Rendiconti
Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL
Memorie di Matematica e Applicazioni
121° (2003), Vol. XXVII, fasc. 1, pagg. 47-75

JAMEL ABIDI (*)

Sur quelques propriétés d'analyticité concernant les fonctions et leurs graphes (**)

RÉSUMÉ. — Nous démontrons des résultats liés à l'analyticité des fonctions par la structure pluripolaire du graphe ou d'autres propriétés.

Su alcune proprietà di analiticità riguardanti le funzioni e i loro grafici

RIASSUNTO. — Si dimostrano alcuni risultati di analiticità delle funzioni attraverso la struttura pluripolare del grafico o altre proprietà.

1. - INTRODUCTION

Soit D un ouvert de $\mathbb{C}^n$. Il est bien connu que si f est holomorphe dans D, son graphe est un sous-ensemble analytique complexe (donc pluripolaire) dans $D \times \mathbb{C}$.

Nous posons la question suivante: si le graphe d'une fonction continue est pluripolaire, cette fonction est-elle analytique complexe?

Nous démontrons, entre autres, des résultats de prolongement concernant les fonctions analytiques ainsi qu'une classe importante de fonctions plurisousharmoniques. En outre, nous généralisons le théorème de prolongement de Hartogs à une classe de fonctions plurisousharmoniques. Dans toute la suite, nous désignerons par $H(D)$, $\mathrm{psh}(D)$, $\mathrm{prh}(D)$, $\mathrm{sh}(D)$ et $\mathrm{h}(D)$ respectivement l'ensemble des fonctions holomorphes, plurisousharmoniques, pluriharmoniques, sousharmoniques et harmoniques sur D. Pour la théorie de ces classes de fonctions, nous renvoyons aux ouvrages suivants: Hörmander [6], Krantz [9], Ronkin [12], Lelong [10], Henkin [5], Vladimirov [17], Rudin [14], Hayman [4], Range [11] et Klimek [8].

(*) Indirizzo dell'Autore: Département de Mathématiques, Faculté des Sciences de Tunis, 1060 Tunis (Tunisia).

(**) Memoria presentata il 23 settembre 2003 da Giorgio Letta, uno dei XL.

Sur la théorie des fonctions n-harmoniques, nous renvoyons à Rudin [13]. Nous désignerons par m_{2n} la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{C}^n$.

Pour $z^0 \in D$, $r > 0$, $\Delta^{(n)}(z^0, r)$ est le polydisque centré en z^0 et de polyrayon r et $\bar{\Delta}^{(n)}(z^0, r)$ est son adhérence dans $\mathbb{C}^n$.

$B(z^0, r) = \{z \in \mathbb{C}^n : \|z - z^0\| < r\}$ ($\|\,.\,\|$ est la norme euclidienne dans $\mathbb{C}^n$), $\bar{B}(z^0, r) = \{z \in \mathbb{C}^n : \|z - z^0\| \leq r\}$. Pour $j \in \{1, \ldots, n\}$ et $z^0 = (z_1^0, \ldots, z_n^0)$ on écrit $z^0 = (z_j^0, Z_j^0)$ avec $z_j^0 \in \mathbb{C}$ et $Z_j^0 = (z_1^0, \ldots, z_{j-1}^0, z_{j+1}^0, \ldots, z_n^0)$.

$D(z_j^0) = \{Z_j \in \mathbb{C}^{n-1} : (z_j^0, Z_j) \in D\}$ et $D(Z_j^0) = \{z_j \in \mathbb{C} : (z_j, Z_j^0) \in D\}$ et pour $f : D \to \mathbb{C}$,

$$f(z_j^0, .) : D(z_j^0) \to \mathbb{C},$$
$$Z_j \mapsto f(z_j^0, Z_j),$$
$$f(., Z_j^0) : D(Z_j^0) \to \mathbb{C},$$
$$z_j \mapsto f(z_j, Z_j^0).$$

Ré (f) et Im (f) sont respectivement les parties réelle et imaginaire de f. Pour $z \in \mathbb{C}$, Ré (z) est sa partie réelle. Si U est un ouvert dans $\mathbb{R}^n$, ∂U désigne la frontière de U et pour $f : U \to [-\infty, +\infty[$ semi-continue supérieurement on écrira f est s.c.s. Pour $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\|x_0\|$ est la norme euclidienne du vecteur x_0 et $B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| < r\}$.

John Green a introduit la notion de fonction $\mathcal{E}$-sousharmonique de la façon suivante:

Définition: Soit V un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, et soit $\mathcal{E}$ un nombre réel strictement positif. $f : V \to [-\infty, +\infty[$ est dite $\mathcal{E}$-sousharmonique si:

(i) f est semi-continue supérieurement dans V.

(ii) Pour tout ouvert non vide $U \subset V$, il existe $x_0 \in U$ avec $f(x_0) > -\infty$.

(iii) Pour tout $V' \subset V$ ($\bar{V}'$ compact dans V), pour toute h harmonique sur V' et continue sur $\bar{V}'$, la condition $f \leq h$ sur $\partial V'$ implique $f \leq h + \mathcal{E}$ sur V'.

John Green a prouvé le résultat suivant:

Théorème (J. Green): *Soient V un ouvert de $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$, $\mathcal{E} > 0$ et $f : V \to [-\infty, +\infty[$ une fonction $\mathcal{E}$-sousharmonique.*
Il existe $u \in sh(V)$ avec $(*)$ $u \leq f \leq u + \mathcal{E}$ sur V.

On pourra vérifier qu'une fonction $k : V \to [-\infty, +\infty[$ s.c.s et vérifiant $(*)$ (au lieu de f) est $\mathcal{E}$-sousharmonique sur V.

Proposition 1: *Il n'existe aucune fonction $k : \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty[$ sousharmonique telle que $k(x) \leq -\|x\|^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$.*

Démonstration: Le cas de $\mathbb{R}^2$ est trivial. Pour $n \geq 3$, supposons qu'il existe $k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sousharmonique avec $k(x) \leq -\|x\|^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

Soit $x^0 \in \mathbb{R}^n$. Pour $R > 0$ avec $\|x^0\| \leqslant \frac{R}{2}$, on a

$$k(x^0) \leqslant \operatorname*{Sup}_{\|x\| \leqslant R} k(x) = \operatorname*{Sup}_{\|x\| = R} k(x) \leqslant \operatorname*{Sup}_{\|x\| = R} (-\|x\|^2) = -R^2.$$

D'où $k(x^0) \leqslant -R^2$. Si on fait tendre R vers $+\infty$, on obtient $k(x^0) = -\infty$ pour tout $x^0 \in \mathbb{R}^n$. Ce qui est impossible.

En réalité, on pourra vérifier que toute fonction $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continue avec $\lim_{R \to +\infty} (\operatorname*{Sup}_{\|x\| = R} f(x)) = -\infty$, f n'a pas une minorante sousharmonique dans $\mathbb{R}^n$. Notons que cette condition n'est pas nécessaire d'après l'exemple suivant.

Exemple: Soit $f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = -x_1^2$. Remarquons que pour tout $R > 0$, $\operatorname*{Sup}_{\|x\| = R} f_1(x) = 0$. Donc $\lim_{R \to +\infty} (\operatorname*{Sup}_{\|x\| = R} f_1(x)) = 0$. Cependant, f_1 n'a pas une minorante sousharmonique dans $\mathbb{R}^n$ (dans $\mathbb{R}^2$, la preuve est évidente, car toute fonction sousharmonique majorée dans $\mathbb{R}^2$ est constante). Supposons que $n \geqslant 3$. Pour $j = 1, \dots, n$, notons

$$T_j: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_j, x_2, \dots, x_{j-1}, x_1, x_{j+1}, \dots, x_n)$$

T_j est linéaire et $\|T_j(x)\| = \|x\|$ pour $x \in \mathbb{R}^n$. Donc, si f_1 admet une minorante k_1 sousharmonique dans $\mathbb{R}^n$, $k_j = k_1 \circ T_j$ est minorante sousharmonique de $f_1 \circ T_j = f_j$ sur $\mathbb{R}^n$. Remarquons que $k_1, \dots, k_n$ sont sousharmoniques sur $\mathbb{R}^n$. Il résulte que $k_1(x) + \dots + k_n(x) = u(x) \leqslant -\|x\|^2$ pour $x \in \mathbb{R}^n$. Notons aussi que $u \in \mathrm{sh}(\mathbb{R}^n)$. Donc $g(x) = -\|x\|^2$ admet une minorante sousharmonique dans $\mathbb{R}^n$. Ce qui contredit la proposition précédente. Il résulte que sur tout domaine de $\mathbb{R}^n$, il existe une fonction continue n'ayant pas une minorante sousharmonique.

Nous citons ici une famille importante de fonctions $\mathcal{E}$-sousharmoniques.

Soient $u, v: U \to [-\infty, +\infty[$ deux fonctions avec $f = (u + v)$ est s.c.s sur U (ouvert de $\mathbb{R}^n$) et $\mathcal{E}$ un nombre réel strictement positif. Supposons que u est sousharmonique et $0 \leqslant v \leqslant \mathcal{E}$ sur U. Alors $f = (u + v)$ est une fonction $\mathcal{E}$-sousharmonique sur U.

2. - Propriétés du graphe

Théorème 1: *Soit D un domaine de $\mathbb{C}^n$. $f: D \to \mathbb{C}$ une fonction n-harmonique. $E = \{(z, w) \in D \times \mathbb{C} : w = f(z)\}$.*

Les assertions suivantes sont équivalentes:

(1) *f est analytique dans D*;

(2) *E est un sous-ensemble analytique complexe dans $D \times \mathbb{C}$*;

(3) *E est pluripolaire dans $D \times \mathbb{C}$*;

(4) *Pour toute fonction $g: D \to \mathbb{C}$ analytique,* $\mathrm{Log}|f - g|$ *est* psh *sur D (pour $g \neq f$)*;

(5) *Pour tout p polynôme holomorphe sur* $\mathbb{C}^n$, $\operatorname{Log}|f-p|$ *est* psh *ou égale* $(-\infty)$ sur D;

(6) u_1 *est* psh *sur* $D \times \mathbb{C} | E$ $(u_1(z, w) = \operatorname{Log}|w - f(z)|)$;

(7) *Il existe* $z^0 \in D$, $r > 0$ *avec* $\Delta^{(n)}(z^0, r) \subset D$ *et* $\forall j \in \{1, \ldots, n\}$, $\forall Z_j \in \Delta^{(n-1)}(Z_j^0, r)$, $\forall g \in H(D(z_j^0, r))$; $\{z_j \in D(z_j^0, r) : f(z_j, Z_j) = g(z_j)\}$ *est polaire* (*ou* $\{(z_j, w) \in D(z_j^0, r) \times \mathbb{C} : w = f(z_j, Z_j)\}$ *est pluripolaire*) *ou égale* $D(z_j^0, r)$;

(8) $\forall z^0 = (z_1^0, \ldots, z_n^0) \in D$, $\forall j \in \{1, \ldots, n\}$, $\forall p$ *polynôme holomorphe sur* $\mathbb{C}$, *la fonction* $\operatorname{Log}|f(., Z_j^0) - p|$ *est sousharmonique ou identique à* $(-\infty)$ *sur* $D(Z_j^0)$;

(9) $\forall z^0 = (z_1^0, \ldots, z_n^0) \in D$, $\forall j \in \{1, \ldots, n\}$, $\forall p$ *polynôme holomorphe sur* $\mathbb{C}$, $\dfrac{1}{|f(., Z_j^0) - p|^2}$ *est sousharmonique sur* $\{z_j \in D(z_j^0, r) : \ f(z_j, Z_j^0) - p(z_j) \neq 0\}$ $(\Delta^{(n)}(z^0, r) \subset D)$;

(10) *Il existe* $z^0 \in D$, $r > 0$ *avec* $B(z^0, r) \subset D$ *et* $\alpha : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *un biholomorphisme de manière que* $F = \{(z, w) \in B(z^0, r) \times \mathbb{C} : \alpha(w) = f(z)\}$ *est pluripolaire.*

DÉMONSTRATION: Il est bien connu l'équivalence entre les assertions (1) et (2).

