Rendiconti
Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL
Memorie di Matematica e Applicazioni
121° (2003), Vol. XXVII, fasc. 1, pagg. 125-143

ALLAMI BENYAICHE - SALMA GHIATE (*)

Propriété de moyenne restreinte associée à un système d'E.D.P. (**)

ABSTRACT. — In this paper, we study the restricted mean value property for solutions of a some coupled partial differential equations. In particular, we obtain such property for biharmonic functions, i.e: $\Delta^2 \varphi = 0$, and functions satisfying $\Delta^2 \varphi = \varphi$.

Proprietà della media ristretta associata a un sistema di E.D.P.

SUNTO. — Si studia la proprietà della media ristretta per le soluzioni di un certo sistema di equazioni alle derivate parziali. Se ne deduce, in particolare, la proprietà della media ristretta per le funzioni biarmoniche e per le soluzioni dell'equazione $\Delta^2 \varphi = \varphi$.

1. - INTRODUCTION

Soit X_0 un domaine non vide borné de $\mathbb{R}^d$, $d \geqslant 1$, et r une fonction réelle strictement positive sur X_0 telle que:

$$\overline{B}(x_0, r(x_0)) = \overline{\{y \in \mathbb{R}^d, \|x_0 - y\| < r(x_0)\}} \subset X_0, \quad \text{pour tout} \quad x_0 \in X_0.$$

Une fonction numérique mesurable f sur X_0 est dite r-médiane si $\lambda_{x, r(x)}(f) = f(x)$, pour tout $x \in X_0$. Où λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ et $\lambda_{x, r(x)} := = (\lambda(B(x, r(x))))^{-1} . \chi_{B(x, r(x))} . \lambda$. Si f est une fonction harmonique sur X_0, alors f est r-médiane. Divers auteurs se sont interessés à la question inverse: Si f est r-médiane, sous quelles conditions, f est harmonique?. En effet, Volterra[23] et Kellogg [19] ont montré que si f est une fonction continue sur la fermeture $\overline{X_0}$ de X_0 et r-médiane, alors f est harmonique. Ackoglu et Sharpe [2] ont montré que si f est une fonction bornée et r-

(*) Indirizzo degli Autori: Université Ibn Tofail, Faculté des Sciences. B.P: 133-Kénitra-Maroc.
(**) Memoria presentata l'11 novembre 2003 da Marco Biroli, uno dei XL.

médiane sur le disque unité de $\mathbb{R}^2$, alors f est harmonique. Dans le cas où f est une fonction positive, Veech [21,22], Baxter [3] et Cornea-Veselý [10] ont montré, par différentes méthodes et sous des conditions sur X_0, que si r est une fonction réelle positive sur X_0 telle qu'il existe un nombre reél $\varepsilon > 0$ et une fonction ϱ Lipshitzienne, $0 < \varrho \leqslant \leqslant \operatorname{dist}(.\,, \partial X_0)$, vérifiant:

$$\varepsilon . \varrho \leqslant r \leqslant (1-\varepsilon) . \varrho$$

alors toute fonction positive r-médiane sur X_0, est harmonique. Dans [13], Hansen et Nadirashvili ont montré que si une fonction f est r-médiane bornée par une fonction harmonique $h \geqslant 1$ telle que f est continue ou la fonction r est localement bornée loin de zéro, alors f est harmonique. Pour une bibliographie plus complète, on peut voir [11] et [20].

Dans la première partie de ce travail, nous étudions la propriété de moyenne restreinte pour les solutions d'un système d'équations aux dérivées partielles du type:

$$\begin{cases} L_1 u = -v . \nu_1 \\ L_2 v = -u . \nu_2 , \end{cases}$$

où ν_j; $j = 1, 2$, sont deux mesures de Kato globales sur X_0 (i.e, la fonction $G_{L_i}^{\nu_i} = = \int_{0X_0} G_{L_i}(.\,, y)\, d\nu_i(y)$; $i = 1, 2$, est une fonction continue bornée sur X_0) et L_i; $i = 1, 2$, sont deux opérateurs différentiels elliptiques du second ordre admettant des noyaux de Green G_{L_i} et pour lesquels toute boule $B \subset \overline{B} \subset X_0$ est L_i-régulière. On suppose que:

$$\|G_{L_1}^{\nu_1}\|_\infty . \|G_{L_2}^{\nu_2}\|_\infty < 1 .$$

En particulier, nous étudions la propriété de moyenne restreinte pour les fonctions φ telles que $\Delta^2 \varphi = 0$, dites biharmoniques, et pour les solutions de l'équation $\Delta^2 \varphi = \varphi$. Pour la simplicité des calculs, nous considérons seulement les systèmes du type:

$$(S) \begin{cases} \Delta u = -v . \nu_1 \\ \Delta v = -u . \nu_2 . \end{cases}$$

Nous nous intéressons à ce problème sur un domaine borné. Soit $X = X_1 \cup X_2$ où $X_j = = X_0 \times \{j\}$; $j = 1, 2$. On se donne deux applications i_j; $j = 1, 2$, qui à chaque $x_0 \in X_0$, associe (x_0, j), et r une fonction strictement positive définie sur X telle que $\overline{B}(x_0, r(x_0, j)) \subset X_0$, pour tout $x_0 \in X_0$. Pour une fonction f mesurable définie sur X, nous définissons la moyenne restreinte $\mu_{x, r(x)} = (\mu_{x, r(x), 1}, \mu_{x, r(x), 2})$ sur $X_1 \cup X_2$ par la relation suivante:

Si $x = (x_0, 1)$,

$$\mu_{x,\, r(x),\, 1}(f \circ i_1) := \frac{d}{r(x)^d} \int_0^{r(x)} s^{d-1} H_{B(x_0,\, s)}(f \circ i_1)(x_0)\, ds +$$

$$+ \frac{d}{r(x)^d} \int_0^{r(x)} s^{d-1} K^{\nu_1}_{B(x_0,\, s)}(f \circ i_2)(x_0)\, ds.$$

Si $x = (x_0, 2)$,

$$\mu_{x,\, r(x),\, 2}(f \circ i_2) := \frac{d}{r(x)^d} \int_0^{r(x)} s^{d-1} H_{B(x_0,\, s)}(f \circ i_2)(x_0)\, ds +$$

$$+ \frac{d}{r(x)^d} \int_0^{r(x)} s^{d-1} K^{\nu_2}_{B(x_0,\, s)}(f \circ i_1)(x_0)\, ds.$$

Avec $H_{B(x_0,\, s)}$ est le noyau harmonique classique associé à la boule $B(x_0, s)$ dans X_0 et

$$K^{\nu_i}_{B(x_0,\, s)}(g) = \int_{B(x_0,\, s)} G_{B(x_0,\, s)}(.\,, y)\, g(y)\, d\nu_i(y),$$

où $G_{B(x_0,\, s)}$ est la fonction de Green associée à l'opérateur de Laplace Δ sur la boule $B(x_0, s)$.

