Rendiconti
Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL
Memorie di Matematica e Applicazioni
121° (2003), Vol. XXVII, fasc. 1, pagg. 77-88

MOHAMED EL KADIRI (*)

Fonctions finement plurisousharmoniques et topologie plurifine (**)

RESUME. — Nous nous proposons de définir la notion de fonction finement plurisousharmonique dans un ouvert plurifin de $\boldsymbol{C}^n$ et d'en étudier quelques propriétés. Nous discutons aussi quelques liens de cette notion avec la connexité locale de la topologie plurifine.

Funzioni finemente plurisubarmoniche e topologia plurifine

SUNTO. — Si propone una definizione del concetto di funzione finemente plurisubarmonica in un insieme aperto plurifine di $\boldsymbol{C}^n$ e se ne studiano alcune proprietà. Si analizzano anche i rapporti tra questo concetto e la connessione locale della topologia plurifine.

1. - INTRODUCTION

La topologie fine sur $\boldsymbol{R}^n$ a été introduite en théorie classique du Potentiel par H. Cartan en 1940. Elle est définie comme étant la moins fine des topologies rendant continues les fonctions surharmoniques dans $\boldsymbol{R}^n$. Cette topologie a été ensuite étendue au cadre des diverses théories axiomatiques du Potentiel et à celui de la théorie du Potentiel d'un processus de Markov.

La théorie du balayage des mesures en théorie classique ou axiomatique du Potentiel a permis à Fuglede de développer et étudier dans [4] une théorie des fonctions finement harmoniques dans un ouvert fin (i.e., ouvert au sens de la topologie fine), généralisant la notion classique de fonction harmonique dans un ouvert ordinaire.

En théorie pluripotentielle sur $\boldsymbol{C}^n$, on définit la topologie plurifine comme étant la moins fine des topologies rendant continues les fonctions plurisouharmoniques. Elle a été introduite par Bedford et Taylor dans [1] pour étudier un certain nombre de pro-

(*) Indirizzo dell'Autore: B.P. 726, Salé-Tabriquet, Salé, Maroc; e-mail: elkadiri@fsr.ac.ma
(**) Memoria presentata il 10 novembre 2003 da Giorgio Letta, uno dei XL.

priétés des fonctions plurisousharmoniques et de l'opérateur de Monge-Ampère. Cette topologie n'est pas encore très bien étudiée et beaucoup de problèmes la concernant demeurent encore ouverts. Par exemple, on ne sait pas si elle est localement connexe lorsque $n \geq 2$ (si $n = 1$, la topologie plurifine coïncide avec la topologie fine usuelle de $\boldsymbol{C}$ et, de ce fait, elle est donc localement connexe).

Dans le présent travail nous nous proposons de définir la notion de fonction finement plurisousharmonique dans un ouvert plurifin de $\boldsymbol{C}^n$ et d'en étudier quelques propriétés. Comme application de cette notion, nous en discutons quelques liens avec la connexité locale de la topologie plurifine.

Dans tout ce travail le mot fonction signifiera toujours fonction à valeurs dans $\overline{\boldsymbol{R}}$. Etant donné un ensemble ouvert Ω de $\boldsymbol{C}^n$, on note $PSH(\Omega)$ le cône des fonctions plurisousharmoniques, psh en abrégé, dans Ω. On notera $\overline{A}$, A^f et $\widetilde{A}$ respectivement les adhérences de $A \subset \boldsymbol{C}^n$ en topologie usuelle, en topologie fine de $\boldsymbol{C}^n = \boldsymbol{R}^{2n}$ et en topologie plurifine de $\boldsymbol{C}^n$. On écrira pf-lim et pf-lim sup (resp. f-lim et f-lim sup) pour désigner la limite et la limite supérieure en topologie plurifine (resp. en topologie fine de $\boldsymbol{C}^n = \boldsymbol{R}^{2n}$). On dira qu'une fonction est pf-s.c.s. ou pf-continue (resp. f-s.c.s. ou f-continue) si elle est s.c.s. ou continue en topologie plurifine (resp. fine). On utilisera également le mot fin ou plurifin (finemement ou plurifinement) pour distinguer les notions relatives à la topologie fine ou plurifine de $\boldsymbol{C}^n$ de celles de la topologie usuelle de $\boldsymbol{C}^n$. Les autres notations et définitions non précisées seront toujours à entendre comme dans les travaux de Bedford-Taylor et Fuglede cités dans la bibliographie.

2. - Fonctions séparément finement surharmoniques

Soit U un ouvert fin de $\boldsymbol{R}^d$. On rappelle qu'une fonction $f : U \to \boldsymbol{R} \cup \{+\infty\}$ est finement surharmonique dans U si

i) f est finie sur un ensemble finement dense dans U,

ii) f est finement s.c.i. dans U,

iii) pour tout $x \in U$, et tout ouvert fin V, relativement compact en topologie initiale, tel que l'on ait $\overline{V} \subset U$, f est bornée inférieurement sur $\overline{V}$ et vérifie l'inégalité

$$\int f(y)\, d\varepsilon_x^{CV}(y) \leq f(x),$$

où ε_x^{CV} est la mesure balayée sur CV de la mesure de Dirac au point x.