(1) implique (3) est triviale. Pour (3) implique (1), on a les deux étapes suivantes.

1ère étape: $n = 1$. Soit $u \in \operatorname{psh}(D \times \mathbb{C})$ avec $E \subset \{(z, w) \in D \times \mathbb{C} : u(z, w) = -\infty\}$. Soit $z^0 \in D$. On choisit $r > 0$ avec $\overline{D}(z^0, r) \subset D$. $f = p + iq$ où p et q sont harmoniques sur $D(z^0, r)$, p est la partie réelle de f. Supposons que f n'est pas holomorphe sur $D(z^0, r)$. Choisissons $w_1 : D(z^0, r) \to \mathbb{C}$ holomorphe avec Ré $(w_1) = p$. Ecrivons que $w_1 = p + i\theta$ où $\theta : D(z^0, r) \to \mathbb{R}$ harmonique. Comme f n'est pas holomorphe sur $D(z^0, r)$, alors $(w_1 - f) = i(\theta - q)$ n'est pas constante.

Notons que $(\theta - q)(D(z^0, r))$ contient un intervalle ouvert et non vide noté I. On aura besoin du lemme suivant.

LEMME 1: *Soit* $h : U \to \mathbb{R}$ *harmonique non constante* (U *domaine dans* $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$). *Alors* $J = h(U)$ *contient un intervalle ouvert dans* $\mathbb{R}$, *de plus, pour tout* $\beta \in J$, $F = \{x \in U : h(x) = \beta\}$ *n'est pas polaire.*

DÉMONSTRATION: h étant continue et U ouvert connexe dans $\mathbb{R}^d$, donc $h(U)$ est connexe dans $\mathbb{R}$ et par suite $h(U)$ est un intervalle dans $\mathbb{R}$. Comme h n'est pas constante, alors $h(U)$ contient un intervalle ouvert non vide.

$\forall \beta \in J$, $\exists x_0 \in U$ avec $h(x_0) = \beta$. Soit $r > 0$ avec $\overline{B}(x_0, r) \subset U$.

F étant fermé dans U, donc $U \backslash F$ est ouvert. Plus exactement $H^{d-1}(F) > 0$ où H^{d-1} est la mesure de Hausdorff $(d-1)$-dimensionnelle associée à la distance euclidienne ([3]).

Notons que $(h - \beta)$ est harmonique au voisinage de $\overline{B}(x_0, r)$.

Donc $(h - \beta)$ est lipchitzienne sur $B(x_0, r)$.

$|h-\beta|$ est harmonique sur $B(x_0, r)\backslash F_1$ où $F_1 = B(x_0, r) \cap F$ (F_1 étant fermé dans $B(x_0, r)$).

Si $H^{d-1}(F_1) = 0$, alors d'après [16], la fonction positive $|h-\beta|$ est harmonique sur $B(x_0, r)$. Mais $|h-\beta|$ atteint son minimum en x_0. Donc $h=\beta$ partout sur $B(x_0, r)$. h étant analytique réelle sur U, il résulte que $h=\beta$ sur U. D'où h est constante. Ceci étant impossible.

Pour le reste de la preuve de la première étape, notons maintenant que, pour tout $\alpha \in I$, $F(\alpha) = \{z \in D(z^0, r) : (w_1 - f)(z) = i(\theta - q)(z) = i\alpha\}$ n'est pas polaire dans $D(z^0, r)$. Considérons l'application

$$v : D(z^0, r) \times \mathbb{C} \to D(z^0, r) \times \mathbb{C},$$
$$(z, \beta) \mapsto (z, w_1(z) - i\beta).$$

v est un biholomorphime de $D(z^0, r) \times \mathbb{C}$ sur $v(D(z^0, r) \times \mathbb{C}) = D(z^0, r) \times \mathbb{C}$. Donc $u \circ v \in \mathrm{psh}(D(z^0, r) \times \mathbb{C})$. D'où $v^{-1}(E)$ est pluripolaire. Remarquons que, pour tout $\beta \in I$, pour tout $z \in F(\beta)$, on a $u(z, w_1(z) - i\beta) = u(z, f(z)) = -\infty$.

$$\{z \in \mathbb{C} : w_1(z) - i\beta = f(z)\} = \{z \in \mathbb{C} : (z, w_1(z) - i\beta) \in E\}.$$

D'où $\mathrm{Cap}^*(\{\beta \in \mathbb{R} : \mathrm{Cap}^*(\{z \in \mathbb{C} : (z, w_1(z) - i\beta) \in E\}) > 0\}) = \mathrm{Cap}^*(\{\beta \in \mathbb{R} : \mathrm{Cap}^*(\{z \in \mathbb{C} : (z, \beta) \in v^{-1}(E)\}) > 0\}) \geqslant \mathrm{Cap}^*(I)$ car $I \subset \{\beta \in \mathbb{R} : \mathrm{Cap}^*(\{z \in \mathbb{C} : (z, w_1(z) - i\beta) \in E\}) > 0\}$. Maintenant $\mathrm{Cap}^*(I) > 0$. D'où $v^{-1}(E)$ n'est pas pluripolaire. Ceci étant impossible (Cap^* étant la capacité logarithmique extérieure sur $\mathbb{C}$).

2ème *étape*: $n \geqslant 2$. Soit $u \in \mathrm{psh}(D \times \mathbb{C})$ avec $E \subset \{(z, w) \in D \times \mathbb{C} : u(z, w) = -\infty\}$. Soit $z^0 = (z_1^0, Z_1^0) \in D$ avec $u(z^0, .) \in \mathrm{sh}(\mathbb{C})$. On travaille localement. Soit $r > 0$ tel que $\Delta^{(n)}(z^0, r) \subset D$; $\Delta^{(n)}(z^0, r)$ étant le polydisque ouvert centré en z^0 et de polyrayon r. Notons que $u(., Z_1^0, .) : D(z_1^0, r) \times \mathbb{C} \to [-\infty, +\infty[$

$$(z_1, w) \mapsto u(z_1, Z_1^0, w)$$

vérifie $u(., Z_1^0, .) \in \mathrm{psh}(D(z_1^0, r) \times \mathbb{C})$.

$f(., Z_1^0)$ étant harmonique sur $D(z_1^0, r)$ dont son graphe est inclus dans $\{(z_1, w) \in D(z_1^0, r) \times \mathbb{C} : u(z_1, Z_1^0, w) = -\infty\}$.

D'après la première étape, $f(., Z_1^0)$ est holomorphe sur $D(z_1^0, r)$.

Appliquons le même procédé, on a $f(., Z_j^0)$ est analytique complexe sur $D(z_j^0, r)$ pour tout $j = 1, \ldots, n$. D'après le théorème de Hartogs (cf. [6]), f est analytique sur $\Delta^{(n)}(z^0, r)$ (raisonner par l'absurde). Nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 2: *Soit $v \in \mathrm{psh}(G \times \mathbb{C})$ où G est domaine dans $\mathbb{C}^n$.*
Soit $X = \{z \in G : v(z, .) \notin \mathrm{sh}(\mathbb{C})\}$. Alors X est pluripolaire dans G.

Démonstration: Soit $(z^0, w_0) \in G \times \mathbb{C}$ avec $v(z^0, w_0) > -\infty$.

On définit $Y = \{z \in G : v(z, w_0) = -\infty\}$. Notons que $v(., w_0) \in \mathrm{psh}(G)$, donc Y est pluripolaire dans G.

Pour tout $z \in G \backslash Y$, on a $v(z, w_0) > -\infty$, donc $v(z, .) \in \mathrm{sh}(\mathbb{C})$. Il résulte alors que $z \notin X$. D'où $G \backslash Y \subset G \backslash X$ et cela implique que $X \subset Y$. En particulier, X est pluripolaire dans G.

Pour le reste de la preuve du théorème 1, notons que $\{z \in D : f$ n'est pas analytique au voisinage de $z\}$ est un ouvert pluripolaire, c'est donc vide. Ceci montre que f est analytique sur D.

(1) implique (4) est triviale. Pour (4) implique (1) on suivra les deux étapes suivantes.

1ére étape: $n = 1$. Soit $z^0 \in D$, $r > 0$ tel que $D(z^0, r) \subset D$.

Soit $g : D(z^0, r) \to \mathbb{C}$ holomorphe de manière que $\text{Ré}(g) = \text{Ré}(f)$. Supposons que f n'est pas holomorphe sur $D(z^0, r)$. Posons $f = p + iq$, $g = p + iq_1$, $\text{Ré}(f) = p = \text{Ré}(g)$ (q et q_1 sont harmoniques). On a $(f - g)$ n'est pas constante, donc $(q - q_1)$ est harmonique non constante.

$(q - q_1)(D(z^0, r))$ contient un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et non vide noté J. Pour $\beta \in J$, on a $\{z \in D(z^0, r) : f(z) = g(z) + i\beta\} = \{z \in D(z^0, r) : (q - q_1)(z) = \beta\}$ n'est pas polaire d'après le lemme 1. Ce qui est impossible (remarquer que $(g + i\beta)$ est holomorphe). D'où f est analytique sur D. Remarquons que si $n \geqslant 2$, f est pluriharmonique et si pour toute $g : D \to \mathbb{C}$ holomorphe (et $g \neq f$), $\{z \in D : f(z) = g(z)\}$ est pluripolaire, alors f est holomorphe.

2éme étape: $n \geqslant 2$. Si f est constante alors f est analytique. Supposons que f n'est pas constante. Alors, pour tout $a \in \mathbb{C}$, $2 \,\mathrm{Log}\,|a - f|$ et par suite $|a - f|^2$ est psh sur D. Cela implique que $f \in \mathrm{prh}(D)$. En effet, pour $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ transformation $\mathbb{C}$-linéaire, on a $\forall a \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Log}\,|a - f|$ est psh dans D. Donc $e^{2\,\mathrm{Log}|a-f|} = |a - f|^2$ l'est aussi.

$|a - f|^2 \circ T = |a - f \circ T|^2$ est sousharmonique sur $T^{-1}(D)$. Ceci implique que $f \circ T$ est harmonique sur $T^{-1}(D)$. Développons en réalité $|a - f \circ T|^2 = |a|^2 - \bar{a} f \circ T - a(\overline{f \circ T}) + |f \circ T|^2$.

Donc $\Delta(|a - f \circ T|^2) = -\bar{a}\Delta(f \circ T) - a\,\Delta(\overline{f \circ T}) + \Delta(|f \circ T|^2) \geqslant 0$ pour tout $a \in \mathbb{C}$. Remarquons que si $a \in \mathbb{R}$, on obtient $-a\ \text{Ré}[\Delta(f \circ T)] + \Delta(|f \circ T|^2) \geqslant 0$. Le cas où $\text{Ré}\ [\Delta(f \circ T)] > 0$ est impossible, car si a tend vers $(+\infty)$, on conclut une contradiction. La même conclusion est obtenue si $\text{Ré}(\Delta(f \circ T)) < 0$. D'où $\text{Ré}(\Delta(f \circ T)) = 0$.

Un raisonnement analogue prouve que $\mathrm{Im}(\Delta(f \circ T)) = 0$.

D'où $\Delta(f \circ T) = 0$. D'après Klimek [8], $f \in \mathrm{prh}(D)$.

Soit $z^0 \in D$, $r > 0$ avec $\overline{B}(z^0, r) \subset D$. Soit $g : B(z^0, r) \to \mathbb{C}$ holomorphe de manière que $\text{Ré}(f) = \text{Ré}(g)$. Si f n'est pas holomorphe, alors $\mathrm{Log}\,|f - g|$ est psh sur $B(z^0, r)$. En particulier $\{z \in B(z^0, r) : \mathrm{Log}\,|f(z) - g(z)| = -\infty\} = \{z \in B(z^0, r) : f(z) - g(z) = 0\}$ est pluripolaire.