Nous définissons une fonction **r-bimédiane** sur X, comme une fonction mesurable vérifiant:

$$\mu_{x,\, r(x)}(f) = f(x), \quad \text{pour tout } x \in X.$$

Nous montrons que, pour une fonction f h-bornée et pour une fonction r localement bornée loin de zéro, si f est r-bimédiane alors f est harmonique par rapport à la structure harmonique donnée par les noyaux $(S_U)_{U \in \mathcal{U}}$ (voir paragraphe 2). Dans le cas où $\nu_1 = \lambda^d$, $\nu_2 = 0$, nous montrons que, si f est une fonction localement λ-intégrable et r-bimédiane sur X telle que la fonction $(f \circ i_2)$ est harmonique sur X_0, au sens classique, alors il existe une constante c telle que

$$A(x_0, r(x_0, 1), f \circ i_1) - (f \circ i_1)(x_0) = c r^2(x_0, 1)(f \circ i_2)(x_0),$$

où $A(x_0, r(x_0, 1), f \circ i_1)$ est la moyenne de $f \circ i_1$ sur la boule $B(x_0, r(x_0, 1))$ et $x_0 \in X_0$. Notons qu'une telle formule s'obtienne aussi en utilisant le développement d'Almansi (voir [1] et [4]).

Dans la deuxième partie, nous étudions la propriété de moyenne restreinte sur un domaine de Green X, non nécéssairement borné, pour des fonctions r-bimédianes positives en utilisant les noyaux matriciels du type $\begin{pmatrix} N & R_1 \\ R_2 & N \end{pmatrix}$ associés au système (S). Où

$$Ng(x) = \frac{d}{r(x)^d} \int_0^{r(x)} s^{d-1} H_{B(x,\,s)}\, g(x)\, ds,$$

$$et\ \ R_i g(x) = \frac{d}{r(x)^d} \int_0^{r(x)} s^{d-1} K^{\nu_i}_{B(x,\,s)}\, g(x)\, ds\,; \quad i = 1, 2,$$

pour toute fonction g mesurable positive sur X et pour tout $x \in X$. Notons que dans le cas harmonique, Cornea-Veselý [10] ont fait une étude analogue en considérant seulement le noyau N.

2. - Propriété de moyenne restreinte sur un domaine borné

On désigne par X_0 un domaine borné de $\mathbb{R}^d$, $d \geqslant 1$. Pour $j = 1, 2$, on note $X_j := X_0 \times \{j\}$ et $X = X_1 \cup X_2$. On se donne une application π qui à chaque (x_0, j), $x_0 \in X_0$, associe x_0 et les applications i_j qui à chaque $x_0 \in X_0$, associe (x_0, j); $j = 1, 2$. $\mathcal{U}_0$ désigne l'ensemble de toutes les boules ouvertes $B(x_0, r)$, $x_0 \in X_0$, $r > 0$, telles que $\overline{B}(x_0, r) \subset X_0$. On note par $\mathcal{U}_j$, l'image de $\mathcal{U}_0$ par i_j; $j = 1, 2$ et $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2$. Soient ν_1 et ν_2 deux mesures de Kato globales sur X_0, i.e., la fonction $G^{\nu_j}_{X_0} = \int_{X_0} G_{X_0}(.\,, y)\, \nu_j(dy)$; $j = 1, 2$, est une fonction réelle continue et bornée sur X_0, où G_{X_0} est la fonction de Green associée au laplacien sur X_0. On suppose de plus que

$$\|G^{\nu_1}_{X_0}\|_\infty \,.\, \|G^{\nu_2}_{X_0}\|_\infty < 1.$$

Définition 2.1: *Soit f une fonction mesurable sur X.*
Pour $U \in \mathcal{U}_1$, on définit le noyau S_U par

$$S_U f := (H_{\pi(U)}(f \circ i_1)) \circ \pi + (K^{\nu_1}_{\pi(U)}(f \circ i_2)) \circ \pi.$$

Pour $U \in \mathcal{U}_2$, on définit le noyau S_U par

$$S_U f := (H_{\pi(U)}(f \circ i_2)) \circ \pi + (K^{\nu_2}_{\pi(U)}(f \circ i_1)) \circ \pi.$$

Avec $H_{\pi(U)}$ est le noyau de Poisson associé à $\pi(U)$ et

$$K^{\nu_i}_{\pi(U)}\, g = \int_{\pi(U)} G_{\pi(U)}(.\,, y).\ g(y)\, d\nu_i(y); \quad i = 1, 2,$$

où $g \in B(X)$ et $G_{\pi(U)}$ est la fonction de Green associée à $\pi(U)$ relativement à l'opérateur Δ. Soit (X, H) la structure harmonique associée à $(S_U)_{U \in \mathcal{U}}$ (voir [7], [12]).

Lemme 2.1: *Si f est une fonction positive et harmonique par rapport à $(S_U)_{U \in \mathcal{U}}$, alors $K^{\nu_i}_{X_0}(f \circ i_k)$ est fini; $i, k \in \{1, 2\}$, $i \neq k$.*

Preuve: Soit $(B_n)_n$ une suite de boules ouvertes croissantes telles que $X_0 = \cup B_n$.

Comme f est harmonique par rapport à $(S_U)_{U \in \mathcal{U}}$, alors, si on pose $B_n = B(x_n, r_n)$ et $W_{n,j} = i_j(B_n)$, avec $x_n \in X_0$ et $r_n > 0$; $j = 1, 2$, on a

$$S_{W_{n,j}} f = f.$$

D'où, pour $j, k \in \{1, 2\}$, $j \neq k$,

$$f = (H_{\pi(W_{n,j})}(f \circ i_j)) \circ \pi + (K^{\nu_j}_{\pi(W_{n,j})}(f \circ i_k)) \circ \pi.$$

Par suite

$$f \circ i_j = H_{B_n}(f \circ i_j) + K^{\nu_j}_{B_n}(f \circ i_k).$$

Puisque $f \geqslant 0$, alors

$$K^{\nu_j}_{B_n}(f \circ i_k) \leqslant f \circ i_j, \quad \text{pour tout} \quad n \in \mathbb{N}.$$

D'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on a $K^{\nu_j}_{X_0}(f \circ i_k) \leqslant f \circ i_j$. Comme f est harmonique alors $f \circ i_j$ est finie et donc $K^{\nu_j}_{X_0}(f \circ i_k)$ est fini.