Une fonction f définie sur un ouvert fin U est dite finement sousharmonique dans U si $-f$ est finement surharmonique dans U; elle est dite finement harmonique dans U si f et $-f$ sont finement surharmoniques dans U.

Soient $n_1, \ldots, n_k$ des entiers naturels ≥ 1, $k \geq 2$, et V un $\mathscr{C}_{n_1} \times \ldots \times \mathscr{C}_{n_k}$-ouvert de $\boldsymbol{R}^{n_1 + \cdots + n_k}$, où $\mathscr{C}_j$ est la topologie fine de $\boldsymbol{R}^j$. On dit qu'une fonction f sur V est séparément finement surharmonique dans V si, pour tout k-uple $(x_1, \ldots, x_k) \in V$, avec

$x_i \in \boldsymbol{R}^{n_i}$, les fonctions $f(\cdot, x_2, \dots, x_k), \dots, f(x_1, \dots, x_{k-1}, \cdot)$ sont respectivement finement surharmoniques dans les ouvert fins $\{z \in \boldsymbol{R}^{n_1} : (z, x_2, \dots, x_k) \in V\}, \dots,$ $\{z \in \boldsymbol{R}^{n_k} : (x_1, \dots, x_{k-1}, z) \in V\}$.

THÉORÈME 2.1 ([3], Cor. 1 du Th. 4.5): *Soient $n_1, \dots, n_k$ des entiers naturels $\geqslant 1$, $k \geqslant 2$. Toute fonction séparément finement surharmonique $\mathcal{T}_{n_1} \times \dots \times \mathcal{T}_{n_k}$-localement bornée inférieurement dans un $\mathcal{T}_{n_1} \times \dots \times \mathcal{T}_{n_k}$-ouvert U de $\boldsymbol{R}^{n_1 + \dots + n_k}$ est finement surharmonique dans U.*

3. - TOPOLOGIES FINES SUR $\boldsymbol{C}^n$

Soit n un entier $\geqslant 1$. On définit sur $\boldsymbol{C}^n$ trois topologies fines:

– La topologie produit $\mathcal{T}^n$, où $\mathcal{T}$ est la topologie fine de $\boldsymbol{C}$.

– La topologie plurifine de $\boldsymbol{C}^n$, notée $\mathcal{T}_{psh}$ et définie comme étant la moins fine des topologies rendant continues les fonctions plurisousharmoniques sur $\boldsymbol{C}^n$ (voir [1]).

– La topologie fine de $\boldsymbol{C}^n$ identifié à l'espace $\boldsymbol{R}^{2n}$, notée $\mathcal{T}_f$. Elle est définie comme étant la moins fine des topologies rendant continues les fonctions sousharmoniques sur $\boldsymbol{C}^n$.

Les topologies $\mathcal{T}^n$ et $\mathcal{T}_f$ sont suffisamment étudiées. La topologie $\mathcal{T}_{psh}$ a été introduite en analyse complexe par analogie avec la topologie fine sur $\boldsymbol{R}^d$ par Bedford et Taylor dans [1]. Cette topologie est plus fine que la topologie usuelle (euclidienne) de $\boldsymbol{C}^n$, et tout point de $\boldsymbol{C}^n$ admet un système fondamental de voisinages plurifins compacts pour la topologie euclidienne.

Comme la topologie fine de $\boldsymbol{R}^d$, $d \geqslant 2$, la topologie plurifine n'est pas métrisable, et n'a pas la propriété de Lindelöf. Cependant, elle possède une propriété voisine, dite quasi-Lindelöf, à savoir que toute famille $\{U_i ; i \in I\}$ d'ouverts plurifins de $\boldsymbol{C}^n$ contient une sous-famille dénombrable $\{U_{i_n} ; n \in \boldsymbol{N}\}$ telle que l'on ait

$$\bigcup_{i \in I} U_i = \bigcup_{n \in \boldsymbol{N}} U_{i_n} \cup P,$$

où P est une partie pluripolaire de $\boldsymbol{C}^n$ (voir [1]).

DÉFINITION 3.1: *On dit qu'une partie A de $\boldsymbol{C}^n$ est plurieffilée en un point $z_0 \in \boldsymbol{C}^n$ si $z_0 \notin \overline{A}$ ou si $z_0 \in \overline{A}$ et il existe un voisinage ouvert V de z_0 et une fonction psh u sur V telle que l'on ait*

$$\limsup_{z \in A \cap V,\, z \to z_0} u(z) < u(z_0).$$

Pour tout $z \in \boldsymbol{C}^n$, les voisinages plurifins de z sont exactement les parties de $\boldsymbol{C}^n$ contenant z et de complémentaire pluriéffilé au point z.