Notons que $A = \{z \in B(z^0, r) : \mathrm{Im}(f(z) - g(z)) = 0\}$ est non vide. D'après le lemme 1, A est non polaire (donc non pluripolaire). D'où la contradiction.

(1) implique (5) est triviale. Pour (5) implique (1). Soit $z^0 \in D$, $r > 0$ avec $\overline{B}(z^0, r) \subset D$. Soit $g : B(z^0, r) \to \mathbb{C}$ holomorphe et $g \neq f$. Soit $(p_j)_{j \geqslant 1}$ une suite de polynô-

mes holomorphes convergeant uniformément vers g sur $B(z^0, r)$. Alors $(\mathrm{Log}\,|f - p_j|)$ converge uniformément vers $\mathrm{Log}\,|f - g|$ (de plus $\mathrm{Log}\,|f - g|$ est s.c.s dans $B(z^0, r)$), donc $\mathrm{Log}\,|f - g|$ est psh sur $B(z^0, r)$. D'après (4), f est analytique sur D.

(1) implique (6) est triviale. Pour (6) implique (1), notons que u_1 est s.c.s sur $D \times \mathbb{C}$. Soit $a \in E$, $r > 0$ avec $a + r\overline{D}(0, 1)\, b \subset D \times \mathbb{C}$. On a

$$u_1(a) = -\infty \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_1(a + re^{i\theta} b)\, d\theta\,,$$

donc $u_1 \in \mathrm{psh}\,(D \times \mathbb{C})$. D'après Abidi [1], $f \in H(D)$. (1) implique (7) est bien connue. Pour (7) implique (1), on fixe $z^0 = (z_1^0, Z_1^0) \in D$. Soit $r > 0$ avec $\Delta^{(n)}(z^0, r) \subset D$. Supposons que $f(.\,, Z_1^0)$ n'est pas holomorphe sur $D(z^0, r)$. Ecrivons que $f(.\,, Z_1^0) = p + iq$, $p = \mathrm{Ré}\,(f(.\,, Z_1^0))$ et notons que p et q sont harmoniques sur $D(z_1^0, r)$. Soit $g = (p + i\theta)$ holomorphe sur $D(z_1^0, r)$ où $p = \mathrm{Ré}\,(g)$. Comme $[f(.\,, Z_1^0) - g]$ n'est pas constante, il résulte que $(q - \theta)(D(z_1^0, r))$ contient un intervalle ouvert dans $\mathbb{R}$ qu'on note I.

$\forall\, \alpha \in I$, $\{z_1 \in D(z_1^0, r) : f(z_1, Z_1^0) - g(z_1) = i\alpha\}$ est non polaire d'après le lemme 1. D'où la contradiction.

Maintenant, la condition pour tout $z^0 \in D$ et $r > 0$ avec $\Delta^{(n)}(z^0, r) \subset D$, $\{(z_j, w) \in D(z_j^0, r) \times \mathbb{C} :\ w = f(z_j, Z_j^0)\}$ est pluripolaire $(\forall j \in \{1, \dots, n\})$, d'après (3), cela implique que $f(.\,, Z_j^0)$ est holomorphe. D'après le théorème de Hartogs (cf. [6]), f est analytique sur D.

(1) implique (8) est triviale. Pour (8) implique (1). Soit $z^0 \in D$. Supposons que $f(.\,, Z_1^0)$ n'est pas holomorphe en z_1^0 $(z^0 = (z_1^0, Z_1^0))$. Ecrivons comme d'habitude, $f(.\,, Z_1^0) = p + iq$ où p et q sont à valeurs réelles. Soit g holomorphe de manière que $\mathrm{Ré}\,(f(.\,, Z_1^0)) = \mathrm{Ré}\,(g)$. Soit $(p_j)_{j \geqslant 1}$ une suite de polynômes holomorphes convergeant uniformément vers g sur $\overline{D}(z_1^0, r) \subset D(Z_1^0)$. Notons alors que $(\mathrm{Log}\,|f - p_j|)$ converge uniformément vers $\mathrm{Log}\,|f(.\,, Z_1^0) - g|$.

$\mathrm{Log}\,|f(.\,, Z_1^0) - g|$ étant s.c.s, donc $\mathrm{Log}\,|f(.\,, Z_1^0) - g|$ est sousharmonique sur $D(z_1^0, r)$. En particulier, $\{z_1 \in D(z_1^0, r) :\ f(z_1, Z_1^0) = g_1(z_1)\}$ est polaire (pour toute fonction $g_1 \in H(D(z_1^0, r))$. D'après (7), $f(.\,, Z_1^0)$ est holomorphe sur $D(z_1^0, r)$. D'où la contradiction.

(1) implique (9) est connue. Pour (9) implique (1), d'après le théorème de Hartogs (cf. [6]) on se ramène à $n = 1$.

Soit $z^0 \in D$, $r > 0$ avec $\overline{D}(z^0, r) \subset D$. Soit $g : D(z^0, r) \to \mathbb{C}$ holomorphe avec $g \neq f$. Soit aussi $(p_j)_{j \geqslant 1}$ une suite de polynômes holomorphes convergeant uniformément vers g sur $D(z^0, r/2)$. Remarquons que sur $\{z \in D(z^0, r/2) :\ f(z) \neq g(z)\}$, on a $\left(\dfrac{1}{|p_j - f|^2}\right)_{j \geqslant 1}$ converge localement uniformément vers $\dfrac{1}{|f - g|^2}$. Il résulte que $\dfrac{1}{|f - g|^2}$ est sousharmonique sur $\{z \in D(z^0, r/2) : f(z) \neq g(z)\}$. Ceci implique que f est holomorphe.

Ecrivons que $f = p + iq$ où $p = \text{Ré}(f)$. Soit $g = (p + i\theta)$ holomorphe sur $D(z^0, r)$ de manière que p est la partie réelle de g. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ avec la condition $\alpha^2 - 3(\theta - q)^2 > 0$ sur $D(z^0, r/2)$.

$g_1 = (g + \alpha)$ est holomorphe sur $D(z^0, r)$. Notons que $g_1(z) \neq f(z)$ pour tout $z \in D(z^0, r)$.

$$\frac{1}{|g_1 - f|^2} = \frac{1}{\alpha^2 + (\theta - q)^2}.$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{|g_1 - f|^2}\right] = \frac{-2(\theta - q)\left(\dfrac{\partial\theta}{\partial z} - \dfrac{\partial q}{\partial z}\right)}{(\alpha^2 + (\theta - q)^2)^2}.$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\bar{z}\,\partial z}\left[\frac{1}{|g_1 - f|^2}\right] = \frac{2\left|\dfrac{\partial\theta}{\partial z} - \dfrac{\partial q}{\partial z}\right|^2[-\alpha^2 + 3(\theta - q)^2]}{[\alpha^2 + (\theta - q)^2]^3} \leq 0.$$

D'autre part $\dfrac{\partial^2}{\partial\bar{z}\,\partial z}\left[\dfrac{1}{|g_1 - f|^2}\right] \geq 0.$

Donc $\left|\dfrac{\partial\theta}{\partial z} - \dfrac{\partial q}{\partial z}\right|^2 = 0$ sur $D(z^0, r/2)$. Notons que $(\theta - q)$ est à valeurs réelles, donc $(\theta - q)$ est constante sur $D(z^0, r/2)$.

$(\theta - q)$ étant analytique réelle sur $D(z^0, r)$, donc $(\theta - q)$ est constante sur $D(z^0, r)$.

$\theta - q = c$ où $c \in \mathbb{R}$. Donc $f = p + iq = p + i(\theta - c) = p + i\theta - ic = (g - ic)$ est holomorphe.

L'assertion (1) implique (10) est connue. Pour (10) implique (1), $\alpha : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ étant un biholomorphisme, donc il existe $a, b \in \mathbb{C}$ $(a \neq 0)$ avec $\alpha(w) = aw + b$. Donc

$$\{(z, w) \in B(z^0, r) \times \mathbb{C}/\alpha(w) = f(z)\} = \left\{(z, w) \in B(z^0, r) \times \mathbb{C}/w = \frac{1}{a}f(z) - \frac{b}{a}\right\}$$

est pluripolaire. D'après (3), $\left(\dfrac{1}{a}f - \dfrac{b}{a}\right)$ est holomorphe sur $B(z^0, r)$. Cela implique que f est même holomorphe sur D.

Dans la suite de l'article, on utilise le lemme suivant

LEMME 3: *Soit D un domaine dans $\mathbb{C}^n$, $f: D \to \mathbb{C}$ une fonction, K compact dans $D \times \mathbb{C}$; $v(z, w) = |w - f(z)|$ pour $(z, w) \in D \times \mathbb{C}$. On a l'équivalence suivante*

(i) *f est continue sur D;*

(ii) *v est s.c.s sur $D \times \mathbb{C} \setminus K$.*

DÉMONSTRATION: (i) implique (ii) est triviale. Pour (ii) implique (i), on a v est s.c.s positive, donc v^2 est aussi s.c.s sur $D \times \mathbb{C} \backslash K$.

$$v^2(z, w) = |w|^2 - \overline{w} f(z) - w \overline{f}(z) + |f(z)|^2.$$

Soit $R > 0$ avec $K \subset D \times D(0, R)$. Il résulte que v^2 est s.c.s sur $D \times [\mathbb{C} \backslash \overline{D}(0, R)]$.

Alors, pour tout $j > R$ $(j \in \mathbb{N})$, on a $-j[f + \overline{f}] + |f|^2$ est s.c.s sur D.

Donc $\left(-[f + \overline{f}] + \dfrac{|f|^2}{j} \right)$ est une suite décroissante de fonctions s.c.s, donc sa limite est s.c.s. C'est à dire $-2 \operatorname{Ré}(f)$ est s.c.s sur D. Remplaçons respectivement w par $-j$, (ij) et $(-ij)$ où $(i^2 = -1)$, on vérifie que f est continue sur D.

THÉORÈME 2: *Soit D un ouvert de $\mathbb{C}^n$, $f: D \to \mathbb{C}$ une fonction.*

$$u(z, w) = \operatorname{Log} |w - f(z)|, (z, w) \in D \times \mathbb{C}.$$

L un hyperplan complexe de $\mathbb{C}^{n+1}$ non parallèle à la droite $\{0\} \times \mathbb{C}$ et coupant $D \times \mathbb{C}$.

Supposons que $u \in \operatorname{psh}(D \times \mathbb{C} | L)$. Alors f est holomorphe dans D.

DÉMONSTRATION: Soit $z^0 \in D$. Supposons que $z^0 \notin L$. On fixe $r > 0$ tel que $\overline{B}(z^0, r) \subset D$. Soit p_j: $\mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}^{n+1}$ $(j = 1$ ou $2)$. P_1 est la projection sur L parallèlement à $\{0\} \times \mathbb{C}$; p_2 est la projection sur $\{0\} \times \mathbb{C}$ parallèlement à l'hyperplan $\mathbb{C}^n \times \times \{0\}$. Soit $K = p_2 0\, p_1(\overline{B}(z^0, r))$, K est compact dans $\{0\} \times \mathbb{C}$ qui sera par la suite identifié a un compact de $\mathbb{C}$ noté encore K.

Remarquons que $u \in \operatorname{psh}(B(z^0, r) \times \mathbb{C} \backslash K)$. Pour $(z, w) \in B(z^0, r) \times \mathbb{C} \backslash K$, soit $v(z, w) = e^{2u(z, w)}$.

Le lemme 3 implique que f est continue sur D.

Le cas où $n = 1$. Notons que f est continue sur $D(z^0, r)$, donc u est s.c.s sur $D(z^0, r) \times \mathbb{C}$. Rappelons que $\operatorname{Log} |w - f(z)|$ est psh sur $D(z^0, r) \times \mathbb{C}$.

