivelato un incredibile archivista: egli conservava tutti i suoi scambi con il mondo matematico del suo tempo (dunque, visti i settant'anni della sua esistenza professionale, con una vera folla di personaggi). Sembra che Paul Lévy non avesse la stessa cura nel tramandare ai posteri le sue lettere. Inoltre, durante l'occupazione tedesca della Francia, Lévy, di origine ebraica, era stato costretto a rifugiarsi fuori di Parigi, in uno stato di semiclandestinità, e il suo appartamento era stato devastato nel 1942 dai tedeschi e dai loro ausiliari francesi. Tutti i suoi documenti del periodo precedente la Seconda Guerra Mondiale sono così andati irrimediabilmente perduti. Durante questo momento difficile della vita di Lévy, la sua corrispondenza con Fréchet non s'interruppe. Proprio a questo periodo dobbiamo anzi alcune delle lettere più belle: quelle in cui Lévy costruisce progressivamente il suo integrale stocastico ed espone le considerazioni definitive sul moto browniano nel piano, che diverranno il nucleo fondamentale del suo famoso libro del 1948.

L'itinerario tracciato da questa corrispondenza a senso unico ci fa percorrere il più intenso mezzo secolo della matematica francese, permettendo di vedere in filigrana i numerosi ondeggiamenti della società francese (non solo intellettuale) di quel tempo. Assistiamo in particolare, e per così dire in collegamento diretto, alla nascita del moderno calcolo delle probabilità, del quale Lévy sarà il difensore in Francia, di fronte all'ondata venuta dalla scuola sovietica di Kolmogorov, Khincin e Bernstein. Una grande emozione creativa traspare con molto pudore da questi scritti, che testimoniano, attraverso la voce di due umanisti del ventesimo secolo (anche se siamo ridotti soltanto ad immaginare quella di Fréchet ...), istanti capitali della storia della matematica.

L'edizione di questa corrispondenza, che darà luogo alla pubblicazione (presso Hermann) di un libro alla fine del 2003, è tuttora in corso. Ad essa collaborano, insieme con l'autore della presente Nota, Marc Barbut dell'EHESS e Bernard Locker dell'Università di Parigi V. Quest'ultimo autore ha discusso nel 2001 una tesi sul lavoro di Paul Lévy durante la Seconda Guerra Mondiale.

1. - I DUE PROTAGONISTI

Nato nel 1878 a Maligny (dipartimento di Yonne, a sud di Parigi), Maurice René Fréchet cominciò la sua carriera di matematico professionista discutendo alla Sorbona nel 1906, sotto la direzione di Jacques Hadamard, una brillante tesi, nella quale s'introduceva il concetto di spazio metrico e si sviluppavano le nozioni fondamentali della topologia moderna, soprattutto in relazione agli spazi di funzioni e alla compattezza. Il suo risultato più famoso, scoperto simultanemente da Riesz, è il teorema di rappresentazione dei funzionali lineari continui sugli spazi di Hilbert. Subito dopo la Prima Guerra Mondiale, cioè proprio al momento in cui comincerà la sua corrispondenza con Lévy, egli è nominato professore all'università di Strasburgo. In questa città, appena ritornata alla Francia dopo quarantasette anni di occupazione tedesca, Fréchet cambia la direzione della sua ricerca, cominciando a interessarsi agli aspetti applicativi della disciplina, e in modo particolare agli sviluppi recenti della statistica, di cui sarà per trent'anni il più famoso rappresentante francese. Muore a Parigi nel 1973.