On appellera droite complexe de $\boldsymbol{C}^n$ tout ensemble de la forme $a + \boldsymbol{C}\tau$, où $a \in \boldsymbol{C}^n$ et $\tau \in \boldsymbol{C}^n \setminus \{0\}$. Une droite complexe $a + \boldsymbol{C}\tau$ est naturellement munie d'une topologie fine induite par celle de $\boldsymbol{C}$. Cette topologie est indépendante du couple (a, τ). On l'appelera la topologie fine.

PROPOSITION 3.2: *Soit U un ouvert plurifin de $\boldsymbol{C}^n$. Alors la trace sur U de toute droite complexe de $\boldsymbol{C}^n$ est un ouvert fin.*

DÉMONSTRATION: Soit $a \in U$ et $\tau \in \boldsymbol{C}^n \setminus \{0\}$. Posons $\omega = U \cap (a + \boldsymbol{C}\tau)$. Soit $b \in U$, l'ensemble CU est plurieffilé au point b. Si $b \notin \overline{CU}$, alors U est un voisinage (euclidien) de b, donc ω est un voisinage fin de b dans $a + \boldsymbol{C}\tau$. Si $b \in \overline{CU}$, il existe un voisinage ouvert V de b et une fonction psh u sur V telle que l'on ait

$$\limsup_{z \in CU \cap V,\, z \to a} u(z) < u(b).$$

Soit ϕ la réstriction de u à l'ouvert $V \cap (a + \boldsymbol{C}\tau)$. Alors ϕ est sousharmonique dans $V \cap (a + \boldsymbol{C}\tau)$ et on a

$$\phi(b) = u(b) > \limsup_{z \in CU \cap V,\, z \to b} u(z) \geqslant \limsup_{z \in CU \cap V \cap (a + \boldsymbol{C}\tau),\, z \to b} \phi(z).$$

Donc $CU \cap (a + \boldsymbol{C}\tau)$ est effilé au point a. Il en résulte que ω est un voisinage fin de b dans $a + \boldsymbol{C}\tau$. Le point a étant arbitraire, on en déduit que ω est un ouvert fin de $a + \boldsymbol{C}\tau$.

On rappelle que tout point de $\boldsymbol{C}^n$ admet, pour chacune des topologies $\mathcal{C}^n$, $\mathcal{C}_{psh}$ et $\mathcal{C}_f$, un système fondamental de voisinages fins compacts en topologie euclidienne (voir [1] et [4]).

Si $n = 1$, les trois topologies $\mathcal{C}^n$, $\mathcal{C}_{psh}$ et $\mathcal{C}_f$ sont identiques. Par contre, si $n \geqslant 2$, on a les inclusions strictes suivantes (voir [7]).

$$\mathcal{C}^n \subset \mathcal{C}_{psh} \subset \mathcal{C}_f.$$

Pour développer une analyse complexe fine dans $\boldsymbol{C}^n$, il semble que les deux premières topologies ne sont pas satisfaisantes. En effet, la première topologie présente l'inconvénient de dépendre de façon effective du système de coordonnées complexes, et la topologie $\mathcal{C}_f$ n'est pas adaptée à la structure complexe de $\boldsymbol{C}^n$. La topologie qui semble naturelle pour une analyse complexe fine de plusieurs variables est la topologie $\mathcal{C}_{psh}$, car elle est biholomorphiquement invariante (voir [7]). Malheureusement elle n'est pas encore très bien étudiée.

4. - FONCTIONS FINEMENT PLURISOUSHARMONIQUES DANS UN $\mathcal{C}^n$-OUVERT DE $\boldsymbol{C}^n$

DÉFINITION 4.1: *Soit U un $\mathcal{C}^n$-ouvert fin de $\boldsymbol{C}^n$. On dit qu'une fonction $f : U \to$ $\to [-\infty, +\infty[$ est finement plurisousharmonique, en abrégé fpsh, dans U si*

i) f est f-s.c.s. dans U.

ii) *Pour tout* $a \in U$ *et tout* $\tau \in \mathbf{C}^n \setminus \{0\}$, *la restriction de* f *à* $U \cap (a + \mathbf{C}\tau)$ *est finement sousharmonique.*

On note $FPSH(U)$ l'ensemble des fonctions fpsh dans U.

EXEMPLES: 1. Si U est un ouvert euclidien de $\mathbf{C}^n$, il résulte des propriétés des fonctions finement sousharmoniques que toute fonction psh dans U est fpsh dans U (voir th. 4.3 ci dessous).

2. Soit f une fonction $\mathscr{C}^n$-holomorphe dans un $\mathscr{C}^n$-ouvert U de $\mathbf{C}^n$ (voir [7]). Alors les fonctions $|f|$ et $\ln|f|$ sont fpsh dans U.