On a $u \in \operatorname{psh}(D(z^0, r) \times (C \backslash K))$. Ceci implique d'abord que f est harmonique sur $D(z^0, r)$. Notons par Δ le laplacian par rapport à la variable $z (z \in D(z^0, r))$.

v est continue sur $D(z^0, r)$. Supposons qu'il existe une fonction $\varphi \in C_c^\infty(D(z^0, r))$, $\varphi \geqslant 0$ avec $\langle \Delta(f), \varphi \rangle \neq 0$. D'où $\langle \Delta(f) + \Delta(\overline{f}), \varphi \rangle \neq 0$ ou $\langle \Delta(f) - \Delta(\overline{f}), \varphi \rangle \neq 0$.

Le cas $\langle \Delta(f) + \Delta(\overline{f}), \varphi \rangle \neq 0$, développons $\langle \Delta v(., w), \varphi \rangle = -w \langle \Delta(\overline{f}), \varphi \rangle - -\overline{w} \langle \Delta(f), \varphi \rangle + \langle \Delta(|f|^2), \varphi \rangle \geqslant 0$ pour tout $w \in \mathbb{C} \backslash K$. Si $w \in \mathbb{R} \backslash K$, on a (1): $-w \langle \Delta(f) + \Delta(\overline{f}), \varphi \rangle + \langle \Delta(|f|^2), \varphi \rangle \geqslant 0$, dans ce cas, on doit avoir $\langle \Delta(f) + \Delta(\overline{f}), \varphi \rangle = 0$, car l'hypothèse $\langle \Delta(f) + \Delta(\overline{f}), \varphi \rangle \neq 0$ implique une contradiction en faisant tendre w vers $+\infty$ ou $(-\infty)$ dans (1). Pour $w \in (i\mathbb{R}) \backslash K$, on a aussi $\langle \Delta v(., w), \varphi \rangle = = w \langle \Delta(f) - \Delta(\overline{f}), \varphi \rangle + \langle \Delta(|f|^2), \varphi \rangle \geqslant 0$. Si $\langle \Delta(f) - \Delta(\overline{f}), \varphi \rangle \neq 0$, on obtient une absurdité si (iw) tend vers $+\infty$ ou $(-\infty)$.

Il résulte que $\Delta(f) = 0$ au sens des distributions. D'après le lemme de Weyl et compte tenu de l'hypothèse f continue, on déduit que f est harmonique sur $D(z^0, r)$. En particulier f est de classe C^∞.

Pour $z \in D(z^0, r)$ et $|w|$ assez grand, notons $v_1(z, w) = 2 \operatorname{Log} |w - f(z)| =$

$= \operatorname{Log}(|w - f(z)|^2)$. On a

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial w \, \partial \overline{w}}(z, w) = 0 \,, \qquad \frac{\partial^2 v_1}{\partial z \, \partial \overline{z}}(z, w) = 0 \,.$$

Il arrive que

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial \overline{z} \, \partial w}(z, w) \, \overline{b}_1 b_2 + \frac{\partial^2 v_1}{\partial z \, \partial \overline{w}}(z, w) \, b_1 \overline{b}_2 \geqslant 0$$

pour tout $b_1, b_2 \in \mathbb{C}$. Donc Ré $\left[\dfrac{\partial^2 v_1}{\partial \overline{z} \, \partial w}(z, w) \, \overline{b}_1 b_2 \right] \geqslant 0$. Ce qui implique que $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$ sur $D(z^0, r)$. D'où f est holomorphe sur $D(z^0, r)$.

Pour le cas $n \geqslant 2$, la solution est obtenue en appliquant le procédé de fibration et le théorème de Hartogs (cf. Hörmander [6]).

Le cas où $z^0 \in L$. Soit $\overline{B}(z^0, r)$ et K comme plus haut. Notons que $\{0\} \times \mathbb{C} \cap L = \{a\}$. Soit $R > 0$ de sorte que $\{a\} \cup K \subset D(0, R)$ (a est aussi identifié a un élément de $\mathbb{C}$ noté encore a) . Il résulte que $u \in \operatorname{psh}(B(z^0, r) \times (\mathbb{C} \setminus \overline{D}(0, R)))$.

Un raisonnement analogue (comme plus haut), montre que f est analytique (complexe) sur $B(z^0, r)$. En particulier toute réunion finie d'hyperplans complexes non parallèles à la droite $\{0\} \times \mathbb{C}$ est un sous-ensemble singulier impropre pour la classe $P = \{u \in \operatorname{psh}(D \times \mathbb{C} \setminus L) : u(z, w) = \operatorname{Log}|w - f(z)| \,,\, f : D \to \mathbb{C}$ une fonction$\}$.

Remarque 1: Soit L un hyperplan affine complexe parallèle à la droite $\{0\} \times \mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}^{n+1}$. Dans ce cadre le résultat du théorème 2 n'est pas vrai.

Exemple: $f(z) = \dfrac{1}{z}$ sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. $u(z, w) = \operatorname{Log}|w - f(z)|$ est psh sur $(\mathbb{C} \setminus \{0\}) \times \mathbb{C} = \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \times \mathbb{C}$. $L = \{0\} \times \mathbb{C}$.

Remarquons que $u \notin \operatorname{psh}(\mathbb{C}^2)$.

Corollaire 1: *La classe des fonctions u donnée par $u(z, w) = \operatorname{Log}|w - f(z)|$ ne caractérise pas les ouverts pseudo-convexes dans $\mathbb{C}^{n+1}$.*

Démonstration: Soit D un domaine pseudo-convexe dans $\mathbb{C}^n$.

Désignons par L un hyperplan affine complexe dans $\mathbb{C}^{n+1}$ non parallèle à la droite $\{0\} \times \mathbb{C}$. Remarquons que $D \times \mathbb{C} \setminus L$ est pseudo-convexe dans $\mathbb{C}^{n+1}$. D'après le théorème 2, toute fonction u de la forme $u(z, w) = \operatorname{Log}|w - f(z)|$ plurisousharmonique dans $D \times \mathbb{C} \setminus L$, u est en fait psh dans $D \times \mathbb{C}$.

Remarque 2: Soit L un hyperplan complexe de $\mathbb{C}^{n+1}$ coupant $D \times \mathbb{C}$. S'il existe une fonction u de la forme $u(z, w) = \operatorname{Log}|w - f(z)|$ et un point $(z^0, w_0) \in L$ tel que u n'est pas psh en (z^0, w_0), alors u n'est pas psh en aucun point de $D \times \mathbb{C} \cap L$. De plus, L est parallèle à la droite $\{0\} \times \mathbb{C}$. Dans ce cas la classe $F = \{u : D \times C \setminus L \to [-\infty, +\infty[,\ u(z, w) = \operatorname{Log}|w - f(z)|$ pour $f : D \to \mathbb{C}$ une fonction et $u \in \operatorname{psh}(D \times \mathbb{C} \setminus L)\}$ caractérise la structure pseudo-convexe de l'ouvert $D \times \mathbb{C} \setminus L$. C'est à dire qu'il existe une fonction $v \in F$ avec v ne se prolonge pas en une fonction psh au voisinage de tout point de $D \times \mathbb{C} \cap L$.

REMARQUE 3: Nous rappelons un résultat de Urban Cegrell [2]. Soit K_1 un compact pluripolaire dans un domaine pseudo-convexe D de $\mathbb{C}^n$, $n \geqslant 2$. Alors toute fonction $u_1 \in \operatorname{psh}(D \backslash K_1)$ se prolonge dans $\operatorname{psh}(D)$. Pour la classe des fonctions du type $\operatorname{Log}|w - f(z)| = u(z, w)$ il n'est pas nécessaire que le compact soit pluripolaire et l'ouvert D est pseudo-convexe. En fait si u est psh sur $D \times \mathbb{C} \backslash K$ où D est un ouvert dans $\mathbb{C}^m$ $(m \geqslant 1)$ et K un sous-ensemble compact dans $D \times \mathbb{C}$. Alors $u \in \operatorname{psh}(D \times \mathbb{C})$.

COROLLAIRE 2: *Soit* $u(z, w) = \operatorname{Log}|w - f(z)| + \operatorname{Log}|w - g(z)|$. f *et* $g : D \to \mathbb{C}$ *deux fonctions. Supposons que* $u \in \operatorname{psh}(D \times \mathbb{C} | L)$ *où* D *est un domaine dans* $\mathbb{C}^n$ *et* L *est un hyperplan affine complexe de* $\mathbb{C}^{n+1}$. *Alors* f *et* g *sont holomorphes sur* D *si* L *n'est pas parallèle à la droite* $\{0\} \times \mathbb{C}$ *et* u_1 *est s.c.s sur* $D \times \mathbb{C} | L$ $(u_1(z, w) = \operatorname{Log}|w - f(z)|$ *pour* $(z, w) \in D \times \mathbb{C})$.

DÉMONSTRATION: Utilisant la preuve du théorème 2, on démontre que f est continue sur D. Soit $z^0 \in D$, $r > 0$ avec $B(z^0, r) \subset D$. u_1 étant s.c.s sur $B(z^0, r) \times \mathbb{C}$, donc u_2 est s.c.s sur $B(z^0, r) \times \mathbb{C} \backslash [L \cup \{(z, w) \in B(z^0, r) \times \mathbb{C} : w = f(z)\}]$ où $u_2(z, w) = \operatorname{Log}|w - g(z)|$ sur $D \times \mathbb{C}$. Notons que $f\left(\overline{B}\left(z^0, \frac{r}{2}\right)\right)$ est compact dans $\mathbb{C}$, soit donc $R > 0$ avec $f\left(\overline{B}\left(z^0, \frac{r}{2}\right)\right) \subset \overline{D}(0, R)$. D'où u_2 est s.c.s sur

$$B\left(z^0, \frac{r}{2}\right) \times \mathbb{C} \backslash \left[L \cup B\left(z^0, \frac{r}{2}\right) \times \overline{D}(0, R)\right] = B\left(z^0, \frac{r}{2}\right) \times (\mathbb{C} \backslash \overline{D}(0, R)) \backslash L .$$

On note par p_1 la projection sur L parallèlement à $\{0\} \times \mathbb{C} \subset \mathbb{C}^{n+1}$. Notons aussi p_2 la projection sur $\{0\} \times \mathbb{C}$ parallèlement à $\mathbb{C}^n \times \{0\}$. En choisissant R assez grand, on admet que $p_2 0\, p_1\left(B\left(z^0, \frac{r}{2}\right)\right) \subset \{0\} \times \overline{D}(0, R)$ (qu'on identifiera à $\overline{D}(0, R) \subset \mathbb{C}$). Il résultera alors que u_2 est s.c.s sur $B\left(z^0, \frac{r}{2}\right) \times [\mathbb{C} \backslash \overline{D}(0, R)]$. Un argument utilisé dans la preuve du théorème 2 permet de vérifier que g est continue sur $B\left(z^0, \frac{r}{2}\right)$. Maintenant u est psh sur $D \times \mathbb{C} \backslash L$ et localement majorée à travers L, $L \cap D \times \mathbb{C}$ étant pluripolaire fermé dans $D \times \mathbb{C}$, donc u se prolonge de manière unique en une fonction $u^* \in \operatorname{psh}(D \times \mathbb{C})$.

D'autre part, $e^{u_1 + u_2} = e^{u_1} e^{u_2}$ est continue sur $D \times \mathbb{C}$, de plus $e^{u_1 + u_2}$ est psh sur $D \times \mathbb{C} \backslash L$, donc $e^{u_1 + u_2}$ est psh sur $D \times \mathbb{C}$. $e^{u^*} = e^{u_1 + u_2}$ sur $D \times \mathbb{C} \backslash L$ (donc l'égalité est vraie m_{2n+2}-presque partout sur $D \times \mathbb{C}$), il résulte que $u^* = u_1 + u_2 = u$ est psh sur $D \times \mathbb{C}$. D'après Abidi [1], f et g sont analytiques sur D.