Paul Pierre Lévy nasce a Parigi nel 1886 (dunque otto anni più tardi di Fréchet) da una famiglia di origine ebraica, che vantava già diversi matematici. Dopo studi eccezionalmente brillanti, che lo conducono alla famosa Ecole Polytechnique, comincia (anch'egli, come Fréchet, sotto la benevola direzione di Hadamard) una tesi in analisi funzionale, che discute nel 1912. La Prima Guerra Mondiale lo conduce ad interessarsi, nel quadro dei suoi impegni militari, a problemi pratici di difesa. Nel 1920 è nominato professore associato all'Ecole Polytechnique, dove scoprirà la disciplina scientifica che sarebbe stata da lui rivoluzionata: il calcolo delle probabilità. Dotato d'un'intuizione stupenda, soprattutto di carattere geometrico, Paul Lévy è il matematico che in Francia imprimerà gli orientamenti più importanti alla disciplina durante una trentina d'anni, fino allo sviluppo, negli anni '50, di quel calcolo stocastico che in così larga misura egli stesso aveva contribuito a creare. Soprattutto, si deve a Lévy lo studio approfondito del moto browniano e l'introduzione degli strumenti fondamentali, come la convergenza in distribuzione e le funzioni caratteristiche, che sono la base della probabilità moderna. Muore a Parigi nel 1971.

Il confronto tra le carriere dei due matematici è sorprendente. Maurice Fréchet comincia la sua attività scientifica cimentandosi con argomenti estremamente teorici, riguardanti la topologia degli spazi di funzioni. Egli si avvicina poi progressivamente, a causa delle sue responsabilità nella comunità universitaria (durante e dopo la Prima Guerra Mondiale, soprattutto a Strasburgo), alla matematica applicata, della quale finisce col diventare quasi l'emblema. Paul Lévy segue una traiettoria più o meno inversa; uscito dall'Ecole Polytechnique con una formazione da ingegnere, dopo essersi occupato (prima e durante la guerra) di problemi di terreno, si orienta progressivamente verso argomenti più interni alla matematica. Tuttavia, come ben traspare dalle sue lettere, la sua visione (e, in primo luogo, quella che ha del calcolo delle probabilità) risente sempre fortemente della sua formazione «politecnica» in senso stretto: egli ragiona spesso come un fisico, evitando il rigore quasi ossessivo dei matematici. Naturalmente, ciò rende qualche volta i suoi ragionamenti difficili da seguire (e, all'occorrenza, Fréchet non esita a chiedergli spiegazioni).

Lévy e Fréchet ebbero rapporti collocati fin dall'inizio sotto la tutela spirituale dei loro maestri Borel e Hadamard. La loro corrispondenza si sviluppa dunque in un'atmosfera di complicità, vagamente colorata di gelosia. Diverse lettere lasciano trasparire in filigrana la volontà di ciascuno dei due di presentarsi come «il» preferito. Questo atteggiamento prende anche un aspetto un po' ingenuo nel momento del confronto tra i due, in vista dell'elezione all'Accademia delle Scienze. Si fa luce allora anche una certa alleanza strategica: si sono recentemente scoperte testimonianze, dalle quali emerge che, su questo piano, i due matematici hanno agito almeno altrettanto uno per l'altro che uno contro l'altro. Finalmente, il destino risolve la questione con equità, facendoli nominare, con otto anni d'intervallo (alla stessa rispettabile età di 78 anni), sui posti che erano stati dei loro maestri: Fréchet, nel 1957, sul posto di Borel; Lévy, nel 1964, sul posto di Hadamard.

2. - Percorso della corrispondenza

Si trova nella corrispondenza qualche tema principale, ma anche numerosi altri temi accessori.

- 1919-1921: Analisi funzionale. Lévy s'incarica dei lavori lasciati da Gateaux, caduto in guerra. Equazioni di Volterra. Lezioni di Analisi Funzionale (pubblicate nel 1922).
- A partire dal 1924: Interesse crescente per la probabilità. Lo spazio di Wiener è già evocato nel 1924 (l'incontro con Wiener, nel 1922, è decisivo per Lévy). Legge degli errori: tema ricorrente della priorità Laplace/Gauss. Funzioni caratteristiche.
- In pratica, la probabilità è l'unico tema degli anni '30. Teoremi limite (leggi dei grandi numeri). Aritmetica delle leggi di probabilità (leggi infinitamente divisibili).
- Periodo della guerra: Lévy nella clandestinità. Integrali stocastici e moto browniano. Libro del 1948.
- Anni '50: Elezioni all'Accademia delle Scienze (Fréchet eletto nel 1956, Lévy nel 1964).
- Anni '60: Rarefazione degli insiemi: intorno all'ultimo libro di Borel.