Proposition 2.1: *Soit f une fonction localement λ-intégrable sur X telle que $K^{\nu_j}_{X_0}(f \circ i_k)$, $j \neq k$, est fini. Alors Les deux propriétés suivantes sont équivalentes:*

(1) *Pour tout $U \in \mathcal{U}$, $S_U f = f$.*

(2) *Les fonctions $(f \circ i_2 - K^{\nu_2}_{X_0}(f \circ i_1))$ et $(f \circ i_1 - K^{\nu_1}_{X_0}(f \circ i_2))$ sont harmoniques au sens classique.*

Preuve: (1) $\Rightarrow$ (2): Soit f une fonction localement λ-intégrable sur X telle que, pour tout $U \in \mathcal{U}$, $S_U f = f$. Soient $y' \in X_0$ et $\varepsilon > 0$. Considérons $W_j = i_j(B(y', \varepsilon)) \in \mathcal{U}_j$; $j = 1, 2$. Pour $j, k \in \{1, 2\}$, $j \neq k$, On a

$$(f \circ i_j)(z) = H_{\pi(W_j)}(f \circ i_j)(z) + K^{\nu_j}_{\pi(W_j)}(f \circ i_k)(z), \quad \text{pour tout} \quad z \in X_0.$$

Donc

$$(f \circ i_j)(z) = H_{B(y', \varepsilon)}(f \circ i_j)(z) + K^{\nu_j}_{B(y', \varepsilon)}(f \circ i_k)(z).$$

Il en résulte que la fonction $g := (f \circ i_j - K^{\nu_j}_{B(y', \varepsilon)}(f \circ i_k))$ est harmonique sur la boule $B(y', \varepsilon)$ pour tout $y' \in X_0$ et $\varepsilon > 0$ tel que $\overline{B}(y', \varepsilon) \subset X_0$. Comme $K^{\nu_j}_{B(y', \varepsilon)}(f \circ i_k) = K^{\nu_j}_{X_0}(f \circ i_k) - H_{B(y', \varepsilon)}(K^{\nu_j}_{X_0}(f \circ i_k))$, alors $f \circ i_j - K^{\nu_j}_{X_0}(f \circ i_k) = g - H_{B(y', \varepsilon)}(K^{\nu_j}_{X_0}(f \circ i_k))$ sur $B(y', \varepsilon)$. Et par suite $(f \circ i_j - K^{\nu_j}_{X_0}(f \circ i_k))$ est une fonction harmonique sur X_0.

(2) $\Rightarrow$ (1): Soit maintenant f une fonction localement λ-intégrable sur X_0 telle que les fonctions $(f \circ i_2 - K^{\nu_2}_{X_0}(f \circ i_1))$ et $(f \circ i_1 - K^{\nu_1}_{X_0}(f \circ i_2))$ sont harmoniques sur X_0. Soient $x' \in X_0$ et $\varepsilon > 0$ tels que $\overline{B}(x', \varepsilon) \subset X_0$ et soient $j, k \in \{1, 2\}$, $j \neq k$. Puisque $(f \circ i_j - K^{\nu_j}_{X_0}(f \circ i_k))$ est harmonique sur X_0, on a, pour tout $z \in X_0$,

$$H_{B(x', \varepsilon)}(f \circ i_j - K^{\nu_j}_{X_0}(f \circ i_k))(z) = (f \circ i_j - K^{\nu_j}_{X_0}(f \circ i_k))(z).$$

Comme

$$K^{\nu_j}_{B(x',\,\varepsilon)}(f\circ i_k)(z) = K^{\nu_j}_{X_0}(f\circ i_k)(z) - H_{B(x',\,\varepsilon)}K^{\nu_j}_{X_0}(f\circ i_k)(z).$$

Alors

$$f\circ i_j(z) = H_{B(x',\,\varepsilon)}(f\circ i_j)(z) + K^{\nu_j}_{B(x',\,\varepsilon)}(f\circ i_k)(z).$$

Autrement dit

$$S_U f = f \quad \forall\, U \in \mathcal{U}_1.$$

Par suite f est harmonique par rapport aux noyaux $(S_U)_{U\in\mathcal{U}}$.

COROLLAIRE 2.1: *Si f est une fonction harmonique par rapport à $(S_U)_{U\in\mathcal{U}}$ telle que $K^{\nu_1}_{X_0}(f\circ i_2) < \infty$ avec $\nu_1 = \lambda^d$, $\nu_2 = 0$, alors $(f\circ i_1)$ est biharmonique au sens classique, i.e., $\Delta^2(f\circ i_1) = 0$, au sens des distributions.*

PREUVE: On note $K_{X_0} = K^{\lambda^d}_{X_0}$. Puisque, f est harmonique par rapport à $(S_U)_{U\in\mathcal{U}}$, on a, d'après la proposition (2.1), $(f\circ i_1 - K_{X_0}(f\circ i_2))$ est harmonique au sens classique. Donc $\Delta(f\circ i_1) = \Delta(K_{X_0}(f\circ i_2))$. Or $\Delta(K_{X_0}(f\circ i_2))(z) = -(f\circ i_2)(z)$, $z\in X_0$. D'où $\Delta^2(f\circ i_1) = \Delta(f\circ i_2) = 0$.

Dans tout ce paragraphe, r est une fonction définie sur X vers $]0,+\infty[$ telle que $\overline{B}(x_0, r(x_0, j)) \subset X_0$, pour tout $x_0 \in X_0$; $j = 1, 2$. On suppose de plus que r est localement bornée loin de zéro sur X, i.e., $\mathit{inf}\, r(K) > 0$, pour tout compact K de X. Soient $x_0 \in X_0$ et $x = (x_0, j)$; $j = 1, 2$. Nous définissons la moyenne restreinte d'une fonction f sur X, $\mu_{x,\,r(x)}(f)$ par:

$$\mu_{x,\,r(x)}(f) := \mu_{x,\,r(x),\,1}(f\circ i_1), \quad \text{si} \quad x = (x_0, 1)$$

$$\mu_{x,\,r(x)}(f) := \mu_{x,\,r(x),\,2}(f\circ i_2), \quad \text{si} \quad x = (x_0, 2).$$

Avec

$$\mu_{x,\,r(x),\,1}(f\circ i_1) := \frac{d}{r(x)^d}\int_0^{r(x)} s^{d-1} S_{i_1(B(x_0,\,s))}(f\circ i_1)(x)\, ds.$$

$$\mu_{x,\,r(x),\,2}(f\circ i_2) := \frac{d}{r(x)^d}\int_0^{r(x)} s^{d-1} S_{i_2(B(x_0,\,s))}(f\circ i_2)(x)\, ds.$$

Ainsi $\mu_{x,\,r(x)}$ s'identifie à un couple de mesures $(\mu_{x,\,r(x),\,1}, \mu_{x,\,r(x),\,2})$. On considère une fonction h positive et harmonique par rapport à $(S_U)_{U\in\mathcal{U}}$ sur X fixée vérifiant:

(a) $h\circ i_1 \geqslant 1$,

(b) $h\circ i_2 \geqslant 1$,

(c) il existe deux fonctions harmoniques au sens classique g_1 et g_2 sur X_0, telles que $h\circ i_1 \leqslant g_1$ et $h\circ i_2 \leqslant g_2$.

Remarque 2.1: (1) *Notons que le noyau* $P(x,.) = \dfrac{h}{h(x)} \cdot \mu_{x,\, r(x)}$ *est un noyau Markovien sur X.*

(2) *On a pour* $x=(x_0, j)$; $j=1, 2$ *et* $x_0 \in X_0$:

$$\mu_{x,\, r(x),\, 1}(f \circ i_1) = \frac{d}{r(x)^d} \int_0^{r(x)} s^{d-1} H_{B(x_0,\, s)}(f \circ i_1)(x_0)\, ds + \\ + \frac{d}{r(x)^d} \int_0^{r(x)} s^{d-1} K^{\nu_1}_{B(x_0,\, s)}(f \circ i_2)(x_0)\, ds.$$

$$\mu_{x,\, r(x),\, 2}(f \circ i_2) = \frac{d}{r(x)^d} \int_0^{r(x)} s^{d-1} H_{B(x_0,\, s)}(f \circ i_2)(x_0)\, ds + \\ + \frac{d}{r(x)^d} \int_0^{r(x)} s^{d-1} K^{\nu_2}_{B(x_0,\, s)}(f \circ i_1)(x_0)\, ds.$$

Définition 2.2: *Soit f une fonction mesurable sur X telle que* $|f| \leq h$. *f est dite r*-**bimédiane** *si* $\mu_{x,\, r(x)}(f) = f(x)$, *pour tout* $x \in X$.