LEMME 4: *Soit* $f : D \to \mathbb{C}$ *une fonction,* D *domaine dans* $\mathbb{C}^n$.
On a les équivalences suivantes

(i) f *est* prh *sur* D;

(ii) $|w - f|^2$ *est psh sur* $D \times \mathbb{C}$;

(iii) $\exists\, s \geqslant 1$ *avec* $|w - f|^s$ *est* psh *sur* $D \times \mathbb{C}$;

(iv) $\forall\, w \in \mathbb{C}$, $k(z) = |w - f(z)|^2$ *est* psh *sur* D;

(v) $\exists\, a > 0$, $\exists\, b > 0$ *avec* $[a|w - f| + b|w - f|^2]$ *est* psh *sur* $D \times \mathbb{C}$.

DÉMONSTRATION: Il est clair que (i) implique (ii), (iii), (iv) et (v).

Soit $N \in \mathbb{N}$, $N \geqslant 1$. Montrons que si $|w - f|^{2N}$ est psh sur $D \times \mathbb{C}$, alors f est prh sur D. Notons par Δ le laplacian par rapport à la variable complexe z.

Remarquons d'abord que si $|w - f|^{2N}$ est psh sur $D \times \mathbb{C}$ alors f est continue sur D. Utilisant la méthode de fibration, on se ramène à $n = 1$.

$\forall\, \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(D)$, $\varphi \geqslant 0$ on a

$$\int |w - f(z)|^{2N} \Delta\varphi(z)\, dm_2(z) \geqslant 0 .$$

$$|w - f(z)|^{2N} = [\,|w|^2 - \overline{w}f(z) - w\overline{f}(z) + |f(z)|^2]^N .$$

Pour $w \in \mathbb{R}$, posons $g = f + \overline{f}$. On a

$$|w - f(z)|^{2N} = [w^2 - wg(z) + |f(z)|^2]^N =$$
$$= w^{2N} - w^{2N-1}g(z) + w^{2N-2}f_{2N-2}(z) + \ldots + f_0(z)$$

où $f_0, \ldots, f_{2N-2}$ sont des fonctions continues sur D qui s'expriment en fonction de $|f|$ et g.

Notons que si $P = a_0 + a_1 t + \ldots + a_{2N-2}t^{2N-2} + a_{2N-1}t^{2N-1}$ est un polynôme à coefficients réels et si $P \geqslant 0$ partout sur $\mathbb{R}$, alors $a_{2N-1} = 0$ (si t tend vers $(+\infty)$, on doit avoir $a_{2N-1} \geqslant 0$ et si t tend vers $(-\infty)$, on doit avoir $a_{2N-1} \leqslant 0$; donc $a_{2N-1} = 0$). On a $\int w^{2N} \Delta\varphi(z)\, \mathrm{dm}_2(z) = 0$.

Donc, pour tout $w \in \mathbb{R}$ et $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(D)$, $\varphi \geqslant 0$,

$$-w^{2N-1}\int g(z)\, \Delta\varphi(z)\, \mathrm{dm}_2(z) +$$
$$+ w^{2N-2}\int f_{2N-2}(z)\, \Delta\varphi(z)\, \mathrm{dm}_2(z) + \ldots + \int f_0(z)\, \Delta\varphi(z)\, \mathrm{dm}_2(z) \geqslant 0 .$$

D'où $\int g(z)\, \Delta\varphi(z)\, \mathrm{dm}_2(z) = 0$; g étant continue, donc g est harmonique sur D. Soit Ré(f) est harmonique sur D.

Une preuve similaire sera établite si $w \in i\mathbb{R}$, on prouve dans ce cas que $h = \mathrm{Im}(f)$ est harmonique sur D.

Il résulte que f est harmonique sur D.

Il s'ensuit par suite que (ii) et (iii) impliquent (i).

Pour (iv) implique (i) montrons que f est continue en tout point $z^0 \in D$.

Posons $w_0 = f(z^0)$, alors $k = |w_0 - f|$ est s.c.s en z^0. Donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ avec $\|z - z^0\| \leqslant \delta$ implique $|w_0 - f(z)| = |f(z^0) - f(z)| \leqslant \varepsilon$.

Donc f est continue en z^0. En utilisant la preuve plus haut, on démontre que f est prh sur D (remarquons que la propriété (iv) est moins fine que (ii)).

Pour (v) implique (i), notons que si $u : D \to \mathbb{R}_+$ avec $(u + u^2)$ est psh sur D, alors u^2 est psh sur D. En effet, si u^2 n'est pas psh sur D, alors u n'est pas psh sur D, donc $(u + u^2)$ n'est pas psh sur D. Ce qui est impossible.

Donc u^2 est psh sur D.

Il résulte que $|w - f|^2$ est psh sur $D(\forall w \in \mathbb{C})$. D'après (iv), f est prh sur D.

THÉORÈME 3: *Soient D un ouvert de $\mathbb{C}^n$, $f : D \to \mathbb{C}$ une fonction, $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et $u(z, w) = \operatorname{Log}(|w - f(z)| + \varepsilon)$ pour $(z, w) \in D \times \mathbb{C}$.*

Les propriétés suivantes sont équivalentes:

(i) *f est analytique sur D*;

(ii) $u \in \operatorname{psh}(D \times \mathbb{C})$;

(iii) *Il existe $s > 0$ avec $\operatorname{Log}(|w - f(z)|^s + \varepsilon)$ est* psh *sur $D \times \mathbb{C}$*;

(iv) $\forall s > 0$, $\operatorname{Log}(|w - f(z)|^s + \varepsilon)$ *est* psh *sur $D \times \mathbb{C}$*;

(v) $\forall s > 0$, $\operatorname{Log}\left(\dfrac{1}{|w - f(z)|^s} + \varepsilon\right)$ *est* psh *sur* $D \times \mathbb{C} | \{(z', w') : w' = f(z')\}$;

(vi) *Il existe une fonction holomorphe $g : D \to \mathbb{C}$ avec $[\operatorname{Log}(|w - f(z)|^s + \varepsilon) + \operatorname{Log}|w - g(z)|]$ est* psh *sur $D \times \mathbb{C}$ où $s > 0$*;

(vii) *Il existe $g : D \to \mathbb{C}$ holomorphe avec v, donnée par $v(z, w) = \operatorname{Log}(|w - f(z)|) - \operatorname{Log}|w - g(z)|$, est* psh *sur $D \times \mathbb{C} \backslash F$ où F est le graphe de g*;

(viii) *Il existe $g_1, \ldots, g_k : D \to \mathbb{C}$ holomorphes avec*

$$v_1(z, w) = \operatorname{Log}(|w - f(z)|) + \left(\sum_{j=1}^{k} \operatorname{Log}|w - g_j(z)|\right)$$

est psh *sur* $D \times \mathbb{C}$.

DÉMONSTRATION: (i) implique (ii) est triviale.

(iii) implique (i). e^u étant s.c.s sur $D \times \mathbb{C}$, donc $(e^u - \varepsilon)$ est s.c.s sur $D \times \mathbb{C}$ et par suite $(e^u - \varepsilon)^2$ est encore s.c.s sur $D \times \mathbb{C}$.

D'après le lemme 3, f est continue sur D.

Maintenant, notons que $e^u \in \operatorname{psh}(D \times \mathbb{C})$, donc $e^u - \varepsilon$ est positive et psh sur $D \times \mathbb{C}$. D'où $(e^u - \varepsilon)^2$ est encore psh. Posons $m = (e^u - \varepsilon)^2$, alors $m(., w) \in \operatorname{psh}(D)$ pour tout $w \in \mathbb{C}$.

Soit $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ une transformation $\mathbb{C}$-linéaire, alors $m(., w) \circ T = |w - f \circ T|^2$ est sh sur $T^{-1}(D)$. Notons par Δ le laplacian par rapport à la variable z. D'après la preuve du théorème 1, $f \circ T$ est harmonique pour toute $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ transformation $\mathbb{C}$-linéaire. D'où $f \in \operatorname{prh}(D)$.

On admet que D est simplement connexe (sinon on travaille localement). Notons $f = p + iq$, p est la partie réelle de f. choisissons $w_1 \in H(D)$, $w_1 = p + i\theta$ où $p = \operatorname{Ré}(w_1)$. En ajoutant à θ une constante réelle, on admet que $(\theta - q) > 0$ sur une boule ouverte $B(z^0, r)$ avec $\overline{B}(z^0, r) \subset D$ $(z^0, \in D$ et $r > 0)$.

$\operatorname{Log}(|w_1 - f| + \varepsilon) = \operatorname{Log}(\theta - q + \varepsilon) \geqslant \operatorname{Log}(\varepsilon) > -\infty$.

Donc $\operatorname{Log}(\theta - q + \varepsilon)$ est sousharmonique sur $B(z^0, r)$.

Compte tenu du fait que $(\theta - q + \varepsilon)$ est harmonique, alors sur $B(z^0, r)$,

$$\Delta \operatorname{Log}(\theta - q + \varepsilon) = -\frac{\|\operatorname{grad}(\theta - q + \varepsilon)\|^2}{(\theta - q + \varepsilon)^2} \leqslant 0\,,$$

d'autre part $\Delta \operatorname{Log}(\theta - q + \varepsilon) \geqslant 0$ sur $B(z^0, r)$. Il résulte que $\|\operatorname{grad}(\theta - q + \varepsilon)\| = 0$ et ceci implique que $(\theta - q + \varepsilon)$ est constante.

$\theta - q + \varepsilon = c$ où $c \in \mathbb{R}$, donc $q = \theta + \varepsilon + c$ et par suite $f = p + iq = p + i(c + \varepsilon) + i\theta = w_1 + i(c + \varepsilon)$ est alors holomorphe sur D($\|\,.\,\|$ est la norme euclidienne dans $\mathbb{C}^n$ et grad est le vecteur gradient).

(i) implique (iii) est triviale. Montrons (iii) implique (i). Par une similaire preuve comme plus haut, on prouve que f est continue.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ avec $2N \geqslant s$. L'application Ψ donnée par $\Psi(t) = t^{2N/s}$ étant convexe croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc $(|w - f(z)|^s)^{2N/s} = |w - f(z)|^{2N}$ est psh sur $D \times \mathbb{C}$.

D'après le lemme 4, f est prh sur D. Pour simplifier, on admet que $n = 1$.

Soit $z^0 \in D$, $f = p + iq$ où $p = \operatorname{Ré}(f)$. Notons que p est harmonique. Soit aussi $r > 0$ avec $\overline{D}(z^0, 2r) \subset D$.

Choisissons $w_1 = (p + i\theta)$ holomorphe sur $D(z^0, 2r)$ où $p = \operatorname{Ré}(w_1)$ et $\theta > q + [\varepsilon|s - 1|]^{1/s}$ sur $D(z^0, r)$.

Notons $v_1 = \operatorname{Log}(|w_1 - f|^s + \varepsilon) = \operatorname{Log}((\theta - q)^s + \varepsilon)$.

v_1 est sousharmonique sur $D(z^0, 2r)$. Sur $D(z^0, r)$, on a

$$\frac{\partial v_1}{\partial z} = \frac{s\left(\dfrac{\partial \theta}{\partial z} - \dfrac{\partial q}{\partial z}\right)(\theta - q)^{S-1}}{(\theta - q)^S + \varepsilon}\,,$$

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial \bar{z}\,\partial z} =$$

$$= \frac{s(s-1)\left|\dfrac{\partial \theta}{\partial z} - \dfrac{\partial q}{\partial z}\right|^2 (\theta - q)^{s-2}((\theta - q)^s + \varepsilon) - s^2\left|\dfrac{\partial \theta}{\partial z} - \dfrac{\partial q}{\partial z}\right|^2 (\theta - q)^{(2s-2)}}{((\theta - q)^s + \varepsilon)^2} =$$

$$= \frac{s\left|\dfrac{\partial \theta}{\partial z} - \dfrac{\partial q}{\partial z}\right|^2 (\theta - q)^{s-2}[\varepsilon(s-1) - (\theta - q)^s]}{((\theta - q)^s + \varepsilon)^2}$$

($(\theta - q)$ étant harmonique).