Les propriétés suivantes découlent immédiatement de la définition précédente et des propriétés des fonctions finement sousharmoniques classiques:

1. La somme de deux fonctions fpsh est une fonction fpsh.
2. Le produit par un réel positif d'une fonction fpsh est une fonction fpsh.
3. L'enveloppe supérieure d'une famille finie de fonctions fpsh est une fonction fpsh.
4. Les fonctions fpsh possèdent la propriété de faisceau (dite aussi locale):

– Si $U_1 \subset U_2$ sont deux $\mathscr{C}^n$-ouverts, alors la réstriction de toute fonction de $FPSH(U_2)$ à U_1 appartient à $FPSH(U_1)$.

– Si $(U_i)_{i \in I}$ est une famille de $\mathscr{C}^n$-ouverts, et si u est une fonction sur $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ dont la réstriction à chaque U_i appartient à $FPSH(U_i)$, alors $u \in FPSH(U)$.

Les trois premières propriétés expriment que l'ensemble $FPSH(U)$ est un cône convexe sup-stable.

THÉORÈME 4.2: *Soit* u *une fonction* fpsh *dans un* $\mathscr{C}^n$*-ouvert* U *de* $\mathbf{C}^n$*. Alors* u *est finement sousharmonique dans* U.

DÉMONSTRATION: Grâce au caractère local de la notion de fonction fpsh, on peut supposer que U est de la forme $U_1 \times \ldots \times U_n$, où $U_1, \ldots, U_n$ sont des ouverts fins de $\mathbf{C}$. D'après la définition des fonction fpsh, la fonction u est séparément finement sousharmonique $\mathscr{C}^n$-localement bornée supérieurement; elle est donc finement sousharmonique dans U d'après le théorème 2.1.

THÉORÈME 4.3: *Soit* u *une fonction* psh *dans un ouvert* Ω *de* $\mathbf{C}^n$*. Si* u *est* $\mathscr{C}^n$*-s.c.s., alors elle est* fpsh *dans* Ω.

DÉMONSTRATION: Comme u est psh dans Ω, sa réstriction à la trace sur Ω de toute droite complexe est sousharmonique, donc finement sousharmonique. Comme u est supposée $\mathscr{C}^n$-s.c.s., on en déduit que u est fpsh dans Ω.

REMARQUE: Contrairement aux fonctions finement sousharmoniques de Fuglede, une fonction fpsh n'est pas nécessairement $\mathscr{C}^n$-continue. En effet, comme la topologie

$\mathscr{C}^n$ est strictement moins fine que la topologie $\mathscr{C}_{psh}$, il existe des fonctions psh non $\mathscr{C}^n$-continues. De telles fonctions sont fpsh d'après le théorème précédent. Il serait donc intéressant de savoir si toute fonction fpsh est pf-continue.

THÉORÈME 4.4: *Soit u une fonction* fpsh *localement bornée supérieurement dans un ouvert Ω de $\boldsymbol{C}^n$. Alors u est* psh *dans Ω.*

DÉMONSTRATION: La fonction u est séparément finement sousharmonique et localement bornée supérieurement; elle est donc finement sousharmonique dans Ω d'après le théorème 2.1. On en déduit qu'elle est sousharmonique dans Ω d'après [4], th. 9.8, et par suite elle est s.c.s. Pour tout $a \in \Omega$ et tout $\tau \in \boldsymbol{C}^n \setminus \{0\}$, la restriction de u à l'ouvert $\Omega \cap (a + \boldsymbol{C}\tau)$ de $a + \boldsymbol{C}\tau$ est finement sousharmonique localement bornée supérieurement, donc sousharmonique dans $\Omega \cap (a + \boldsymbol{C}\tau)$ d'après [4], th. 9.8. Il en résulte que u est psh dans Ω.

Pour toute fonction f sur un $\mathscr{C}^n$-ouvert U, on note f^* la régularisée $\mathscr{C}^n$-s.c.s. de f. C'est la plus petite majorante $\mathscr{C}^n$-scs de f. On rappelle que f^* est donnée par

$$f^*(z) = \mathscr{C}^n - \limsup_{u \to z} f(u), \quad \forall z \in U.$$

THÉORÈME 4.5: *Soient U un $\mathscr{C}^n$-ouvert de $\boldsymbol{C}^n$ et $\{u_\alpha, \alpha \in A\}$ une famille $\mathscr{C}^n$-localement uniformément bornée supérieurement de fonctions* fpsh *dans U. La fonction $\left(\sup_\alpha u_\alpha\right)^*$ est alors* fpsh *dans U et l'ensemble*

$$\left\{z \in U : \sup_{\alpha \in A} u_\alpha(z) < \left(\sup_{\alpha \in A} u_\alpha\right)^*(z)\right\}$$

est $\boldsymbol{R}^{2n}$-polaire.