Théorème 2.1: *Soit f une fonction mesurable sur X telle que* $|f| \leq h$ *et f est r-bimédiane. Alors f est harmonique relativement à la structure harmonique donnée par* $(S_U)_{U \in \mathfrak{U}}$ *sur X.*

Preuve: Notons d'abord que $K^{\nu_j}_{X_0}(f \circ i_k)$, $j \neq k$, est fini. Pour montrer que f est une fonction harmonique, il suffit de montrer, d'après la proposition (2.1), que $f \circ i_2 - K^{\nu_2}_{X_0}(f \circ i_1)$ et $(f \circ i_1) - K^{\nu_1}_{X_0}(f \circ i_2)$ sont harmoniques au sens classique.

On a

$$f(x) = \mu_{x,\, r(x)}(f), \quad \text{pour tout} \quad x \in X,\ x=(x_0, j);\ \ j=1, 2,\ \ x_0 \in X_0.$$

Donc, pour $j, k \in \{1, 2\}$, $j \neq k$, on a

$$(f \circ i_j)(x_0) = \frac{d}{r(x)^d} \int_0^{r(x)} s^{d-1} H_{B(x_0,\, s)}(f \circ i_j)(x_0)\, ds + \frac{d}{r(x)^d} \int_0^{r(x)} s^{d-1} K^{\nu_j}_{B(x_0,\, s)}(f \circ i_k)(x_0)\, ds,$$

pour tout $x_0 \in X_0$. Par suite,

$$f \circ i_j(x_0) - K^{\nu_j}_{X_0}(f \circ i_k)(x_0) = \frac{d}{r(x)^d} \int_0^{r(x)} s^{d-1} H_{B(x_0,\, s)}(f \circ i_j)(x_0)\, ds + \\ + \frac{d}{r(x)^d} \int_0^{r(x)} s^{d-1} K^{\nu_j}_{B(x_0,\, s)}(f \circ i_k)(x_0)\, ds - \frac{d}{r(x)^d} \int_0^{r(x)} s^{d-1} K^{\nu_j}_{X_0}(f \circ i_k)(x_0)\, ds.$$

Or

$$K^{\nu_j}_{B(x_0,\,s)}(f\circ i_k) = K^{\nu_j}_{X_0}(f\circ i_k) - H_{B(x_0,\,s)}(K^{\nu_j}_{X_0}(f\circ i_k)).$$

Donc

$$(f\circ i_j)(x_0) - K^{\nu_j}_{X_0}(f\circ i_k)(x_0) = \frac{d}{r(x)^d}\int_0^{r(x)} s^{d-1} H_{B(x_0,\,s)}(f\circ i_j - K^{\nu_j}_{X_0}(f\circ i_k))(x_0)\,ds.$$

Il en résulte que $(f\circ i_j - K^{\nu_j}_{X_0}(f\circ i_k))$ vérifie la propriété de moyenne restreinte au sens de [13].

De la preuve du lemme 2.1, on a $K^{\nu_j}_{X_0}(h\circ i_k)\leqslant h\circ i_j$. De plus,

$$\begin{aligned}|f\circ i_j - K^{\nu_j}_{X_0}(f\circ i_k)| &\leqslant |f\circ i_j| + |K^{\nu_j}_{X_0}(f\circ i_k)|\\ &\leqslant h\circ i_j + K^{\nu_j}_{X_0}(h\circ i_k)\\ &\leqslant 2(h\circ i_j).\end{aligned}$$

Ainsi la fonction $f\circ i_j - K^{\nu_j}_{X_0}(f\circ i_k)$ est φ_j-bornée avec $\varphi_j = 2(h\circ i_j)$. Et puisque $r\circ i_j$ est localement bornée loin de zéro alors, d'après [13], la fonction $f\circ i_j - K^{\nu_j}_{X_0}(f\circ i_k)$ est harmonique sur X_0 au sens classique.

Remarque 2.2: *Les résultats précédents restent valables si on considère le système*

$$\begin{cases} L_1 u = -v\,.\,\nu_1\\ L_2 v = -u\,.\,\nu_2,\end{cases}$$

où L_i; $i = 1, 2$, *sont deux opérateurs elliptiques du second ordre pour lesquels toute boule* $B\subset \overline{B}\subset X_0$ *est* L_i*-réguliére. Comme exemple, on peut considérer les opérateurs elliptiques etudiés par R.M. Hervé (voir [17]). En effet, si on note,* G^{L_i} *la fonction de Green sur l'espace harmonique* (X_0, H_{L_i}); $i = 1, 2$, *associé à* L_i *et on suppose que* $G^{\nu_i}_{L_i} = \int_{X_0} G^{L_i}(.\,, y)\,d\nu_i(y)$; $i = 1, 2$, *est une fonction continue bornée de* X_0 *et* $\|G^{\nu_1}_{L_1}\|_\infty\,.\,\|G^{\nu_2}_{L_2}\|_\infty < 1$, *alors tous les résultats obtenus pour les noyaux* $(S_U)_{U\in\mathcal{U}}$ *resteront vrais pour les noyaux* $(S'_U)_{U\in\mathcal{U}}$ *definis, pour une fonction f mesurable sur X, par:*

Pour $U\in\mathcal{U}_1$,

$$S'_U f := (H^1_{\pi(U)}(f\circ i_1))\circ\pi + (K^{\nu_1, L_1}_{\pi(U)}(f\circ i_2))\circ\pi.$$

Pour $U\in\mathcal{U}_2$,

$$S'_U f := (H^2_{\pi(U)}(f\circ i_2))\circ\pi + (K^{\nu_2, L_2}_{\pi(U)}(f\circ i_1))\circ\pi.$$

Avec $(H_U^i)_{U \in \mathfrak{U}}$; $i = 1, 2$, *les noyaux harmoniques associés à* (X_0, H_{L_i}) *et*

$$K_{\pi(U)}^{\nu_i, L_i} g = \int_{B(x_0, s)} G_{B(x_0, s)}^{L_i}(. , y)\, g(y)\, d\nu_i(y).$$

Dans le cas où $\nu_1 = \lambda^d$, $\nu_2 = 0$, on a

Corollaire 2.2: *Si f est une fonction r-bimédiane sur X telle que la fonction* $(f \circ i_2)$ *est harmonique sur* X_0, *au sens classique, alors il existe une constante c telle que*

$$\textbf{(V)} \quad A(x_0, r(x_0, 1), f \circ i_1) - (f \circ i_1)(x_0) = c(r(x_0, 1))^2 (f \circ i_2)(x_0),$$

où $A(x_0, r(x_0, 1), f \circ i_1)$ *est la moyenne de* $f \circ i_1$ *sur* $B(x_0, r(x_0, 1))$.