Remarquons que $\dfrac{\partial^2}{\partial\bar{z}}\ \dfrac{v_1}{\partial z} \leqslant 0$. D'autre part $\dfrac{\partial^2}{\partial\bar{z}}\ \dfrac{v_1}{\partial z} \geqslant 0$. Il résulte que $\dfrac{\partial^2 v_1}{\partial\bar{z}\,\partial z} = 0$ sur $D(z^0, r)$. Maintenant $\theta > q + [\varepsilon|s-1|]^{1/s}$, donc $(\theta - q) > 0$ et $\varepsilon(s-1) - (\theta - q)^s < 0$ sur $D(z^0, r)$. Ce qui implique que $\dfrac{\partial\theta}{\partial z} - \dfrac{\partial q}{\partial z} = \dfrac{\partial}{\partial z}(\theta - q) = 0$.

$(\theta - q)$ est à valeurs réelles, donc $(\theta - q)$ est constante, soit $q = \theta + c$ où $c \in \mathbb{R}$. D'où $f = p + iq = p + i\theta + ic = (w_1 + ic)$ est holomorphe.

Le cas $n \geqslant 2$ peut être résolu en utilisant le théorème de Hartogs (cf. [6]).

Les propriétés (i) et (iv) sont équivalentes en faisant une preuve analogue dans le cas de l'identité entre les propriétés (i) et (iii).

(i) implique (v), f étant holomorphe, donc $(z, w) \mapsto \dfrac{1}{w - f(z)}$ est analytique sur $D \times \mathbb{C} \setminus E$ où $E = \{z', w') \in D \times \mathbb{C} : w' = f(z')\}$.

Donc $s\,\mathrm{Log}\left|\dfrac{1}{w - f(z)}\right| = \mathrm{Log}\left(\dfrac{1}{|\mathrm{w} - \mathrm{f(z)}|^s}\right)$ est psh sur $D \times \mathbb{C} \setminus E$, d'après Hörmander [6] u, donnée par $u(z, w) = \mathrm{Log}\left(\dfrac{1}{|w - f(z)|^s} + \varepsilon\right)$, est psh sur $D \times \times \mathbb{C} \setminus E$. Pour (v) implique (i), notons que pour tout $(z^0, w_0) \in E$, en choisissant $r > 0$ avec $B(z^0, r) \subset D$, $B(z^0, r) \times \mathbb{C} \setminus E$ est pseudo-convexe. En effet, soit $u_1 \in \mathrm{psh}\,(B(z^0, r) \times \mathbb{C})$ avec pour tout $(\xi, \zeta) \in \partial B(z^0, r) \times \mathbb{C}$, $\overline{\lim\limits_{\substack{(z, w) \to (\xi, \zeta) \\ ((z, w) \in B(z^0, r) \times \mathbb{C})}}}\ u_1(z, w) = +\infty$. De plus remarquons que $u \in \mathrm{psh}\,(B(z^0, r) \times \mathbb{C} \setminus E)$ et tendant vers $+\infty$ en tout point de E. Alors $(u + u_1) \in \mathrm{psh}\,(B(z^0, r) \times \mathbb{C} \setminus E)$ et de plus pour tout $(\xi, \zeta) \in \partial(B(z^0, r) \times \mathbb{C} \setminus E) = \partial B(z^0, r) \times \mathbb{C} \cup E_1$ où $E_1 = B(z^0, r) \times \mathbb{C} \cap E$,

$$\overline{\lim\limits_{\substack{(z, w) \to (\xi, \zeta) \\ ((z, w) \in B(z^0, r) \times \mathbb{C}\setminus E)}}}\ (u(z, w) + u_1(z, w)) = +\infty\,.$$

D'après (Henkin [5] Theorem 1.5.7 et Theorem 1.5.5), $D \times \mathbb{C} \setminus E$ est pseudo-convexe et ceci implique que f est analytique d'après le théorème de Hartogs.

(i) implique (vi) est bien connue. Pour (vi) implique (i), prouvons d'abord que f est continue. Soit $z^0 \in D$. On fixe $r > 0$ avec $\overline{B}(z^0, r) \subset D$. $g(\overline{B}(z^0, r))$ étant compact dans $\mathbb{C}$, soit donc $R > 0$ tel que $g(\overline{B}(z^0, r)) \subset D(0, R)$. Il résultera alors que u_1, définie par $u_1(z, w) = \mathrm{Log}\,|w - g(z)|$, est continue sur $B(z^0, r) \times [\mathbb{C} \setminus \overline{D}(0, R)]$. Ceci implique que u_2, donnée par $u_2(z, w) = \mathrm{Log}\,(|w - f(z)|^s + \varepsilon)$, est s.c.s sur $B(z^0, r) \times \times [\mathbb{C} \setminus \overline{D}(0, R)]$. En particulier $(e^{u_2} - \varepsilon)$ est s.c.s sur $B(z^0, r) \times [\mathbb{C} \setminus \overline{D}(0, R)]$. Donc u_3, définie par $u_3(z, w) = |w - f(z)|$, est s.c.s sur $B(z^0, r) \times [\mathbb{C} \setminus \overline{D}(0, R)]$. Le lemme 3 implique que f est continue sur $B(z^0, r)$. Remarquons que $u_1 \in \mathrm{prh}\,(B(z^0, r) \times \times [\mathbb{C} \setminus \overline{D}(0, R)])$ donc il résulte que $u_2 \in \mathrm{psh}\,(B(z^0, r) \times [\mathbb{C} \setminus \overline{D}(0, R)])$. En particulier, $e^{u_2} \in \mathrm{psh}\,(B(z^0, r) \times [\mathbb{C} \setminus \overline{D}(0, R)])$. Ceci implique que $f \in \mathrm{prh}\,(B(z^0, r))$.

Utilisant le théorème de Hartogs (cf. [6]), on se ramène à $n = 1$. En utilisant les notations de la preuve (iii) implique (i) et en ajoutant à θ une constante $c_1 > 0$ de manière à obtenir θ à valeurs dans $\mathbb{C} \setminus \overline{D}(0, R)$, on déduit l'analyticité de f.

(i) implique (vii) est connue. Pour la réciproque, notons alors que $u_2(z, w) =$

$= \mathrm{Log}\,|w - g(z)|$ est prh sur $D \times \mathbb{C} \backslash F$. D'où $u_1(z, w) = \mathrm{Log}\,|w - f(z)|$ est s.c.s sur $D \times \mathbb{C} \backslash F$. Soit $z^0 \in D$. Fixons $r > 0$ avec $\overline{B}(z^0, r) \subset D$. $g(\overline{B}(z^0, r))$ étant compact dans $\mathbb{C}$, soit donc $R > 0$ avec $g(\overline{B}(z^0, r)) \subset D(0, R)$. D'où e^{u_1} est s.c.s sur $B(z^0, r) \times$ $\times [\mathbb{C} \backslash \overline{D}(0, R)]$. Donc e^{2u_1} est s.c.s sur $B(z^0, r) \times [\mathbb{C} \backslash \overline{D}(0, R)]$. D'après le lemme 3, f est continue sur $B(z^0, r)$.

Maintenant $u_1 \in \mathrm{psh}\,(D \times \mathbb{C} \backslash F)$ et localement majorée à travers F, donc u_1 se prolonge en une fonction $u_1^* \in \mathrm{psh}\,(D \times \mathbb{C})$.

e^{u_1} étant continue sur $D \times \mathbb{C}$, donc $e^{u_1} \in \mathrm{psh}\,(D \times \mathbb{C})$.

$e^{u_1} = e^{u_1^*}$ sur $D \times \mathbb{C} \backslash F$, donc $e^{u_1} = e^{u_1^*}$ presque partout sur $D \times \mathbb{C}$. Il résulte que $e^{u_1} = e^{u_1^*}$ partout sur $D \times \mathbb{C}$. Donc $u_1 = u_1^*$ sur $D \times \mathbb{C}$.

D'où u_1 est psh sur $D \times \mathbb{C}$. D'après Abidi [1], f est analytique sur D.

Remarquons que si $(z, w) \mapsto \mathrm{Log}\,(|w - f(z)| + \varepsilon) - \mathrm{Log}\,|w - g(z)|$ est psh sur $D \times \mathbb{C} \backslash F$, alors f est analytique sur D.

(i) implique (viii) est triviale. Pour la réciproque on l'établira de manière analogue comme plus haut.

Plus généralement, on a:

Proposition 2: *Soit D un ouvert de $\mathbb{C}^n$, $f: D \to \mathbb{C}$ une fonction. Supposons que $v(z, w) = \mathrm{Log}\,(|w - f(z)|) + |w - f(z)|$ est psh sur $D \times \mathbb{C}$.*

Alors f est analytique sur D.

Démonstration: On établit d'abord l'assertion suivante:

Soit $u : D \to [0, +\infty[$ une fonction. Si $[u + \mathrm{Log}\,(u)] \in \mathrm{psh}\,(D)$, alors $u \in \mathrm{psh}\,(D)$. Soit $h(t) = t + \mathrm{Log}\,(t)$ pour $t > 0$.

$h(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}$, h est strictement croissante, h est aussi C^∞.

Donc h^{-1}: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ est strictement croissante. Notons aussi que h est strictement concave sur $\mathbb{R}_+^*$, donc h^{-1} est strictement convexe sur $\mathbb{R}$.

Notons $v = u + \mathrm{Log}\,(u)$.

v étant psh sur D, donc $h^{-1}(v) = u$ est psh sur D.

Il arrive que $(z, w) \in D \times \mathbb{C} \mapsto |w - f(z)|$ est psh sur $D \times \mathbb{C}$. D'après Abidi [1], $f \in \mathrm{prh}\,(D)$. Soit $z^0 \in D$, $r > 0$ avec $\overline{B}(z^0, r) \subset D$. Soit $w_1 = p + i\theta$, $f = p + iq$ où $p = \mathrm{Ré}\,(f) = \mathrm{Ré}\,(w_1)$ et $w_1 \in H(B(z^0, r))$.

En ajoutant à θ une constante réelle, on admet que $(\theta - q)(z^0) = 0$.

$\mathrm{Log}\,(|w_1 - f|) + |w_1 - f| = k$ est plurisousharmonique ou identique à $(-\infty)$ sur $B(z^0, r)$. D'après le lemme 1,

$$\{z \in B(z^0, r) : |(w_1 - f)(z)| = 0\} = \{z \in B(z^0, r) : (\theta - q)(z) = 0\}$$

n'est pas polaire. Il résulte donc $k = -\infty$ sur $B(z^0, r)$. Ce qui implique que $w_1 = f$ sur $B(z^0, r)$.

En particulier f est analytique sur $B(z^0, r)$.

On termine cette preuve par la remarque suivante. Soit $u_1(z) = |z|^2 - 1$ pour $z \in D = \mathbb{C} \backslash \overline{D}(0, \sqrt{2})$.

$[u_1 + \mathrm{Log}(u_1)]$ est sousharmonique sur D mais $\mathrm{Log}(u_1)$ n'est sousharmonique en aucun point de D. On pourra aussi remarquer que si $u_2: D_1 \to [-\infty, +\infty[$ avec $[u_2 + e^{u_2}]$ est psh sur l'ouvert D_1 de $\mathbb{C}^n$, alors $e^{u_2} \in \mathrm{psh}(D_1)$.

REMARQUE 4: *a*) Soit $u(z, w) = \mathrm{Log}(|w - \bar{z}|^2 + |w|^2)$. Posons

$$w_1(z) = z, \qquad z = x + iy, \qquad x = \mathrm{Ré}(z).$$

$$u(z, w_1(z)) = \mathrm{Log}(x^2 + 5y^2) = v(z).$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(z) + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(z) = \frac{8x^2 - 40y^2}{(x^2 + 5y^2)}.$$

D'où v n'est pas sousharmonique sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

b) Nous donnons une réponse négative au petit problème suivant:

Soient u et $v: D \to \mathbb{R}_+^*$ avec $\mathrm{Log}(u + v)$ est psh et $\mathrm{Log}(v)$ est prh sur D. A-t-on $\mathrm{Log}(u) \in \mathrm{psh}(D)$ (D étant un domaine dans $\mathbb{C}^n$)?

