Rendiconti
Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL
Memorie di Matematica e Applicazioni
121° (2003), Vol. XXVII, fasc. 1, pagg. 89-94

MOHAMED EL KADIRI (*)

Théorème de Liouville et propriété de la moyenne biharmonique restreinte sur la droite réelle (**)

RÉSUMÉ. — On montre que, sous certaines conditions, si une fonction localement intégrable bornée vérifie la propriété de la moyenne biharmonique restreinte dans $\boldsymbol{R}$, alors elle est constante.

Teorema di Liouville e proprietà della media biarmonica ristretta sulla retta reale

SUNTO. — Si dimostra che, sotto certe condizioni, se una funzione localmente integrabile limitata verifica la proprietà della media biarmonica ristretta su $\boldsymbol{R}$, allora essa è costante.

1. - INTRODUCTION

Il est bien connu que toute fonction biharmonique f dans $\boldsymbol{R}^n$, i.e. solution de l'équation aux dérivées partielles $\Delta^2 u = 0$, vérifie la formule de la moyenne biharmonique sur toute boule $B = B(x, r)$ de centre x et de rayon $r > 0$:

$$f(x) = \frac{1}{|B|}\int_B f d\lambda - \frac{r^2}{2(n+2)}\Delta f(x),$$

où $|B|$ est le volume de la boule B et λ est la mesure de Lebesgue sur $\boldsymbol{R}^n$. Cette formule, qui se trouve dans [7], est due à Pizzetti.

(*) Indirizzo dell'Autore: B.P. 726, Salé-Tabriquet, Salé, Marocco; e-mail: elkadiri@fsr.ac.ma
(**) Memoria presentata il 10 novembre 2003 da Giorgio Letta, uno dei XL.

Lorsque f est bornée, soit

$$\sup_{x \in \boldsymbol{R}^n} |f(x)| = M < +\infty,$$

on a

$$\sup_{x \in \boldsymbol{R}^n} |\Delta f(x)| \leqslant \frac{4(n+2)}{r^2} M.$$

En faisant $r \to \infty$, on obtient $\Delta f \equiv 0$, de sorte que f est une fonction harmonique bornée, donc constante d'après le théorème classique de Liouville. C'est la propriété de Liouville pour les fonctions biharmoniques.

Soient n un entier $\geqslant 3$ et $r : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}_+$ vérifiant $0 < r(x) \leqslant \|x\| + M_0$, $n \geqslant 3$, où M_0 est une constante, et soit f une fonction measurable au sens de Lebesgue bornée sur $\boldsymbol{R}^n$ dont le Laplacien au sens des distributions est une fonction et qui vérifie la formule

$$f(x) = \frac{1}{|B(x)|} \int_{B(x)} f d\lambda - \frac{r(x)^2}{2(n+2)} \Delta f(x)$$

pour tout $x \in \boldsymbol{R}^n$, où $B(x) = B(x, r(x))$, (on dit alors que f vérifie la propriété de la moyenne biharmonique restreinte). Dans [3], nous avons montré que si f est continue ou si r est minorée sur tout compact de $\boldsymbol{R}^n$ par une constante > 0, alors f est constante, étendant ainsi aux fonctions possédant la propriété de la moyenne biharmonique restreinte un résultat de Hansen et Nadirashvili [5] sur les fonctions qui possédent la propriété de la moyenne harmonique restreinte. Notre but dans ce travail est de traiter le cas $n = 1$. La méthode consiste, comme dans [1], [2] et [3], à utiliser des mesures de représentation des fonctions harmoniques en liaison avec la formule de la moyenne pour les fonctions biharmonques, et appliquer ensuite les résultats de [6].

Par un calcul classique facile, on montre que toute fonction biharmonique f dans un intervalle I de $\boldsymbol{R}$ est une fonction de la forme

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad \forall x \in I,$$

et que la formule de la moyenne biharmonqiue s'écrit

$$f(x) = \frac{1}{2r} \int_{x-r}^{x+r} f(t)\, dt - \frac{r^2}{6} f''(x)$$

pour tout $x \in I$ et tout $r > 0$ tel que $]x - r, x + r[\subset I$.

Le mot fonction signifiera toujours, sauf mention du contraire, fonction à valeurs dans $\overline{\boldsymbol{R}}$. Tous les résultats de ce travail s'étendent aux fonctions polyharmoniques d'ordre > 2. Nous n'avons considéré que le cas des fonctions biharmoniques pour des raisons de simplicité.

2. - Théorème de Liouville et propriété de la moyenne harmonique restreinte sur la droite

Rappelons d'abord les résultats de [6] qui seront utiles pour la suite.