Preuve: Puisque f est r-bimédiane, on a pour $x = (x_0, 1)$,

$$(f \circ i_1)(x_0) = \lambda_{x, r(x)}(f \circ i_1) + \frac{d}{r(x)^d} \int_0^{r(x)} s^{d-1} K_{B(x_0, s)}(f \circ i_2)(x_0)\, ds.$$

Et par suite

$$A(x_0, r(x), f \circ i_1) - f \circ i_1(x_0) = \frac{-d}{r(x)^d} \int_0^{r(x)} s^{d-1} K_{B(x_0, s)}(f \circ i_2)(x_0)\, ds.$$

Il suffit alors de calculer la dernière intégrale. On a

$$\begin{aligned} I &= \frac{-d}{r(x)^d} \int_0^{r(x)} s^{d-1} K_{B(x_0, s)}(f \circ i_2)(x_0)\, ds, \\ &= \frac{-d}{r(x)^d} \int_0^{r(x)} s^{d-1} \left(\int_{B(x_0, s)} G^{B(x_0, s)}(x_0, y)(f \circ i_2)(y)\, dy \right) ds, \\ &= \frac{-d}{r(x)^d} \int_0^{r(x)} s^{d-1} \left(\int_{B(x_0, s)} (f \circ i_2)(y) \|x_0 - y\|^{2-d}\, dy \right) ds \\ &\quad + \frac{d}{r(x)^d} \int_0^{r(x)} s^{d-1} \left(\int_{B(x_0, s)} s^{2-d} (f \circ i_2)(y)\, dy \right) ds. \end{aligned}$$

Comme $f \circ i_2$ est harmonique, au sens classique, sur X_0 alors

$$I = \frac{-d}{r(x)^d} \int_0^{r(x)} s^{d-1} \left(\int_{B(x_0,\, s)} (f \circ i_2)(y) \|x_0 - y\|^{2-d} dy \right) ds + \\ + \frac{d(f \circ i_2)(x_0)}{r(x)^d} \int_0^{r(x)} s\lambda(B(x_0,\, s))\, ds.$$

Donc

$$I = \frac{-d}{r(x)^d} \int_0^{r(x)} s^{d-1} \left(\int_{B(x_0,\, s)} (f \circ i_2)(y) \|x_0 - y\|^{2-d} dy \right) ds + \frac{4\pi}{(d+2)} r(x)^2 (f \circ i_2)(x_0).$$

Calculons l'intégrale

$$I_1 = \int_{B(x_0,\, s)} (f \circ i_2)(y) \|x_0 - y\|^{2-d} dy.$$

On a

$$I_1 = \lambda(B(x_0,\, s))\, A(x_0,\, s, (f \circ i_2) \|x_0 - .\, \|^{2-d}),$$

où

$$\begin{aligned} A(x_0,\, s, (f \circ i_2) \|x_0 - .\, \|^{2-d}) &= ds^{-d} \int_0^s t^{d-1} M(x_0,\, t, (f \circ i_2) \|x_0 - .\, \|^{2-d})\, dt \\ &= ds^{-d} \int_0^s t^{d-1} \left(\int_{S(x_0,\, t)} (f \circ i_2(y)) \|x_0 - y\|^{2-d} d\sigma(y) \right) dt \\ &= ds^{-d} \int_0^s t^{d-1} t^{2-d} (f \circ i_2)(x_0)\, dt \\ &= ds^{-d} \left(\int_0^s t dt \right) (f \circ i_2)(x_0) \\ &= \frac{d}{2} s^{2-d} (f \circ i_2)(x_0). \end{aligned}$$

En remplaçant dans I_1, on aura

$$I_1 = \lambda(B(x_0),\, s)\, \frac{d}{2} s^{2-d} (f \circ i_2)(x_0) = (2\pi s^2)(f \circ i_2)(x_0).$$

Et par suite

$$I = \frac{-d}{r(x)^d} \int_0^{r(x)} s^{d-1} 2\pi s^2 (f \circ i_2)(x_0)\, ds + (4\pi(d+2)^{-1})\, r(x)^2 (f \circ i_2)(x_0).$$

$$= \frac{-2\pi d}{(d+2)} r(x)^2 (f \circ i_2)(x_0) + \frac{4\pi}{(d+2)} r(x)^2 (f \circ i_2)(x_0).$$

Donc

$$A(x_0,\, r(x), f \circ i_1) - (f \circ i_1)(x_0) = cr(x)^2 (f \circ i_2)(x_0). \quad \text{Avec} \quad c = 2\pi(2-d)(2+d)^{-1}.$$

Remarque 2.3: *Ce corollaire peut être obtenu à partir du développement d'Almansi* [1]. (*Voir paragraphe* 3).

Application: Soit X un espace topologique localement compact à base dénombrable. Un espace biharmonique (X, H), au sens de [8], est caractérisé par la donnée de deux espaces harmoniques (X, H^1) et (X, H^2) ayant une base d'ouverts réguliers commune et d'une section positive de potentiels, continus et réels $(P_V)_V$ sur (X, H^1) telle que $H(U) = \{(h_1, h_2) \in C(U) \times C(U)\colon\ H_V^1 h_1 + K_V H_V^2 h_2 = h_1$ et $H_V^2 h_2 = h_2$, $\forall V \in \mathcal{U}_r(U)\}$, où H_V^i $(i = 1, 2)$ désigne le noyau harmonique sur V pour l'espace harmonique (X, H^i) et K_V le noyau de potentiel associé à P_V. $\mathcal{U}_r(U)$ est l'ensemble des ouverts réguliers V (pour le problème de Dirichlet) tel que $\overline{V} \subset U$ et U est un ouvert de X. Dans notre cas X est un domaine borné de $\mathbb{R}^d$ et l'espace biharmonique qu'on considère est donné par:

$$H(U) = \{(h_1,\, h_2) \in C(U) \times C(U) : \Delta h_1 = -h_2,\ \Delta h_2 = 0\}.$$

Considérons les mesures suivantes:

$$\begin{cases} \mu_{x,\, r(x),\, 1}(f) := \dfrac{d}{r(x)^d} \displaystyle\int_0^{r(x)} s^{d-1} H_{B(x,\, s)} f_1(x)\, ds + \dfrac{d}{r(x)^d} \displaystyle\int_0^{r(x)} s^{d-1} K_{B(x,\, s)} f_2(x)\, ds, \\ \mu_{x,\, r(x),\, 2}(f) := \dfrac{d}{r(x)^d} \displaystyle\int_0^{r(x)} s^{d-1} H_{B(x,\, s)} f_2(x)\, ds, \end{cases}$$

où $f = (f_1, f_2)$ est un couple de fonctions numériques mesurables.