Soit $u(z) = x^2$ pour $z = x + iy$ et $v(z) = 1$.

$\mathrm{Log}(u + v) = \mathrm{Log}(u + 1)$ est sousharmonique sur $]-1, 1[\times \mathbb{R} = D$;

$\mathrm{Log}(v) = 0 \in \mathrm{prh}(D)$. Mais $\mathrm{Log}(u)$ n'est sousharmonique en aucun point de D.

THÉORÈME 4: *Soit D un domaine de $\mathbb{C}^n$. $f: D \to \mathbb{C}$ une fonction continue. Supposons que pour tout polynôme p holomorphe sur $\mathbb{C}^n$, il existe $u \in \mathrm{psh}(D)$ avec $u \leqslant \mathrm{Log}|f - p| \leqslant u + c$ où c est une constante positive (pour $p \neq f$). Alors, pour toute $g: D \to \mathbb{C}$ analytique ($g \neq f$), $\{z \in D : f(z) = g(z)\}$ est fermé pluripolaire dans D.*

DÉMONSTRATION: Soit $g \in H(D)$. On admet que $\overline{B}(0, 1) \subset D$.

Soit $(p_j)_{j \geqslant 0}$ une suite de polynômes holomorphes avec $\sup\limits_{\overline{B}(0,1)} |g - p_j| < \dfrac{1}{2^{2^j}}$ pour tout $j \geqslant 0$. Supposons que $f \neq g$. Soit $z^0 \in B(0, 1)$ avec $|f(z^0) - g(z^0)| > r > 0$. Sans perte de généralité on admet que $|f(z^0) - p_j(z^0)| > r$ pour tout $j \geqslant 0$ et choisissons $u_j \in \mathrm{psh}(D)$ avec $u_j \leqslant \mathrm{Log}|f - p_j| \leqslant u_j + c$.

Soit $M > 0$ avec $|f(z) - p_j(z)| \leqslant M$ pour tout $j \geqslant 0$ et $z \in B(0, 1)$. On a

$$\mathrm{Log}(r) \leqslant \mathrm{Log}|f(z^0) - p_j(z^0)| \leqslant$$
$$\leqslant u_j(z^0) + c \leqslant \mathrm{Log}|f(z^0) - p_j(z^0)| + c \leqslant \mathrm{Log}(M) + c.$$

Donc $-c + \mathrm{Log}(r) \leqslant u_j(z^0) \leqslant \mathrm{Log}(M)$. D'où $(u_j(z^0))_{j \geqslant 0}$ est une suite bornée.

Soit $c_j = \dfrac{1}{2^j}$ et $s_k = \sum\limits_{j=0}^{k} c_j u_j$. On a $s_k = \sum\limits_{j=0}^{k} c_j(u_j - M) + \sum\limits_{j=0}^{k} c_j M$ et notons que $\left(\sum\limits_{j=0}^{k} c_j(u_j - M)\right)_{k \geqslant 0}$ est une suite décroissante de fonctions plurisousharmoniques.

$$\sum_{j \geqslant 0} c_j |u_j(z^0) - M| = \sum_{j \geqslant 0} c_j(M - u_j(z^0)) =$$
$$= \sum_{j \geqslant 0} c_j M - \sum_{j \geqslant 0} c_j u_j(z^0) \leqslant \sum_{j \geqslant 0} c_j M + \sum_{j \geqslant 0} c_j(c - \log(r)) < +\infty.$$

Notons $u = \lim\limits_{k \to +\infty} s_k$.

Alors $u \in \operatorname{psh}(B(0,1))$, de plus $u \leqslant \sum_{j \geqslant 0} c_j \operatorname{Log}|f-p_j| \leqslant u + c$.

Soit $\xi_0 \in B(0,1)$, $g(\xi_0) = f(\xi_0)$.

$u(\xi_0) \leqslant \sum_{j \geqslant 0} c_j \operatorname{Log}|f(\xi_0) - p_j(\xi_0)| =$

$$= \sum_{j \geqslant 0} c_j \operatorname{Log}|g(\xi_0) - p_j(\xi_0)| \leqslant \sum_{j \geqslant 0} \frac{1}{2^j}(-2^j \operatorname{Log}(2)) = -\infty .$$

D'où $u(\xi_0) = -\infty$. Il résulte que

$$\{z \in B(0,1) : g(z) = f(z)\} \subset \{z \in B(0,1) : u(z) = -\infty\} .$$

Donc $\{z \in B(0,1) : g(z) = f(z)\}$ est pluripolaire. Donc $E = \{z \in D : g(z) = f(z)\}$ est localement pluripolaire. D'après Josefson [7], E est pluripolaire.

Remarque 5: Pour D domaine dans $\mathbb{C}^n$, soit $f: D \to \mathbb{C}$ une fonction. Supposons que pour tout polynôme p holomorphe sur $\mathbb{C}^n$ $(p \neq f)$, $\operatorname{Log}|f-p|$ est psh sur D. Alors f est analytique sur D. Nous démontrons sans peine ce résultat. Remarquons d'abord que pour tout $a \in \mathbb{C}$, $|a-f| \in \operatorname{psh}(D)$, d'après Abidi [1], $f \in \operatorname{prh}(D)$. Soit L un sous-ensemble compact inclus dans $D \backslash E$ où $E = \{z \in D : g(z) = f(z)\}$ et $g: D \to \mathbb{C}$ holomorphe $(g \neq f)$. Soit $(p_j)_{j \geqslant 0}$ une suite de polynômes holomorphes convergeant uniformément localement vers g. Alors la suite $(\operatorname{Log}|f-p_j|)_{j \geqslant 0}$ converge uniformément au voisinage de L vers $\operatorname{Log}|f-g|$; $\operatorname{Log}|f-g|$ étant continue sur $D \backslash E$, donc $\operatorname{Log}|f-g|$ est psh sur $D \backslash E$. Soit $z^0 \in E$. Pour tout $b \in \mathbb{C}^n$ et $r > 0$ avec $[z^0 + r\overline{D}(0,1)\, b] \subset D$, on a

$$-\infty = \operatorname{Log}|f(z^0) - g(z^0)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Log}|(f-g)(z^0 + re^{i\theta} b)|\, d\theta .$$

Il résultera par suite que $\operatorname{Log}|f-g| \in \operatorname{psh}(D)$. Le reste de la preuve découle du théorème 1.

Corollaire 3: *Soit D un domaine de $\mathbb{C}^n$, $f: D \to \mathbb{C}$ une fonction n-harmonique et ε un nombre réel strictement positif. On a les équivalences suivantes*:

(i) *f est analytique sur D*;

(ii) $\forall g : \Delta^{(n)}(z^0, r) \to \mathbb{C}$ *holomorphe et* $g(z^0) \neq f(z^0)$, *il existe une fonction* $u \in \operatorname{psh}(\Delta^{(n)}(z^0, r))$, $u(z^0) > -\infty$ *et* $\{z \in \Delta^{(n)}(z^0, r) : f(z) = g(z)\} \subset \{z \in \Delta^{(n)}(z^0, r) : u(z) = -\infty\}$ $(\Delta^{(n)}(z^0, r) \subset D)$;

(iii) $\{z \in \Delta^{(n)}(z^0, r) : f(z) = g(z)\}$ *est pluripolaire complet pour* $\Delta^{(n)}(z^0, r) \subset D$ *et pour toute* $g \in H\ (\Delta^{(n)}(z^0, r))$ et $g \neq f$;

(iv) $\forall z^0 = (z_1^0, \dots, z_n^0) \in D$, $\forall j \in \{1, \dots, n\}$, $\forall p$ *polynôme holomorphe sur*

$\mathbb{C}$, $\exists c > 0$ *et* $u \in \operatorname{sh}(D(Z_j^0))$ *avec* $u \leqslant \operatorname{Log}|f(.\,, Z_j^0) - p| \leqslant u + c$ *sur les composantes connexes de* $D(Z_j^0)$ *où* $\operatorname{Log}|f(.\,, Z_j^0) - p| > -\infty$;

(v) $\forall z^0 \in D$, $\forall j \in \{1, \ldots, n\}$, $\forall p$ *polynôme holomorphe sur* $\mathbb{C}$, $\exists c > 0$ *et une fonction* u (*ε-sousharmonique sur* $D(Z_j^0)$) *avec* $u \leqslant \operatorname{Log}|f(.\,, Z_j^0) - p| \leqslant u + c$ *sur les composantes connexes de* $D(Z_j^0)$ *où* $f(.\,, Z_j^0) \neq p$;

(vi) $\exists g : D \to \mathbb{C}$ *holomorphe avec* $[\operatorname{Log}|f - p| + \operatorname{Log}|g - p|]$ *est psh sur* D *pour tout polynôme* p *holomorphe sur* C^n, $p \neq f$ et $p \neq g$.

Notons que quelques assertions du corollaire 3 généralise vaguement certaines du théorème 1 (par exemple la condition (iv) du corollaire 3 est plus générale que l'assertion (8) du théorème 1).

Notons aussi les remarques importantes suivantes. Soit D un domaine de C^n. $f : D \to \mathbb{C}$ une fonction. Si pour tout polynôme p holomorphe sur $\mathbb{C}^n$ $(p \neq f)$, $[\,|f - p| + \operatorname{Log}|f - p|\,]$ est psh sur D, alors f est analytique sur D.

L'assertion, il existe $c \in \mathbb{R}_+^*$ avec pour tout polynôme p holomorphe sur $\mathbb{C}^n$ $(p \neq f)$, il existe $u \in \operatorname{psh}(D)$ vérifiant $u \leqslant |f - p| + \operatorname{Log}|f - p| \leqslant u + c$ et f pluriharmonique sur D, implique que f est analytique sur D.

Remarquons de plus que si f est harmonique à valeurs réelles avec pour tout polynôme p holomorphe sur $\mathbb{C}^n$ $(p \neq f)$, $\{z \in D : f(z) = p(z)\}$ est pluripolaire, alors f est constante. Notons aussi la remarque suivante: Si $f = f_1 + iq_1$ où f_1 et $q_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ harmoniques avec q_1 est un polynôme. Si $\{z \in D : f(z) = p(z)\}$ est polaire pour tout polynôme holomorphe sur $\mathbb{C}$ $(p \neq f)$, alors f est un polynôme analytique sur $\mathbb{C}$.

Démonstration: (i) implique (ii) est bien connue. Pour la réciproque, notons que le cas $n = 1$ est couvert par le théorème 1 (observer à ce sujet la preuve entre l'équivalence des assertions (1) et (3) et remarquer que les hypothèses $f(z^0) \neq g(z^0)$, $u(z^0) > -\infty$ sont inutiles. Aussi il suffit que $\{z \in \Delta^{(n)}(z^0, r) : f(z) = g(z)\}$ soit polaire pour $f \neq g$). Pour le cas $n \geqslant 2$, notons que $f(.\,, Z_1^0)$ est harmonique sur $D(z_1^0, r)$. Supposons que $f(.\,, Z_1^0)$ n'est pas analytique sur $D(z_1^0, r)$. Soit g_1 analytique sur $D(z_1^0, r)$ de manière que $\operatorname{Ré}(g_1) = \operatorname{Ré} f(.\,, Z_1^0)$. En ajoutant à g_1 une constante imaginaire pure, on admet que $g_1(z_1^0) \neq f(z_1^0, Z_1^0) = f(z^0)$ et $\{z_1 \in \Delta(z_1^0, r) : g_1(z_1) = f(z_1, Z_1^0)\}$ est non vide. Notons pour $z = (z_1, Z_1) \in \Delta^{(n)}(z^0, r)$, $g(z) = g_1(z_1)$. g est analytique sur $\Delta^{(n)}(z^0, r)$ et $g(z^0) \neq f(z^0)$. Soit donc $u \in \operatorname{psh}(\Delta^{(n)}(z^0, r))$, $u(z^0) > -\infty$ et $z \in \Delta^{(n)}(z^0, r)$ avec $f(z) = g(z)$ implique $u(z) = -\infty$.