3. - Genesi della probabilità moderna

3.1. *Il calcolo delle probabilità in Francia nella prima metà del ventesimo secolo*

L'inizio del ventesimo secolo aveva segnato, con Emile Borel, l'ingresso nella concezione moderna del calcolo delle probabilità. Il matematico francese aveva avuto il merito di mettere per primo in evidenza quale fondamentale ruolo la nuovissima teoria della misura degli insiemi, da lui stesso introdotta qualche anno prima, e l'integrazione nel senso di Lebesgue potevano svolgere per una nuova visione dei fenomeni aleatori. Già nel 1909, in un celebre articolo del Circolo Matematico di Palermo, egli aveva formulato una versione forte della legge dei grandi numeri. In parallelo con il lavoro di Borel, l'altro grande scienziato francese interessato ai fenomeni aleatori era stato Henri Poincaré. Spesso motivato da questioni di fisica, Poincaré aveva posto le basi di studi destinati a rivelarsi di fondamentale importanza nel ventesimo secolo, come quelli riguardanti i sistemi dinamici, in cui si trovano considerazioni sui processi di Markov. Il suo Corso di Calcolo delle probabilità, pubblicato nei primi anni del secolo, era presto diventato un classico, che presentava lo stato dell'arte prima della Guerra Mondiale. Si può tuttavia osservare che né Borel né Poincaré consideravano veramente il calcolo delle probabilità come parte della matematica. E questo fatto è importante per spiegare perché né l'uno né l'altro si sono veramente preoccupati di approfondire le loro investigazioni in questo campo. Poincaré era morto improvvisamente nel 1912. Borel, molto provato dalla bufera della Guerra, si orienta sempre di più verso la carriera politica: è eletto deputato nel 1924, ministro della Marina nel 1925.

Negli anni '20, i matematici sovietici, attraverso i loro contatti con la Francia, e col favore del nuovo indirizzo politico del loro paese, tendente a promuovere il rapido sviluppo di una scienza applicata, prendono il testimone della probabilità. In qualche anno essi condurranno la disciplina ad un livello di sviluppo senza precedenti. Tra il 1925 e il 1930, Khinchin e Kolmogorov ottengono diverse estensioni dei teoremi limite classici (leggi dei grandi numeri e teorema limite centrale). Essi scoprono, tra l'altro, la legge del logaritmo iterato e le condizioni di convergenza delle serie di variabili aleatorie. Inoltre gettano le basi per lo studio dei processi stocastici con tempi continui, destinato a divenire oggetto di pubblicazioni rivoluzionarie negli anni '30. Nel 1931, Kolmogorov pubblica il suo grande trattato generale sui processi di Markov con tempi continui, e ottiene, qualche anno dopo, le condizioni generali per la regolarità delle traiettorie. Nel 1933, pubblica infine i suoi celeberrimi *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, in cui fissa in maniera precisa un'assiomatizzazione della teoria, destinata ad imporsi progressivamente al mondo intero.

Nel frattempo, in Francia, Paul Lévy è praticamente il solo che si occupi di probabilità. Come un lavoratore solitario, avanzando spesso in parallelo con la scuola sovietica, egli si mette a sviluppare considerazioni essenziali intorno a somme di variabili aleatorie, a convergenza in distribuzione e a distribuzioni infinitamente divisibili. Alla fine degli anni '30, si forma progressivamente una nuova piccola generazione di probabilisti francesi (Doeblin, Loève, Ville, Bass, Fortet ...); essa costituirà un legame con la rifondazione contemporanea, dovuta a Meyer e Neveu. Questa generazione intermedia deve molto agli sforzi di Fréchet che, pur senza occuparsi sistematicamente di probabilità (in quanto orientato piuttosto verso la statistica), si era però sempre tenuto al corrente degli ultimi sviluppi, ai quali aveva anche iniziato alcuni allievi.

3.2. *Il moto browniano.*

A partire dalla metà degli anni '30, sono tuttavia gli studi sul moto browniano che diventano sempre più importanti nei lavori matematici di Lévy.