On dit que $f = (f_1, f_2)$ est r-**bimédiane** si $\mu_{x,\, r(x)}(f) = f(x)$, pour tout $x \in X$. Avec

$\mu_{x,\,r(x)} = (\mu_{x,\,r(x),\,1}, \mu_{x,\,r(x),\,2})$ et r est une fonction localement bornée loin de zéro sur X telle que $0 < r < dist(.\,, \mathbb{R}^d \setminus X)$. Soit $h = (h_1, h_2)$ un couple de fonctions numériques tels que h soit biharmonique vérifiant:

(i) $h_1 \geqslant 1$, $h_2 \geqslant 1$,

(ii) il existe une fonction h_0, harmonique au sens classique, telle que $h_1 \leqslant \leqslant h_0$.

THÉORÈME 2.2: *Si un couple de fonctions* $f = (f_1, f_2)$ *est h-bornée et r-bimédiane alors f est biharmonique sur X.*

3. - PROPRIÉTÉ DE MOYENNE ET DÉVELOPPEMENT D'ALMANSI

Soient u une fonction biharmonique sur un domaine $D \subset \mathbb{R}^n$ et $x_0 \in D$. Alors on a le développement d'Almansi (voir [1])

$$u(x) = h_{1,\,x_0}(x) + \|x - x_0\|^2 h_{2,\,x_0}(x),$$

pour tout $x \in D_{x_0}$. Où D_{x_0} est le plus grand domaine étoilé centré en x_0 inscrit dans D et $h_{1,\,x_0}$, $h_{2,\,x_0}$ sont des fonctions harmoniques sur D. Notons aussi que dans [4, 5], on définit les fonctions biharmoniques sur un domaine Ω de $\mathbb{R}^d$, $d \geqslant 1$, comme des fonctions localement λ-intégrables w vérifiant la propriété de moyenne biharmonique suivante:

$$A(x, r, w) - w(x) = r^2 h_2(x) \quad \text{pour tout} \quad x \in \Omega \quad \text{tel que} \quad \overline{B}(x, r) \subset \Omega,$$

où $A(x, r, w)$ est la moyenne de w sur $B(x, r)$ et h_2 est une fonction harmonique, au sens classique, sur Ω.

PROPOSITION 3.1: *Soit w une fonction continue sur un domaine borné* Ω *de* $\mathbb{R}^d$, $d \geqslant \geqslant 1$. *S'il existe deux fonctions* h_1, h_2 *harmoniques sur* Ω *telles que pour tout* $x_0 \in \Omega$ *et tout* $r > 0$ *tels que* $\overline{B}(x_0, r) \subset D_{x_0} \subset \Omega$, *on a*

$$w(x) = \|x - x_0\|^2 h_1(x) + h_2(x)$$

pour tout $x \in D_{x_0}$ *où* D_{x_0} *est le plus grand domaine étoilé centré en* x_0 *inscrit dans* D. *Alors*

$$M(x_0, r, w) - w(x_0) = r^2 h_1(x_0).$$

PREUVE: On a

$$w(x) = \|x - x_0\|^2 h_1(x) + h_2(x), \quad \forall x \in D_{x_0}.$$

Donc

$$w(x_0) = h_2(x_0).$$

Par suite

$$M(x_0, r, w) = (\sigma(S_{x_0, r}))^{-1} \int_{\|x - x_0\| = r} \|x - x_0\|^2 h_1(x)\, d\sigma(x) + h_2(x_0) =$$

$$= r^2 M(x_0, r, h_1) + w(x_0) = r^2 h_1(x_0) + w(x_0).$$

Donc

$$M(x_0, r, w) - w(x_0) = r^2 h_1(x_0).$$

REMARQUE 3.1: *Soit f une fonction harmonique par rapport à $(S_U)_{U \in \mathcal{U}}$. Pour $\nu_1 = \lambda^d$ et $\nu_2 = 0$, alors $f \circ i_1$ est biharmonique au sens classique. Donc, d'après le développement d'Almansi, il existe deux fonctions harmoniques h_1, h_2 sur X_0 telles que, pour tout $x_0 \in X_0$, et tout $r > 0$, $\overline{B}(x_0, r) \subset D_{x_0} \subset X_0$, on a*

$$(f \circ i_1)(x) = \|x - x_0\|^2 h_1(x) + h_2(x), \quad \forall x \in D_{x_0}.$$

D'après la proposition (3.1)

$$M(x_0, r, f \circ i_1) - f \circ i_1(x_0) = r^2 h_1(x_0).$$

Puisque

$$A(x_0, r, f \circ i_1) = \frac{d}{r^d} \int_0^r s^{d-1} M(x_0, r, f \circ i_1)\, ds.$$

Alors

$$A(x_0, r, f \circ i_1) - (f \circ i_1)(x_0) = d(d+2)^{-1} r^2 h_1(x_0).$$

D'aprés le corollaire (2.2) *on a*

$$c(f \circ i_2)(x_0) = d(d+2)^{-1} h_1(x_0).$$

Donc

$$h_1(x_0) = c(d+2)\, d^{-1} (f \circ i_2)(x_0) \quad \text{et} \quad h_2(x_0) = (f \circ i_1)(x_0).$$

4. - PROPRIÉTÉ DE MOYENNE RESTREINTE SUR UN DOMAINE DE GREEN NON BORNÉ

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons à l'étude de la propriété de moyenne restreinte pour les fonctions bi-médianes positives sur un domaine de Green non nécessairement borné X de $\mathbb{R}^d$ en utilisant les noyaux matriciels. En effet, soit $\mathcal{U}$ une base d'ouverts relativement compacts de X et H_U, $U \in \mathcal{U}$, les noyaux harmoniques classiques associés. Soient ν_1, ν_2 deux mesures de Kato positives globales sur X telles que $\|G_{X_0}^{\nu_1}\|_\infty . \|G_{X_0}^{\nu_2}\|_\infty < 1$ et $(K_U^{\nu_i})_{U\in\mathcal{U}}$; i=1,2, la famille de noyaux de potentiels définis par:

$$K_U^{\nu_i}(f) = \int_U G^U(.\,,t).\,f(t)\,d\nu_i(t); \quad i = 1\,,2\,.$$

On a $(K_U^{\nu_i})_{U\in\mathcal{U}}$ est une famille de noyaux compatibles sur X. Donc, d'après [12], il existe un et un seul noyau de potentiel $K_X^{\nu_i}$; $i = 1\,,2$, sur X tel que

$$K_U^{\nu_i} = K_X^{\nu_i} - H_U K_X^{\nu_i}, \qquad \text{pour tout } U \in \mathcal{U}\,.$$

Soit r une fonction mesurable strictement positive sur X telle qu'il existe un nombre reél positif ε et une fonction lipshitizienne ϱ sur X, de constante de Lipshitz 1, majorée par $dist(.\,,\partial X)$ avec:

$$\varepsilon\varrho \leqslant r \leqslant (1-\varepsilon)\,\varrho\,.$$

Nous considérons le noyau T sur $X \times X$ défini par:

$$T = \begin{pmatrix} N & R_1 \\ R_2 & N \end{pmatrix}.$$

Où

$$Ng(x) = \frac{d}{r(x)^d}\int_0^{r(x)} s^{d-1} H_{B(x,\,s)}\, g(x)\, ds\,.$$

$$R_i\, g(x) = \frac{d}{r(x)^d}\int_0^{r(x)} s^{d-1} K_{B(x,\,s)}^{\nu_i}\, g(x)\, ds; \quad i = 1\,,2$$

Pour toute fonction g mesurable positive sur X et pour tout $x \in X$.