DÉMONSTRATION: D'après le théorème 4.2, $(u_\alpha)_{\alpha \in A}$ est une famille finement uniformément localement bornée supérieurement de fonctions finement sousharmoniques dans U. Par conséquent, la fonction $v = \left(\sup_{\alpha \in A} u_\alpha\right)^*$ est finement sousharmonique dans U, donc finement continue et ne diffère de $\sup_{\alpha \in A} u_\alpha$ que sur un ensemble $\boldsymbol{R}^{2n}$-polaire. La régularisée f-s.c.s. v_H de la restriction de $\sup_{\alpha \in A} u_\alpha$ à la trace sur U d'une droite complexe H rencontrant U est finement sousharmonique, donc finement continue, et ne diffère de $\sup_{\alpha \in A} u_\alpha$ que sur un ensemble $\boldsymbol{R}^2$-polaire. Comme les ensembles polaires de H sont d'intérieur fin vide, on en déduit que la restriction de v à $H \cap U$ coïncide avec v_H. Il en résulte donc que v est fpsh sur U.

QUESTION 4.6: L'ensemble U du théorème précédent est-il pluripolaire?

5. - Fonctions finement plurisousharmoniques dans un $\mathcal{C}_{psh}$-ouvert

Définition 5.1: *Soit U un $\mathcal{C}_{psh}$-ouvert de $\mathbf{C}^n$. On dit qu'une fonction $f : U \to [-\infty, +\infty[$ est finement plurisousharmonique, en abrégé* pfpsh, *dans U si*

i) *f est* pf-*s.c.s. dans U.*

ii) *Pour tout $a \in U$ et tout $\tau \in \mathbf{C}^n \setminus \{0\}$, la restriction de u à $U \cap (a + \mathbf{C}\tau)$ est finement sousharmonique.*

On note $PFPSH(U)$ l'ensemble des fonctions pfpsh dans U.

Comme pour les fonctions fpsh dans un $\mathcal{C}^n$-ouvert, les propriétés suivantes des fonctions pfpsh dans un $\mathcal{C}_{psh}$-ouvert U découlent immédiatement de la définition précédente et des propriétés des fonctions finement sous-harmoniques classiques:

1. La somme de deux fonctions pfpsh dans U est une fonction pfpsh dans U.
2. Le produit par un réel positif d'une fonction pfpsh dans U est une fonction pfpsh dans U.
3. L'enveloppe supérieure d'une famille finie de fonctions pfpsh dans U est une fonction pfpsh dans U.
4. Les fonctions pfpsh possèdent la propriété de faisceau (ou locale):

– Si $U_1 \subset U_2$ sont deux $\mathcal{C}_{psh}$-ouverts, alors la restriction de toute fonction de $PFPSH(U_2)$ à U_1 appartient à $PFPSH(U_1)$.

– Si $(U_i)_{i \in I}$ est une famille de $\mathcal{C}_{psh}$-ouvert et si u est fonction sur $U = \bigcup_i U_i$ dont la restriction à chaque U_i appartient à $PFPSH(U_i)$, alors $u \in PFPSH(U)$.

On déduit des propriétés 1, 2 et 3 que l'ensemble $PFPSH(U)$ est un cône convexe sup-stable.

Théorème 5.2: *Soit u une fonction psh dans un ouvert Ω de $\mathbf{C}^n$. Alors u est pfpsh dans Ω.*

Démonstration: En effet, u est pf-continue dans Ω. Comme u est psh dans Ω, sa restriction à la trace d'une droite complexe sur Ω est sousharmonique, donc finement sousharmonique. On en déduit que u est pfpsh dans Ω.

Question 5.3: Soit U un ouvert plurifin de $\mathbf{C}^n$, $n \geqslant 2$, et soit $u \in PFPSH(U)$. Est-ce que u est finement sousharmonique dans U?

Dans un $\mathcal{C}^n$-ouvert la notion de fonctions fpsh coïncide avec celle de fonction pfpsh:

Théorème 5.4: *Soit Ω un $\mathcal{C}^n$-ouvert. Alors toute fonction* fpsh *dans Ω est pfpsh dans Ω.*

DÉMONSTRATION: Le théorème résulte aussitôt des définitions des fonctions fpsh et pfpsh et du fait que $\mathscr{C}^n \subset \mathscr{C}_{psh}$.

THÉORÈME 5.5: *Soit u une fonction* pfpsh *localement bornée supérieurement dans un ouvert Ω de $\boldsymbol{C}^n$. Alors u est* psh *dans Ω.*

DÉMONSTRATION: La fonction u est séparément finement sousharmonique localement bornée supérieurement; elle est donc finement sousharmonique dans Ω en vertu du théorème. 2.1, donc sous-harmonique dans Ω ([4], th. 9.8) et par suite elle est s.c.s dans Ω. Par localisation, on peut supposer que u est bornée supérieurement. Pour tout $a \in \Omega$ et tout $\tau \in \boldsymbol{C}^n \setminus \{0\}$, la restriction de u à l'ouvert $\Omega \cap (a + \boldsymbol{C}\tau)$ est finement sousharmonique et bornée supérieurement, donc sousharmonique dans $\Omega \cap (a + \boldsymbol{C}\tau)$ d'après [4], th. 9.8. On en déduit que u est psh, donc sousharmonique dans Ω.