Soit r une fonction strictement positive sur $\boldsymbol{R}$ telle que $r \leqslant \|\cdot\| + M$ où M est une constante > 0. Pour tout $x \in \boldsymbol{R}$ soit μ_x une mesure de probabilité de barycentre x sur l'intervalle ouvert $I(x) = I(x, r(x))$ de centre x et de rayon $r(x)$, dont le support est un voisinage de x. On dit qu'une fonction positive f sur $\boldsymbol{R}$ est r-surmediane (resp. r-médiane) si

$$\mu_x^*(f) \leqslant f(x) \quad (\text{resp. } \mu_x^*(f) = f(x))$$

pour tout $x \in \boldsymbol{R}$.

Proposition: ([6]) *Toute fonction s.c.i. r-surmédiane $f \geqslant 0$ sur $\boldsymbol{R}$ est constante.*

La démonstration de ce résultat dans [6] est donnée dans le cas où μ_x est restriction de la mesure de Lebesgue à l'intervalle $I(x) =]x - r(x), x + r(x)[$ normalisée. Cette démonstration s'étend comme le remarquent les auteurs de [6] aux mesures μ_x citées ci-dessus. Si pour tout $x \in \boldsymbol{R}$ la mesure μ_x est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, on a les

Corollaire 1: ([6]) *Soit $f \geqslant 0$ une fonction r-surmédiane sur $\boldsymbol{R}$ et supposons que r est bornée inférieurement par une constante > 0. Alors $f = \inf f(\boldsymbol{R})$ λ-p.p.*

Corollaire 2: ([6]) *Soit f une fonction $\geqslant 0$ r-surmédiane sur $\boldsymbol{R}$. Supposons que f est s.c.i. ou que r est bornée sur tout compact par une constante > 0. Alors f est (λ-p.p. égale à une) constante.*

3. - Théorème de Liouville et propriété de la moyenne biharmonique restreinte sur la droite

Pour tout intervalle ouvert $I =]a, b[$ borné de $\boldsymbol{R}$, on note G_I le noyau de Green de I normalisé de sorte que, pour tout $z \in I$,

$$\frac{\partial^2 G_I}{\partial y^2}(. , z) = -\varepsilon_z,$$

où ε_z est la mesure de Dirac au point z. Un calcul simple donne

$$G_I(y, z) = \begin{cases} \dfrac{b-z}{b-a}(y-a) & \text{si } y \leqslant z \\ \dfrac{z-a}{b-a}(b-y) & \text{si } z \leqslant y \end{cases}$$

pour tous $y, z \in]a, b[$.

Soient $x \in \boldsymbol{R}$ et I un intervalle ouvert borné de $\boldsymbol{R}$ de centre x, posons, pour tout $y \in \boldsymbol{R}$,

$$w_I(x, y) = G_J(x, y) - \frac{1}{|I|} \int_I G_J(y, z)\, d\lambda(z),$$

où J est un intervalle ouvert de centre x contenant y et $\bar{I}$.

Il n'est pas difficile de voir que la fonction w_I vérifie les propriétés suivantes:

1. $w_I(x, y)$ ne dépend pas de l'intervalle ouvert J contenant y et $\bar{I}$.
2. $w_I(x, y) = 0$ si $y \notin I$ et

$$w_I(x, y) = G_I(x, y) - \frac{1}{|I|} \int_I G_I(y, z)\, d\lambda(z),$$

pour tout $y \in I$.

3. La fonction $w_I(x, .)$ est invariante par symétrie par rapport à x.
4. On a

$$\frac{6}{r^2} \int w_I(x, y)\, d\lambda(y) = 1,$$

où r est le rayon de I. Cette égalité est une conséquence immédiate de la formule de la moyenne biharmonique sur I appliquée à la fonction $\int_J G_J(., z)\, dz$, biharmonique dans $\boldsymbol{R} \setminus \bar{J}$, où J est un intervalle ouvert de centre x tel que $\bar{I} \subset J$.

Il résulte de ce qui précède que, pour tout $x \in \boldsymbol{R}$ et tout $r > 0$, la mesure μ_x^r sur $\boldsymbol{R}$ de densité $\dfrac{6}{r^2} w_{I(x, r)}(x, .)$ par rapport à la mesure de Lebesgue est une mesure de probabilité portée par $\overline{I(x, r)}$ et invariante par rotations autour de x, où $I(x, r)$ est l'intervalle ouvert de centre x et de rayon r. On en déduit que

1. Pour toute fonction affine f sur un intervalle ouvert I et tous $x \in I$ et $r > 0$ tels que $]x - r, x + r[\subset I$, on a,

$$\int f(y)\, d\mu_x^r(y) = f(x). \tag{1}$$

Autrement dit μ_x^r est de barycentre x.