Remarque 4.1: 1) *Soit* $f = (f_1\,,f_2)$ *un couple de fonctions mesurables positives sur X. La relation* $T(f_1\,,f_2) = (f_1\,,f_2)$ *est équivalente à la propriété de moyenne restreinte suivante:*

$$f_1(x) = \frac{d}{r(x)^d}\int_0^{r(x)} s^{d-1} H_{B(x,\,s)} f_1(x)\, ds + \frac{d}{r(x)^d}\int_0^{r(x)} s^{d-1} K_{B(x,\,s)}^{\nu_1} f_2(x)\, ds\,,$$

$$f_2(x) = \frac{d}{r(x)^d} \int_0^{r(x)} s^{d-1} H_{B(x,s)} f_2(x)\, ds + \frac{d}{r(x)^d} \int_0^{r(x)} s^{d-1} K_{B(x,s)}^{\nu_2} f_1(x)\, ds\,,$$

pour tout $x \in X$.;

2) *On a*,

$$R_j g(x) = \begin{cases} K_X^{\nu_j} g(x) - N(K_X^{\nu_j} g)(x) & si\ K_X^{\nu_j} g < +\infty \\ +\infty & K_X^{\nu_j} g = +\infty\,. \end{cases}$$

DÉFINITION 4.1: *Un couple* (s_1, s_2) *de fonctions numériques mesurables positives sur X est dit T-bi-surmédiane si*

$$T(s_1, s_2) \leqslant (s_1, s_2).$$

Un couple (s_1, s_2) *de fonctions numériques mesurables positives localement* λ*-intégrables telles que* $s_1 \neq s_2$ *est dit T-bi-invariant si*

$$T(s_1, s_2) = (s_1, s_2)\,.$$

THÉORÈEME 4.1: *Soit* (s_1, s_2) *un couple T-bi-surmédiane. Alors ou bien* $(s_1, s_2) = (+\infty, +\infty)$ *ou bien* s_1 *et* s_2 *sont localement* λ*-intégrables.*

PREUVE: Soient $j, k \in \{1, 2\}$, $j \neq k$. Puisque (s_1, s_2) est un couple T-bi-surmédiane alors, $Ns_j \leqslant R_j s_k + Ns_j \leqslant s_j$. Par suite s_1 et s_2 sont N-surmédianes. D'après [10, théorème 1.2.f], $s_j = +\infty$ ou bien s_j est localement λ-intégrable. Comme $Ns_j + R_j s_k \leqslant s_j$, alors on ne peut pas avoir $s_k = +\infty$ et s_j est localement λ-intégrable. D'où le résultat énnoncé.

DÉFINITION 4.2: *Comme dans* [10], *nous considérons:*

$$\phi(x, y) = (\lambda(B(x, r(x))))^{-1} .\ \chi_{B(x, r(x))}(y)$$

$$\phi^1(x, y) = \phi(x, y)$$

$$\phi^{n+1}(x, y) = \int_X \phi^n(x, \xi)\, \phi(\xi, y)\, d\lambda(\xi)\,.$$

On a ainsi, pour toute fonction mesurable positive sur X,

$$N^n f(x) = \int_X \phi^n(x, y)\, f(y)\, d\lambda(y)\,.$$

Soit $G_N = \sum_{n=0}^{\infty} N^n$. On a les relations classiques suivantes: $N .\ G_N = G_N .\ N$ et $N .\ G_N + I = G_N$.

LEMME 4.1: *Si* (h_1, h_2) *est un couple T-bi-invariant alors, pour* $j, k \in \{1, 2\}, j \neq k$, *la fonction*

$$f_j = \begin{cases} h_j - G_N R_j h_k & si \ h_j < +\infty \\ +\infty & si \ h_j = +\infty \end{cases}$$

est une fonction positive localement λ*-intégrable sur* $\{h_j < \infty\}$.

PREUVE: Soient $j, k \in \{1, 2\}, j \neq k$. Puisque le couple (h_1, h_2) est T-bi-invariant, alors $h_j = Nh_j + R_j h_k$. Donc

$$h_j - G_N R_j h_k = h_j - G_N(h_j - Nh_j).$$

D'après [10, lemme 1.6],

$$h_j = G_N(h_j - Nh_j) + \lim_{n \to +\infty} N^n h_j.$$

Ainsi

$$h_j - G_N R_j h_k = \lim_{n \to +\infty} N^n h_j \geqslant 0.$$

Par suite la fonction $h_j - G_N R_j h_k$ est une fonction positive. Comme $0 \leqslant h_j - G_N R_j h_k \leqslant h_j$ et h_j est une fonction localement λ-intégrable, alors $h_j - G_N R_j h_k$ est une fonction localement λ-intégrable sur $\{h_j < \infty\}$.

Dans tout ce qui suit, $(\mathcal{G}_U)_{U \in \mathcal{U}}$ sera la famille de noyaux harmoniques définis sur $X \times X$ par:

$$\mathcal{G}_U(g_1, g_2) = (\mathcal{G}_U^1 g_1, \mathcal{G}_U^2 g_2).$$

Avec

$$\mathcal{G}_U^j g_j = H_U g_j + K_U^{\nu_j} g_k; \qquad j, k \in \{1, 2\}, \qquad j \neq k.$$

Où g_j; $j = 1, 2$, est une fonction mesurable positive sur X.

LEMME 4.2: *Si* $h = (h_1, h_2)$ *est un couple de fonctions localement* λ*-intégrables sur* X *telle que* h *est harmonique par rapport à* $(\mathcal{G})_{U \in \mathcal{U}}$, *alors pour tout* $U \in \mathcal{U}$ *et pour tout* $x \in X$ *tels que* $\overline{B}(x, r(x)) \subset U$, *on a* $Th(x) = h(x)$.

PREUVE: Soient $j, k \in \{1, 2\}, j \neq k$ et soit $U \in \mathcal{U}$. On a, $h_j = H_U h_j + K_U^{\nu_j} h_k$. Donc $h_j - K_U^{\nu_j} h_k$ est harmonique sur U. Par suite, d'aprés [10, lemme 4.12],

$$N(h_j - K_U^{\nu_j} h_k)(x) = h_j(x) - K_U^{\nu_j} h_k(x)$$

pour tout $x \in X$ tel que $\overline{B}(x, r(x)) \subset U$.