QUESTION 5.6: Soient U un $\mathscr{C}^n$-ouvert de $\boldsymbol{C}^n$ et f une fonction pfpsh dans U. Est-ce que f est fpsh dans U?

Il est clair que la réponse à cette question est positive si on impose à f d'être $\mathscr{C}^n$-s.c.s.

THÉORÈME 5.7: *Soit $(u_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille filtrante décroissante de fonctions* pfpsh *dans un $\mathscr{C}_{psh}$-ouvert U et telle que $\inf_{\alpha \in A} u_\alpha(z) > -\infty$ pour tout $z \in \Omega$. Alors $\inf_{\alpha \in A} u_\alpha$ est une fonction* pfpsh *dans U.*

DÉMONSTRATION: Le théorème est une conséquence immédiate de la définition des fonctions pfpsh et des propriétés des fonctions finement hyperharmoniques dans les ouverts fins de $\boldsymbol{C}$.

QUESTION 5.8: Soit $(u_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille uniformément localement bornée supérieurement et soit $v = \sup_{\alpha \in A} u_\alpha$. On note v^* la régularisée pf-s.c.s. de v. Est-ce que v^* est pfpsh dans U?

QUESTION 5.9: Avec les notations de la question précédente, est-ce que l'ensemble $\{v < v^*\}$ est pluripolaire?

6. - CONTINUITÉ DES FONCTIONS PFPSH PF-LOCALEMENT BORNÉES

Soient Ω un domaine borné de $\boldsymbol{C}^n$ et $\psi \in PSH(\Omega) \cap L^\infty(\Omega, loc)$. On pose alors, pour toute partie F de Ω:

$$\psi_F(z) = \sup\{v(z) : v \in PSH(\Omega),\ v \leqslant \psi \text{ sur } F\},$$
$$\psi_F^*(z) = \limsup_{\zeta \to z} \psi_F(\zeta).$$

Rappelons le résultat suivant:

PROPOSITION 6.1 ([3], Cor. 3.4): *Soit* O *un* $\mathscr{C}_{psh}$*-ouvert* $\subset \Omega$. *Alors on a* $(dd^c \psi^*_{\Omega \setminus O})^n = 0$ *sur* O.

Dans la suite on prend pour ψ la fonction psh définie sur Ω par

$$\psi(z) = |z_1|^2 + \ldots + |z_n|^2 - R^2,$$

où R est une constante strictement positive, telle que $\overline{\Omega} \subset \{z \in \mathbf{C}^n \colon |z| < R\}$.

On a $(dd^c \psi)^n = c_n \lambda$, où λ est la mesure de Lebesgue et c_n est une constante strictement positive, ne dépendant que de n.

Pour toute partie A de Ω on note CA le complémentaire de A dans Ω, i.e. l'ensemble $\Omega \setminus A$.

PROPOSITION 6.2: *Pour tout ouvert plurifin* O *de* Ω, *l'ensemble* $A = \{z \in O : \psi < \psi^*_{CO}\}$ *est un ouvert plurifin dense dans* O.

DÉMONSTRATION: Il est clair que A est un ouvert plurifin. Si ω est un ouvert plurifin non vide contenu dans $O \setminus A$, on a $(dd^c \psi)^n(\omega) = (dd^c \psi^*_{CO})^n(\omega)$. Or on a $(dd^c \psi)^n(\omega) > 0$ car la mesure de Lebesgue charge les ouverts plurifins non vides, alors que $(dd^c \psi^*_{CO})^n(\omega) = 0$ d'après la proposition 6.1, ce qui est absurde.

QUESTION 6.3: A-t-on $\psi < \psi^*_{CO}$ dans O pour tout ouvert plurifin O de Ω? De façon plus générale, peut-on définir au voisinage de chaque point z de $\mathbf{C}^n$ une fonction psh finie continue ψ telle qu'il existe un système fondamental de voisinages plurifins O de z vérifiant l'inégalité $\psi(z) < \psi^*_{CO}(z)$?

LEMME 6.4: *Soient* O *et* U *deux ouverts plurifins tels que* $\widetilde{O} \subset U \subset \Omega$ *et* u *une fonction* pfpsh *dans* U *telle que* $|u| \leqslant -\psi$. *Alors on a*

$$\psi \leqslant u \leqslant -\psi^*_{CO}$$

dans U.

DÉMONSTRATION: Il n'y a que la deuxième inégalité à démontrer. Soit v une fonction psh dans Ω telle que l'on ait $v \leqslant \psi$ sur CO et soit $z \in O$. Soit H une droite complexe passant par z. On a alors $u \leqslant -v$ sur $CO \cap U \cap H$, donc $u \leqslant -v$ sur $U \cap H$ puisque u est finement sousharmonique bornée dans $U \cap H$ et $-v$ est finement hyperharmonique dans $U \cap H$. Comme z et v sont arbitraires, on en déduit que $u \leqslant -\psi_{CO}$. D'autre part, la restriction de u à $U \cap H$ est finement continue, donc elle minore la régularisée finement s.c.i. de la restriction de la fonction $-\psi_{CO}$ à $H \cap U$. Or, la restriction à $U \cap H$ de la fonction $-\psi^*_{CO}$ est finement hyperharmonique, donc finement continue et ne diffère de $-\psi_{CO}$ que sur un ensemble polaire; elle est donc égale à la régularisée finement s.c.i. de la restriction de la fonction $-\psi_{CO}$ à $H \cap U$, de sorte que l'on a $u \leqslant -\psi^*_{CO}$.