Due furono essenzialmente i precursori di Lévy nello studio matematico del moto browniano. Il primo di essi è Louis Bachelier, la cui tesi, discussa nel 1900, studia l'andamento dei corsi della borsa, espresso mediante un processo $X(t)$, con incrementi indipendenti, tale che il generico incremento $dX(t) = X(t + \delta t) - X(t)$ segua una legge di Gauss con varianza δt. Un tale processo stocastico è oggi chiamato *processo di Wiener* o *processo di Wiener-Lévy* o ancora *moto browniano lineare*. L'equazione $\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, di cui è soluzione la densità $f(x, t)$ del processo, è anche l'equazione del calore in ambiente omogeneo e in stato stazionario; essa è presentata da Bachelier sotto il nome di «irraggiamento della probabilità». Tuttavia solo una decina d'anni più tardi Bachelier tenterà di stabilire il legame tra il moto browniano e i suoi lavori. Nel frattempo i fisici avevano spiegato il moto browniano, del quale avevano anche abbozzato una descrizione matematica: in essa Bachelier poté riconoscere le sue equazioni. Come si sa, il lavoro di Bachelier non ebbe alcuna eco in Francia, sicché la scuola sovietica finì praticamente col farlo proprio: nel suo trattato del 1931 sui processi di Markov, il punto di riferimento di Kolmogorov è proprio il lavoro di Bachelier. Lo stesso Lévy, che aveva anch'egli ignorato quel lavoro, riconoscerà nel 1946, poco prima della morte di Bachelier, l'ingiustizia commessa nei suoi riguardi.

Si deve tuttavia ai lavori di Wiener l'ingresso del moto browniano nel campo d'azione dei matematici. Wiener, a partire dal 1922, fornisce del moto browniano un modello matematico con traiettorie continue non derivabili. Wiener (come, più tardi, Paul Lévy) terrà sempre ben presente l'origine fisica del moto browniano. Egli svilupperà molti commenti sui legami tra le sue costruzioni e le teorie della fisica statistica, e Lévy si servirà spesso dell'analogia tra la funzione matematica del moto browniano e la teoria del calore come una guida o un aiuto per la sua ricerca. Nella loro creazione di tutta una matematica per il moto browniano, Wiener sarà più analista che probabilista, con i suoi sviluppi di carattere hilbertiano e con la costruzione della sua misura. Lévy farà invece dello studio sistematico del moto browniano un paradigma dello sviluppo della teoria dei processi stocastici con tempi continui, insistendo specialmente sulle proprietà delle traiettorie.

Nel 1934 Lévy riprende tutti i lavori precedenti sul moto browniano e comincia a inserirli nella sua teoria dei processi additivi. Il moto browniano appare allora quasi naturalmente nella decomposizione dei processi additivi in tre componenti: precisamente, la funzione di Wiener appare come la componente continua di questa decomposizione. Lévy pubblica una serie di articoli sulle generalizzazioni dello spazio differenziale di N. Wiener. Queste generalizzazioni saranno riprese e precisate nel libro *Addition des variables aléatoires*, pubblicato nel 1937.

Per Lévy una funzione aleatoria (del tempo) è sì una funzione, ma una funzione che si costruisce, istante per istante, sotto la spinta del caso. È di questo cammino aleatorio della curva rappresentativa che occorre render conto: e per lui l'esistenza d'un processo stocastico esige che si possa darne un procedimento effettivo di costruzione. Egli preciserà ulteriormente questo concetto nel 1948.

Si capisce bene la differenza non detta con Wiener, che dà *a priori* lo spazio delle traiettorie come uno spazio di funzioni continue e costruisce la misura che si ottiene a partire dalle richieste proprietà (1923), a costo di porsi (1924) nel quadro delle probabilità discrete (o *numerabili* come diceva Lévy). Lévy, come conclusione alla sua ricostruzione del moto browniano cominciata nel 1934, propone le sue «*definizioni costruttive del moto browniano*», che sono procedure di costruzione basate su approssimazioni successive sempre più raffinate, nelle quali, ad ogni passo, l'approssimazione concerne un numero finito di punti (aleatori). Le leggi congiunte possiedono le proprietà pretese nella definizione: ciò conduce quasi certamente a riprodurre al limite le proprietà pretese per la «funzione di Wiener» e assicura la condizione di continuità delle traiettorie, posta *a priori* da Wiener (1923). Lévy sa anche, molto bene, quanta difficoltà l'impostazione di Wiener abbia incontrato, sin dall'inizio, ad essere accettata dai matematici.