Donc

$$h_j(x) = Nh_j(x) - NK_U^{\nu_j} h_k(x) + K_U^{\nu_j} h_k(x)$$

pour tout $x \in X$ tel que $\overline{B}(x, r(x)) \subset U$. Il reste à montrer que

$$R_j h_k(x) = K_U^{\nu_j} h_k(x) - N(K_U^{\nu_j} h_k)(x)$$

pour tout $x \in X$ tel que $\overline{B}(x, r(x)) \subset U$. De la définition de R_j, On a

$$R_j h_k(x) = K_X^{\nu_j} h_k(x) - N(K_X^{\nu_j}(h_k)(x)).$$

Or

$$K_X^{\nu_j} h_k(x) = K_U^{\nu_j} h_k(x) + H_U(K_X^{\nu_j} h_k)(x)\,.$$

Donc

$$(1)\quad R_j h_k(x) = K_U^{\nu_j} h_k(x) + H_U(K_X^{\nu_j} h_k)(x) - N(K_U^{\nu_j} h_k)(x) - N(H_U K_X^{\nu_j} h_k)(x).$$

Puisque $H_U(K_X^{\nu_j} h_k)$ est harmonique sur U, alors, d'après [10, lemme 4.12],

$$(2)\quad N(H_U K_X^{\nu_j} h_k)(x) = H_U(K_X^{\nu_j} h_k)(x).$$

En remplaçant (2) dans (1) on aura le résultat.

THÉORÈME 4.2: *Tout couple bi-invariant est harmonique par rapport à* $(\mathcal{G})_{U \in \mathcal{U}}$.

PREUVE: On a la fonction $h_j - G_N R_j h_k$ est N-invariante car $N(h_j - G_N R_j h_k) = N(\lim_{n \to +\infty} N^n h_j) = \lim_{n \to +\infty} N^{n+1} h_j$. Donc, d'après [10, théorème 4.14],

$$H_U(h_j - G_N R_j h_k) = h_j - G_N R_j h_k$$

i.e:

$$h_j = H_U h_j - H_U G_N R_j h_k + G_N R_j h_k.$$

Or

$$R_j h_k = K_X^{\nu_j} h_k - N K_X^{\nu_j} h_k$$

donc

$$h_j = H_U h_j + G_N K_X^{\nu_j} h_k - G_N N K_X^{\nu_j} h_k - H_U G_N K_X^{\nu_j} h_k + H_U G_N N K_X^{\nu_j} h_k.$$

Puisque

$$N G_N + I = G_N$$

alors

$$h_j = H_U h_j + K_X^{\nu_j} h_k - H_U K_X^{\nu_j} h_k.$$

i.e:

$$h_j = H_U h_j + K_U^{\nu_j} h_k \qquad U \in \mathcal{U}.$$

Donc h est harmonique par rapport à $(\mathcal{G}_U)_{U \in \mathcal{U}}$.

COROLLAIRE 4.1: *Soit X un domaine de Green de* $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, *et soit* $r : X \to \mathbb{R}_+^\star$ *une fonction mesurable telle qu'il existe un nombre rèel positif* ε *et une fonction lipshitizienne* ϱ *sur X, de constante de Lipshitz* 1, *majorée par* $dist(.\,, \partial X)$ *avec*

$$\varepsilon \,.\, \varrho \leq r \leq (1 - \varepsilon) \,.\, \varrho \;.$$

Alors, tout couple de fonctions mesurables positives $h = (h_1, h_2)$ *sur X vérifiant la propriété de moyenne restreinte est harmonique par rapport à* $(\mathcal{G})_{U \in \mathcal{U}}$.

REFERENCES

[1] N. ARONSZAJN - T. M. CREESE - L. J. LIPKIN, *Polyharmonic functions*, Clarendon Press, Oxford, 1983.

[2] M. A. AKCOGLU - R. W. SHARPE, *Ergodic theory and boundaries*, Trans. Amer. Math. Soc., 132 (1968), 447-460.

[3] J. R. BAXTER, *Restricted mean values and harmonic functions*, Trans. Amer. Math. Soc., 167 (1972), 451-463.

[4] A. BENYAICHE, *On almost biharmonic functions in* $\mathbb{R}^n$, Publ. Math., Ec. Norm. Super. Takaddoum 4 (1988), 47-53. (See Zbl. Math. 678).

[5] A. BENYAICHE, *Distributions bi-sousharmoniques sur* $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$, Math. Bohemica., 119, No. 1 (1994), 1-13.

[6] A. BENYAICHE, *Mesures de représentation sur les espaces biharmoniques*, Emile, M. J. Bertin (ed.), ICPT 91, 171-178.

[7] J. BLIEDTNER - W. HANSEN, *Potential theory-An analytic and Probabilistic Approach to balayage*, Universitext, Springer, 1986.

[8] A. BOUKRICHA, *Espaces biharmoniques*, Colloque de théorie de potentiel-Jacques Deny-Orsay, 1983.

[9] N. BOULEAU, *Espaces biharmoniques et couplage de processus de Markov*, J. Math. Pures et appl., 58 (1979), 187-240.

[10] A. CORNEA - J. VESELÝ, *Martin compactification for discrete potential theory and the mean value property*, Potentiel Analysis, 4 (1995), 1-21.

[11] W. HANSEN, *Restricted mean value property and harmonic functions*, Potential Theory-ICPT 94, Eds.: Král/Lukeś/Netuka/Veslý, Walter de Gruyter and Co., Berlin, New York 1996.

[12] W. HANSEN, *Coupling of PDE's and perturbation by transition kernels on a balayage space*, Forschungszentrum BIBOS, Bielefeld-Bonn-Stochastik, 2001.

[13] W. HANSEN - N. NADIRASHVILI, *A converse to the mean value theorem for harmonic functions*, Acta Math., 171 (1993), 139-163.

[14] W. HANSEN - N. NADIRASHVILI, *Restricted mean value property on* $\mathbb{R}^d$, $d \leq 2$, Exp. Math., 13 (1995), 93-95.

[15] W. HANSEN - N. NADIRASHVILI, *Restricted mean value property for positive functions*, J. reine angew. Math., 470 (1996), 89-107.

[16] L. L. HELMS, *Introduction to potential theory*, Wiley, New York 1969.
[17] R. M. HERVÉ, *Recherches axiomatiques sur la théorie des fonctions surharmoniques et du potentiel*, Ann. Ins.Fourier 12 (1962), 415-571.
[18] R.-M. HERVÉ, *Les fonctions surharmoniques associées à un opérateur elliptique du second ordre à coefficients discontinus*, Ann. Ins. Fourier, 19, 1 (1968), 305-359.
[19] O. D. KELLOG, *Converses of Gauss's theorem on the arithmetic mean*, Tran. Amer. Math. Soc., 36 (1934), 227-242.
[20] I. NETUKA - J. VESELÝ, *Mean value property of harmonic functions*, Classical and Modern Potential Theory and Applications (NaTO ASI Series, eds. K. GowriSankaran et al.), 359-398, Kluwer, Dordrecht 1994.
[21] W. A. VEECH, *A converse to the mean value theorem for harmonic functions*, Amer. J. Math., 97 (1975), 1007-1027.
[22] W. A. VEECH, *A zero-one law for a class of random walks and a converse to Gauss'mean value theorem*, Ann. of Math., 97 (1973), 189-216.
[23] V. VOLTERRA, *Alcune osservazioni sopra le proprietà atte a individuare una funzione*, Atti della Reale Accademia dei Lincei, 18 (1909), 263-266.

Direttore responsabile: Prof. A. Ballio - Autorizz. Trib. di Roma n. 7269 dell'8-12-1959
«Monograf» - Via Collamarini, 5 - Bologna