Nous pouvons maintenant démontrer le

THÉORÈME 6.5: *Soit U un ouvert plurifin de Ω. On suppose que pour tout point z_0 de U, il existe un ouvert plurifin ouvert O tel que l'on ait,*

$$z_0 \in O \subset \widetilde{O} \subset U, \quad \psi(z_0) < \psi^*_{CO}(z_0).$$

On peut alors construire un voisinage plurifin V de z_0, inclus dans U, de telle manière que, pour toute fonction u pfpsh *dans U, avec $|u| \leqslant -\psi$, il existe deux fonctions s et t psh bornées dans Ω dont la différence coïncide avec u dans V.*

DÉMONSTRATION: Cette démonstration nous a été inspirée par celle du th. 9.9 de [4]. Soient u comme dans l'énoncé, O un ouvert plurifin tel que $\widetilde{O} \subset U$ et $z_0 \in O$ tel que $\psi(z_0) < \psi^*_{CO}(z_0)$. D'après le lemme précédent, on a

$$\psi \leqslant u \leqslant -\psi^*_{CO}$$

dans U. Comme $\psi(z_0) < \psi^*_{CO}(z_0)$, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\alpha\psi(z_0) - \alpha\psi^*_{CO}(z_0) < \psi(z_0) + 2\psi^*_{CO}(z_0).$$

L'ensemble $V = \{\alpha\psi - \alpha\psi^*_{CO} < \psi + 2\psi^*_{CO}\}$ (indépendant de u) est un ouvert plurifin et on a $z_0 \in V \subset \widetilde{V} \subset \widetilde{O}$ car $\psi^*_{CO} = \psi$ dans $C\widetilde{O}$. Définissons maintenant la fonction v sur Ω par

$$v(z) = \begin{cases} \max\{\alpha\psi(z),\, u(z) + (\alpha+2)\,\psi^*_{CO}(z)\} & \text{si } z \in U, \\ \alpha\psi(z) & \text{si } z \in C\widetilde{O}. \end{cases}$$

La définition a bien un sens car $U \cup C\widetilde{O} = \Omega$, et $u + (\alpha+2)\,\psi^*_{CO} < \alpha\psi$ dans $U \backslash \widetilde{O}$ puisque $\psi^*_{CO} = \psi$ dans $C\widetilde{O}$.

Il est clair que v est pfpsh dans U et dans $C\widetilde{O}$, donc dans Ω. Comme u est bornée, il résulte du théorème 5.5 que v est psh dans Ω. Or, dans V, on a $v = u + (\alpha+2)\,\psi^*_{CO}$, soit $u = v - (\alpha+2)\,\psi^*_{CO}$. Il n'y a plus qu'à prendre $s = v$ et $t = (\alpha+2)\,\psi^*_{CO}$.

COROLLAIRE 1: *Soit U un ouvert plurifin de Ω. Alors, pour tout point $z_0 \in U$ tel qu'il existe un ouvert plurifin ouvert O vérifiant $z_0 \in O \subset \widetilde{O} \subset U$ et $\psi(z_0) < \psi^*_{CO}(z_0)$, il existe un voisinage plurifin V de z_0, inclus dans U, tel que toute fonction u* pfpsh *bornée dans U soit pf-continue dans V.*

DÉMONSTRATION: D'après le théorème précédent, on peut trouver un voisinage plurifin V de z_0, inclus dans U, tel que toute fonction u pfpsh dans U, avec $|u| \leqslant -\psi$, soit dans V la différence de deux fonctions psh bornées dans Ω, donc pf-continue dans V. Si u est pfpsh bornée quelconque dans U, on peut trouver $\lambda > 0$ tel que $|\lambda u| \leqslant -\psi$ dans U, de sorte que λu est pf-continue dans V d'après ce qui précède, donc u est pf-continue dans V.

COROLLAIRE 2: *Il existe un ouvert plurifin V, dense dans U, tel que la restriction à V de toute fonction* pfpsh *dans U soit pf-continue.*

DÉMONSTRATION: Le corollaire résulte aussitôt du corollaire précédent et de la proposition 6.2.