Nel 1940 (nell'articolo *Le mouvement brownien plan*), e poi nel 1948 (nel libro *Processus stochastiques et mouvement brownien*), la sua formula d'interpolazione sarà l'unico metodo che egli accetterà come strumento preliminare per la costruzione del moto browniano. Nella storia delle probabilità, la sua costruzione rimane esemplare: essa costituisce la via più probabilistica, più diretta e più breve che conduca simultaneamente alla costruzione del processo e alla continuità delle traiettorie. Essa rappresenta anche molto bene il pensiero di Lévy su caso e probabilità: in una stessa espressione, sono combinati insieme quella che Lévy da sempre considera come l'unica maniera di concepire un processo (legata all'idea del caso che interviene ad ogni istante), e al tempo stesso un modo di rendere concretamente comprensibile il processo mediante un algoritmo sequenziale, con ciascun passo di tipo finito.

Nel 1940, Lévy trasse molte conseguenze dalla sua costruzione del moto browniano. Egli provò certamente un sentimento di grande vittoria, mescolato però ad un po' di rimpianto. Nel 1970, già vecchio, dirà la sua tristezza «*d'avere lasciato a Wiener la scoperta di questa funzione X(t)*» e aggiungerà: «*Io penso che la maniera in cui ho definito la funzione $X(t)$ del moto browniano è piu chiara di quella di Wiener*». La sua costruzione sarà la chiave (a partire dal 1940) del suo avvicinamento al moto browniano geometrico e ai suoi modelli. Nei testi di Lévy di questo periodo si avverte già la visione «frattale» della traiettoria browniana. Tra il 1940 e il 1950, si devono a Lévy in pratica tutti i progressi sul moto browniano: caratterizzazioni, studi sulla geometria delle traiettorie, e moltissime osservazioni che si ritrovano nella corrispondenza con Fréchet.

4. - Commento ad una lettera

Al fine di meglio illustrare la corrispondenza di cui parliamo, è interessante prendere una lettera a mo' di esempio e commentarla. Ho dunque scelto una lettera abbastanza breve, che non è necessariamente la più interessante, ma che presenta un buon modello dello stile usato negli scambi tra Fréchet e Lévy e d'un certo numero di temi sempre presenti in questa corrispondenza.

4.1. *Lettera del 29 gennaio 1936 di Paul Lévy a Maurice Fréchet.*

29.1.36 Paris
Mon cher collègue,
Je vous confirme que dans le théorème de Kolmogoroff, p. 60 de ses Grundbegriffe, la condition d'indépendance des x_n mentionnée au bas de la page est absolument inutile. La démonstration est très simple et correcte. Il faut arriver à se dégager de l'impression que c'est un tour de passe-passe. Elle utilise bien la notion essentielle qui est la suivante: La probabilité de la suite illimitée des x_n ne peut être considérée comme bien définie que dans le cas où elle apparaît comme la limite (au sens de la convergence en probabilité) de la probabilité d'une propriété de l'ensemble des n premières variables qui alors, si elle est réalisée pour n très grand entraîne avec une probabilité voisine de l'unité, la propriété étudiée. La conséquence cherchée est immédiate. Ma démonstration dégage mieux ces idées, je crois; mais on les sent implicitement chez K. Avez vous remarqué dans K, p55, un résultat résolvant un problème très voisin de celui qui nous occupait? Mais il s'agit de convergence en probabilité et non de convergence presque sûre de $\frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$. Pour la convergence presque sûre, il ne fait que rappeler p.59 le résultat de sa note de 1930.
Bien cordialement à vous.
Paul Lévy.