2. Pour toute fonction concave $f \geqslant 0$ sur un intervalle ouvert I et tous $x \in I$ et $r > 0$ tels que $]x - r, x + r[\subset I$, on a

$$\int f(y)\, d\mu_x^r(y) \leqslant f(x). \tag{2}$$

Réciproquement, toute fonction f vérifiant (1) (resp. (2)) pour tous $x \in I$ et $r > 0$ tels que $]x - r, x + r[\subset I$ est affine (resp. concave).

LEMME 3.1: *Soit f une fonction bornée de classe $\mathscr{C}^2$ dans $\boldsymbol{R}$ telle que f'' est constante, alors f est constante.*

DÉMONSTRATION: Quitte à remplacer f par $-f$ on peut supposer que f'' est une constante $c \leqslant 0$, de sorte que f est alors une fonction concave bornée sur $\boldsymbol{R}$, donc constante.

Pour tout $x \in \boldsymbol{R}$, on note μ_x la mesure $\mu_x^{r(x)}$. Pour tout intervalle ouvert borné J de $\boldsymbol{R}$, on note V_J le noyau sur J défini par

$$V_J(g)(x) = \int_J G_J(x, y)\, g(y)\, d\lambda(y)$$

pour toute fonction mesurable bornée sur J et tout $x \in J$. Alors la dérivée seconde au sens des distributions de $V_J(g)$ est égale à $-g$. Soit f est une fonction mesurable au sens de Lebesgue, bornée et dont la dérivée seconde f'' au sens des distributions est une fonction mesurable bornée, alors, d'après ce qu'on vient de voir, la fonction $f + V_J(f'')$ est λ-p.p. égale à une fonction affine sur J. Supposons que f vérifie la propriété de la moyenne biharmonique restreinte. Pour tout $x \in \boldsymbol{R}$, choisissons J tel que $\overline{I(x)} \subset J$. En appliquant la formule de la moyenne à cette fonction sur $I(x)$, on obtient

$$f''(x) = \int f''\, d\mu_x,$$

autrement dit, f'' est μ-médiane.

Maintenant nous pouvons démontrer le

THÉORÈME 3.2: *Soit r une fonction réelle sur $\boldsymbol{R}$, telle que $0 < r(x) \leqslant \|x\| + M_0$, où M_0 est une constante > 0, et soit f une fonction bornée mesurable au sens de Lebesgue et dont la dérivée seconde au sens des distributions est une fonction bornée telle que*

$$f(x) = \frac{1}{|I(x)|} \int_{I(x)} f d\lambda - \frac{r(x)^2}{6} f''(x), \tag{3}$$

pour tout $x \in \boldsymbol{R}$. Si f'' est continue ou si r est bornée inférieurement sur tout compact par une constante > 0, alors f est λ-p.p. égale à une constante.

DÉMONSTRATION: La formule (3) vérifiée par f entraine que f'' est μ-médiane d'après ce qui a été dit plus haut. On en déduit que f'' est λ-p.p. constante d'après le corollaire 2 de la proposition 2.1. Donc f est constante d'après le lemme 3.1.

REMARQUE: 1. Si f continue et si les conditions du théorème sont satisfaites, alors f est partout égale à une constante.

2. Nous ignorons si, dans l'énoncé précédent, on peut se passer de l'hypothèse que f'' est bornée.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] M. EL KADIRI, *Une réciproque du théorème de la moyenne pour les fonctions biharmoniques*, Aequationes Math., 65 (2003), 280-287.

[2] M. EL KADIRI, *Sur la propriété de la moyenne restreinte pour les fonctions biharmoniques*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, 335 (2002), 427-429.

[3] M. EL KADIRI, *Théorème de Liouville et propriété de la moyenne biharmonique restreinte*, Preprint.

[4] W. HANSEN - N. NADIRASHVILI, *Mean Values and harmonic functions*, Math. Ann., 297 (1) (1993), 150-170.

[5] W. HANSEN - N. NADIRASHVILI, *Liouville's Theorem and the restricted Mean Values Property*, J. Math. Pures App., (9), no. 2, 74 (1995), 185-198.

[6] W. HANSEN - N. NADIRASHVILI, *Restricted mean value property on* $\boldsymbol{R}^d$, $d \leqslant 2$, Expo. Math., 13 (1995), 93-95.

[7] M. NICOLESCU, *Les fonctions polyharmoniques*, Paris, Hermann, 1936.

Direttore responsabile: Prof. A. BALLIO - Autorizz. Trib. di Roma n. 7269 dell'8-12-1959
«Monograf» - Via Collamarini, 5 - Bologna