REMARQUE: Il résulte du corollaire 1 précédent que si la réponse à la question 6.3 est positive (concernant la fonction ψ ou toute autre fonction ϕ psh continue dans Ω et telle que la mesure $(dd^c\phi)^n$ charge les ouverts plurifins non vides), alors toute fonction pfpsh dans un ouvert plurifin U est pf-continue dans U. Ce résultat aurait pour conséquence la connexité locale de la topologie plurifine:

PROPOSITION 6.6: *Si la réponse à la question* 6.3 *est positive, alors tout point z de V admet un système fondamental de voisinages* pf-*connexes.*

DÉMONSTRATION: Soient U un ouvert plurifin borné de $\boldsymbol{C}^n$ et $z \in U$. Notons $\mathcal{B}$ l'ensemble des parties à la fois pf-ouvertes et pf-fermées de V contenant z. Pour tout élément W de $\mathcal{B}$, la fonction indicatrice 1_W de W est pfpsh dans U. Comme la famille $(1_W)_{W \in \mathcal{B}}$ est filtrante décroissante, la fonction $u = \inf_{W \in \mathcal{B}} 1_W$ est pfpsh bornée dans U en vertu du th. 5.7. D'après l'hypothèse de la proposition, u est pf-continue dans U en vertu du cor. 2 précédent; donc l'ensemble

$$\{z \in V : u(z) = 1\} = \{z \in V : u(z) > 0\}$$

appartient à $\mathcal{B}$. On en déduit que $\mathcal{B}$ admet un élément minimal W_0. Alors W_0 est un voisinage pf-connexe de z contenu dans V. La proposition est démontrée.

7. - QUELQUES QUESTIONS OUVERTES.

QUESTION 7.1: Soit U un ouvert plurifin de $\boldsymbol{C}^n$, $n \geqslant 2$, et soit $u \in PFPSH(U)$. Est-ce que u est finement sousharmonique dans U?

DÉFINITION 7.2: *Un ensemble $A \subset \boldsymbol{C}^n$ est dit finement pluripoloaire si, pour tout élément z de A, il existe un voisinage plurifin U de z et une fonction $u \in PFPSH(U)$, non identiquement égale à $-\infty$, telle que $A \subset \{u = -\infty\}$.*

Il est clair d'après le théorème 5.2 et la propriété locale des fonctions pfpsh qu'un ensemble pluripolaire inclus dans U est finement pluripolaire.

QUESTION 7.3: Un ensemble finement pluripolaire est-il puripolaire?

QUESTION 7.4: On sait que dans un domaine ordinaire Ω de $\boldsymbol{C}^n$ une fonction u est psh si et seulement si, pour tout $\boldsymbol{C}$-isomorphisme T de $\boldsymbol{C}^n$ dans lui-même, la fonction $u \circ T$ est sousharmonique dans $T^{-1}(\Omega)$. Ce résultat reste-t-il vrai si Ω est un domaine plurifin U et $u \in PFPSH(U)$?

QUESTION 7.5: Il est bien connu que toute fonction finement sousharmonique dans un domaine fin de $\boldsymbol{R}^d$ est finement continue. A-t-on un résultat analogue pour les fonctions pfpsh; autrement dit, est-ce que toute fonction pfpsh dans un ouvert plurifin est pf-continue?

QUESTION 7.6: Peut on définir l'opérateur de Monge-Ampère dans un domaine plurifin et la capacité associée?

D'autres questions ouvertes existent encore, nous nous contentons de celles que nous avons posées ci dessus.

REMERCIEMENTS: L'auteur tient à remercier le Professeur B. Fuglede pour les indications bibliographiques sur les fonctions finement holomorphes d'une ou plusieurs variables qu'il a bien voulu lui donner et qui ont été à l'origine de ce travail.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] E. BEDFORD - B. A. TAYLOR, *Fine topology, Silov boundary and* $(dd^c)^n$, J. Funct. Anal., 72 (1987), 225-251.
[2] E. BEDFORD - B. A. TAYLOR, *A new capacity for plurisubharmonic functions*, Acta Math., 149 (1982), 1-40.
[3] M. EL KADIRI, *Fonctions séparément finement surharmoniques*, à paraître dans Positivity.
[4] B. FUGLEDE, *Finely harmonic functions*, Lecture Notes in Math., 289, Springer Verlag, 1972.
[5] B. FUGLEDE, *Localization in Fine Potential Theory and Uniform Approximation by Subharmonic Functions*, J. Funct. Anal., 49 (1982), 52-72.
[6] B. FUGLEDE, *Connexion en topologie fine et balayage des mesures*, Ann. Inst. Fourier, 21, 3, (1971), 227-244.
[7] B. FUGLEDE, *Fonctions finement holomorphes de plusieurs variables - un essai. Séminaire d'Analyse P. Lelong-P. Dolbeault-H. Skoda*, Springer-Verlag, Lecture Notes in Math., 1198 (1986), 113-145.
[8] B. FUGLEDE, *On the mean value property of finely harmonic and finely hyperharmonic functions*, Aequ. Math. (1990), 198-203.

Direttore responsabile: Prof. A. BALLIO - Autorizz. Trib. di Roma n. 7269 dell'8-12-1959
«Monograf» - Via Collamarini, 5 - Bologna