4.2. *Commento alla lettera precedente.*

La lettera è abbastanza rivelatrice del tipo di scambi che s'incontrano nel corso della corrispondenza e del tono cortese e professionale sistematicamente adottato dai due matematici. Spesso essi evocano le loro letture e commentano i teoremi che vi hanno trovato. In realtà, esiste una certa asimmetria tra i loro atteggiamenti: mentre Fréchet sembra passare molto tempo ad esaminare ogni sorta di pubblicazioni, Lévy fa spesso osservare che a lui riesce penoso studiare i lavori di altre persone. Tuttavia Lévy è anche molto attento alle questioni di priorità: nelle sue lettere a Fréchet, molteplici sono gli esempi di situazioni nelle quali Lévy reclama questa priorità nei confronti di numerosi matematici (Fréchet incluso) in ogni genere di argomenti. Per questa ragione, egli mostra un'attenzione speciale per certi lavori, come i *Grundbegriffe* di Kolmogorov. Nelle sue memorie del 1970, Lévy dichiarerà del resto che avrebbe potuto, molto prima del matematico russo, pubblicare un tale testo e che non l'aveva fatto solo perché ne avrebbe giudicato troppo leggero il contenuto. Ad ogni modo, come mostra questa lettera, egli sembra aver ben setacciato le sessantadue pagine della monografia di Kolmogorov.

Il risultato della pagina 60 al quale si allude nella lettera concerne la legge 0-1 ed è così enunciato da Kolmogorov:

Teorema: *Siano* $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ *variabili aleatorie e* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ *una funzione bairiana delle variabili* $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$. *tale che la probabilità condizionale*

$$P_{x_1, x_2, \ldots, x_n}\{f(x) = 0\}$$

della probabilità assoluta

$$P\{f(x) = 0\} \tag{1}$$

della relazione $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) = 0$ *quando si conoscano le prime n variabili* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *sia la stessa per ogni n.*

Allora, sotto queste condizioni, la probabilità (1) *vale zero o uno.*

Subito dopo l'enunciato, Kolmogorov aggiunge che «*le condizioni precedenti sono in particolare realizzate quando le variabili* x_n *siano indipendenti e il valore della funzione f non dipenda dalla modifica d'un numero finito delle* x_n.» Lévy si sbaglia quando afferma che l'indipendenza è inutile. Forse ha mentalmente trasformato l'enunciato di Kolmogorov (ricordiamo che il testo del matematico russo era scritto in tedesco) supponendo che, per ogni *n*, la variabile aleatoria $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ sia indipendente da $(x_1, \ldots, x_n)$ non nel senso dichiarato da Kolmogorov, bensì nel senso dell'indipendenza *stocastica* (nel qual caso, naturalmente, è ben vero che l'indipendenza delle x_n è inutile). La dimostrazione che Kolmogorov dà del suo teorema fa uso di un ragionamento «per classi monotone» oggi classico. Lévy, nella lettera, fa invece allusione alla dimostrazione della legge 0-1 che egli stesso aveva dato in una conferenza alla Société mathématique de France il 23 maggio 1934, il cui testo è apparso nell'articolo *Propriétés asymptotiques des sommes de variables aléatoires enchaînées*, Bull. Sci. Math., 59 (1935), 84-96. È interessante constatare che Lévy, in quest'articolo (le cui bozze furono da lui corrette nell'anno 1935, come dimostra un'osservazione aggiunta in quell'occasione), non fa riferimento al testo di Kolmogorov, che egli ha sicuramente scoperto solo poco prima della presente lettera. Questa è dunque una testimonianza del fatto che la scoperta dalla monografia del matematico russo da parte di Lévy e di Fréchet era avvenuta di recente. Osserviamo poi che i ragionamenti sulla teoria astratta della misura erano, ancora nel 1936, abbastanza nuovi (nonostante che già all'inizio degli anni '20 la scuola polacca avesse introdotto, nella maniera oggi abituale, la pratica delle σ-algebre e dei ragionamenti per generazione). Ciò spiega probabilmente gli interrogativi che sentiamo presenti in Fréchet, il quale chiede a Lévy la sua opinione sulla dimostrazione di Kolmogorov.

Nel suo articolo del 1935, Lévy, data una successione (x_n) di variabili aleatorie indipendenti, enuncia così il suo risultato:

Se un evento E ha una probabilità α, *le successioni che realizzano quest'evento, sal-*

vo in casi di probabilità zero, realizzano anche la condizione

(1)″ $$\lim_{n \to \infty} \mathcal{P}_n\{E\} = 1 \,.$$

In termini moderni, l'enunciato di Lévy dice che, dato un evento $E \in \mathcal{F}_\infty$, la martingala $X_n = E(\mathbb{1}_E / \mathcal{F}_n)$ converge quasi certamente verso la variabile aleatoria $\mathbb{1}_E$.

In particolare, come Lévy fa osservare in una nota, se $\mathcal{P}_n\{E\} = \mathcal{P}\{E\}$, per ogni n, allora si ottiene quasi certamente su E, $\mathcal{P}\{E\} = 1$, e dunque la probabilità di E è zero o uno.

Nella dimostrazione, Lévy non usa un ragionamento astratto «per classi monotone», ma se la sbroglia in modo diverso: un'analogia tra una successione di variabili aleatorie con valori in [0,1] e le coordinate d'un punto aleatorio in un cubo di dimensione infinita gli permette di approssimare un evento E dipendente dall'intera successione mediante un evento dipendente soltanto dalle prime N coordinate. Questa tecnica di dimostrazione dà una buona idea del tipo di semplificazione che il formalismo proposto da Kolmogorov permette di ottenere (anche a costo di farsi scambiare per il gioco di bussolotti evocato da Lévy).

L'altro punto menzionato nella lettera riguarda un passaggio della monografia di Kolmogorov dedicato alla legge dei grandi numeri. Occorre ricordare che negli anni '20, il matematico russo aveva iniziato, insieme con Khinchin, i suoi studi sul calcolo delle probabilità proprio riprendendo i lavori di Tchebitcheff e di Markov sulla legge dei grandi numeri. In questo contesto, la nozione importante è quella di *stabilità*, così definita: una successione (s_n) di variabili aleatorie è detta stabile se esiste una successione (d_n) di costanti reali, tale che $s_n - d_n$ converga in probabilità verso 0. In quegli anni, i probabilisti (Lévy in particolare) si interessavano molto alla questione della mediana; essa sembrava più convincente della media. Diverse lettere di questo periodo testimoniano di scambi con Fréchet su questo tema. Alla pagina menzionata, Kolmogorov indica una condizione necessaria e sufficiente per la stabilità della successione delle medie aritmetiche $s_n = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$, nel caso di variabili aleatorie x_n indipendenti. Considerando una mediana di x_n, ossia una costante reale m_n con $P(x_n < m_n) \leqslant \frac{1}{2}$ e $P(x_n > m_n) \leqslant \frac{1}{2}$, e ponendo $x_{nk} = x_k \mathbb{1}_{\{|x_k - m_k| \leqslant n\}}$, egli considera la successione $s_n^* = \frac{x_{n1} + x_{n2} + \ldots x_{nn}}{n}$. Allora le condizioni seguenti sono necessarie e sufficienti per la stabilità della successione (s_n) con $d_n = E(s_n^*)$ come successione di costanti:

$$\sum_{k=1}^{n} P(x_{nk} \neq x_k) \to 0 \,, \qquad \mathrm{Var}\,(s_n^*) = o(n^2) \,.$$

È abbastanza curioso che, benché alla fine degli anni '20 Kolmogorov e Khinchin avessero ottenuto una cascata di risultati sulla legge forte dei grandi numeri, Kolmogorov menzioni in realtà soltanto convergenze in probabilità, salvo che nella breve sezione 5, dove indica la legge forte (sotto l'ipotesi standard di esistenza di una media finita) come non ancora pubblicata. Egli menziona esplicitamente solo il risultato ottenuto nel 1930: se (ξ_n) è una successione di variabili aleatorie indipendenti, con varianza finita e con $\sum_n \frac{\mathrm{Var}(\xi_n)}{n^2} < +\infty$, allora si ha, quasi certamente, $\frac{S_n - E(S_n)}{n} \to 0$.

Acknowledgement. The present text has been written while the author was enjoying the hospitality of Pescara University. The author also wishes to thank Katia Rotiroti and Giorgio Letta for having realized the difficult metamorphosis of his french flavoured italian into plain italian.

Direttore responsabile: Prof. A. Ballio - Autorizz. Trib. di Roma n. 7269 dell'8-12-1959
«Monograf» - Via Collamarini, 5 - Bologna