$u(z_1^0, Z_1^0) > -\infty$, il résulte que $u(.\,, Z_1^0) \in \operatorname{sh}(D(z_1^0, r))$.

Remarquons que $\{z_1 \in D(z_1^0, r) : g(z_1) = f(z_1, Z_1^0)\} \subset \{z_1 \in D(z_1^0, r) : u(z_1, Z_1^0) = -\infty\}$. D'après le lemme 1, $\{z_1 \in D(z_1^0, r) : g(z_1) = f(z_1, Z_1^0)\}$ est non polaire. Donc $\{z_1 \in D(z_1^0, r) : u(z_1, Z_1^0) = -\infty\}$ est non polaire. D'où la contradiction. Il résulte que $f(.\,, Z_1^0)$ est analytique sur $D(z_1^0, r)$. De manière similaire, on démontre que $f(.\,, Z_j)$ est analytique sur $D(z_j^0, r)$ pour $j \in \{1, \ldots, n\}$ et $Z_j \in \Delta^{(n-1)}(Z_j^0, r)$. D'après le théorème de Hartogs (cf. Hörmander [6]), f est analytique (complexe) sur

$\Delta^{(n)}(z^0, r)$. Rappelons que f est analytique réelle sur D, ceci implique que f est analytique sur D (ouvert connexe).

(i) implique (iii) est déjà connue. Pour la réciproque, supposons que $f(., z_1^1)$ n'est pas analytique sur $D(z_1^0, r)$ où $Z_1^1 \in \Delta^{(n-1)}(Z_1^0, r)$. Choisissons g_1 analytique sur $D(z_1^0, r)$ avec $\text{Ré}\,(g_1) = \text{Ré}\,(f(., Z_1^1))$. Pour $z = (z_1, Z_1) \in \Delta^{(n)}(z^0, r)$, soit $g(z) = g_1(z_1)$.

Soit $z_1^1 \in D(z_1^0, r)$ avec $g_1(z_1^1) \neq f(z_1^1, Z_1^1)$.

Soit $u \in \text{psh}\,(\Delta^{(n)}(z^0, r))$ avec

$$\{z \in \Delta^{(n)}(z^0, r) : u(z) = -\infty\} = \{z = (z_1, Z_1) \in \Delta^{(n)}(z^0, r) : g_1(z_1) = f(z_1, Z_1)\}.$$

Notons que $g(z_1^1, Z_1^1) \neq f(z_1^1, Z_1^1)$, donc $u(z_1^1, Z_1^1) > -\infty$ et par suite $u(., Z_1^1) \in sh\,(D(z_1^0, r))$.

$$\{z_1 \in D(z_1^0, r) : u(z_1, Z_1^1) = -\infty\} = \{z_1 \in D(z_1^0, r) : g(z_1) = f(z_1, Z_1^1)\}$$

est non polaire en vertu du lemme 1. D'où la contradiction.

(i) implique (iv) étant triviale. Pour la réciproque fixons $z^0 = (z_1^0, Z_1^0) \in D$, $r > 0$ avec $\Delta^{(n)}(z^0, r) \subset D$. D'après le théorème 4, pour toute g analytique sur $D(z_1^0, r)$, $g \neq f(., Z_1^0)$, $\{z_1 \in D(z_1^0, r) : f(z_1, Z_1^0) = g(z_1)\}$ est polaire. En choisissant la meilleure fonction g_1 comme dans les preuves précédentes, on obtient une contradiction par application du lemme 1. Notons que (iv) et (v) sont équivalentes car toute v_1 fonction ε-sousharmonique, il existe v_0 sousharmonique avec $v_0 \leq v_1 \leq v_0 + \varepsilon$.

(i) implique (vi) étant triviale. Pour la réciproque, on notera que $E = \{z \in D : g(z) = p(z)\}$ est pluripolaire fermé dans D pour p polynôme holomorphe, $p \neq f$ et $p \neq g$. Sur $D \backslash E$, $\text{Log}\,|g - p|$ étant pluriharmonique, donc $\text{Log}\,|f - p|$ est psh sur $D \backslash E$. Il résultera alors que $\text{Log}\,|f - p|$ est psh sur D. En effet, remarquons d'abord que $|f - p| \in \text{psh}\,(D \backslash E) \cap \mathcal{C}(D)$, donc $|f - p| \in \text{psh}\,(D) \cap \mathcal{C}(D)$. D'autre part, $\text{Log}\,|f - p| \in \text{psh}\,(D \backslash E)$ et est localement majorée à travers E. Donc elle se prolonge en une unique fonction $v \in \text{psh}\,(D)$. Il arrive que $e^v = |f - p|$ presque partout sur D (relative à la mesure de Lebesgue), donc $e^v = |f - p|$ partout sur D. Ceci implique que $\text{Log}\,|f - p| \in \text{psh}\,(D)$. Ainsi, pour tout polynôme p holomorphe sur $\mathbb{C}^n$ ($p \neq f$ et $p \neq g$), $\text{Log}\,(|f - p|) \in \text{psh}\,(D)$. D'après le théorème 1, f est analytique sur D.

Remarque 6: Soit D un domaine dans $\mathbb{C}^n$, $f : D \to \mathbb{C}$ une fonction continue et $A = \{p_j : j \in \mathbb{N}\}$ une suite de polynômes holomorphes sur $\mathbb{C}^n$. Si $\text{Log}\,|f - p|$ est psh sur $D \backslash \{z \in D : f(z) = p(z)\}$ pour p polynôme holomorphe sur C^n et $p \notin A$. Alors f est analytique sur D.

Remarquons aussi que si pour tout $z^0 \in D$ il existe K compact dans $\mathbb{C}$ avec $|f - a|$ est s.c.s au voisinage de z^0 pour tout $a \in \mathbb{C} \backslash K$, alors f est continue sur D.

Notons que la première propriété se démontre en se ramenant d'abord à $D = B(0, 1)$. Maintenant en utilisant, pour g analytique sur $B(0, 1)$ ($g \neq f$), une suite de polynômes ne contenant aucun élément de A et convergeant uniformément vers g sur les compacts de $B(0, 1)$. On vérifie sans peine que $\text{Log}\,(|f - g|) \in \text{psh}\,(D)$. Ceci implique, d'après le théorème 1, que $f \in H(D)$. Pour la seconde remarque, notons que pour $z^0 \in D$ et $r > 0$ avec $\overline{B}(z^0, r) \subset D$, soit K compact dans $\mathbb{C}$ avec $|f - a|$ est s.c.s sur $B(z^0, r)$ pour tout $a \in C \setminus K$ (donc $|f - a|^2$ l'est aussi). Soit $j_0 \in \mathbb{N}$ avec $K \subset D(0, j_0)$. Remarquons que $|f - a|^2 - |a|^2 = [|f|^2 - \overline{a}f - a\overline{f}]$ est s.c.s sur $B(z^0, r)$. D'après le lemme 3, f est continue sur D.

REMARQUE 7: Les propriétés (ii) et (iii) du corollaire 3 peuvent être remplacées par: Il existe $z^0 \in D$, $r > 0$ avec $\Delta^{(n)}(z^0, r) \subset D$ et pour toute $g \in H(\Delta^{(n)}(z^0, r))$, $g \neq f$, il existe une fonction $u \in \mathrm{psh}(\Delta^{(n)}(z^0, r))$ et $\{z \in \Delta^{(n)}(z^0, r) : f(z) = g(z)\} \subset \subset \{z \in \Delta^{(n)}(z^0, r) : u(z) = -\infty\}$.

THÉORÉME 5: *Soit D un ouvert de* $\mathbb{C}^n$, $f: D \to \mathbb{C}$ *une fonction continue. Supposons qu'il existe* $u \in \mathrm{psh}(D \times \mathbb{C})$ *avec* $u(z, w) \leq \mathrm{Log}\,|w - f(z)|$ *pour* $(z, w) \in D \times \mathbb{C}$. *Alors f est analytique sur D.*

DÉMONSTRATION: Pour $z^0 \in D$ et $u(z^0, .) \in \mathrm{sh}(\mathbb{C})$, on note $v_1(w) = \mathrm{Log}\,|w - f(z^0)|$ pour $w \in \mathbb{C}$. Notons que $v_1 \in h(\mathbb{C} \setminus \{f(z^0)\}) \cap \mathrm{sh}(\mathbb{C})$. Donc $u(z^0, .) - v_1$ est une fonction sousharmonique sur $\mathbb{C} \setminus \{f(z^0)\}$ et négative. Elle se prolonge donc en une fonction sousharmonique et négative sur $\mathbb{C}$, notée encore $u(z^0, .) - v_1$.

Il existe donc un unique $c \in \mathbb{R}_-$ avec $u(z^0, w) - \mathrm{Log}\,|w - f(z^0)| = c$ pour $w \in \mathbb{C} \setminus \{f(z^0)\}$. Donc $u(z^0, w) = \mathrm{Log}\,|w - f(z^0)| + c$ pour tout $w \in \mathbb{C}$.

Ce qui implique que pour tout $z \in D$ avec $u(z, .) \in \mathrm{sh}(\mathbb{C})$, il existe un unique réel négatif noté $c(z)$ avec $u(z, w) = \mathrm{Log}\,|w - f(z)| + c(z)$.

Si $u(z, w) = -\infty$ pour tout $w \in \mathbb{C}$, on pose $c(z) = -\infty$.

Ceci permet donc de définir une application $c: D \to [-\infty, 0]$.

Soit $z^0 \in D$, $r > 0$ tel que $\overline{B}(z^0, r) \subset D$.

$f(\overline{B}(z^0, r))$ étant compact dans $\mathbb{C}$, soit donc $R > 0$ tel que $f(\overline{B}(z^0, r)) \subset \subset D(0, R)$.

Notons que c est s.c.s sur D. En effet, pour $|w| \geq R$ et pour tout $z \in B(z^0, r)$, $c(z) = u(z, w) - v_2(z, w)$ où $v_2(z, w) = \mathrm{Log}\,|w - f(z)|$.

Remarquons de plus que u et v_2 sont respectivement s.c.s et continue sur $D(z^0, r) \times [\mathbb{C} \setminus \overline{D}(0, R)]$. Donc, c est même s.c.s sur D. Remarquons aussi que c est localement intégrable sur D. Maintenant, montrons que f est analytique sur $B(z^0, r)$.

1ère étape: $n = 1$. $f(\overline{D}(z^0, r))$ étant compact dans $\mathbb{C}$, soit donc $R > 0$ avec $f(\overline{D}(z^0, r)) \subset D(0, R)$.

Donc, $\forall w \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}(0, R)$, on a $w \neq f(z)$ pour tout $z \in D(z^0, r)$.

Soit $\varphi_1 \in \mathcal{C}_c^\infty(D(z^0, r))$, $\varphi_2 \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{C} \setminus \overline{D}(0, R))$ avec $\varphi_1 \geq 0$ et $\varphi_2 \geq 0$.

Posons $\varphi(z, w) = \varphi_1(z)\,\varphi_2(w)$ pour $(z, w) \in D(z^0, r) \times [\mathbb{C} \setminus \overline{D}(0, R)]$.

On a, $\forall b_1,\ b_2 \in \mathbb{C}$;

$$\int \operatorname{Log}|w-f(z)|\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial\bar z\,\partial z}\,(z,w)\,dm_4(z,w)\,b_1\bar b_1 + \int c(z)\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial\bar z\,\partial z}\,(z,w)\,dm_4(z,w)\,b_1\bar b_1 +$$

$$+\int \operatorname{Log}|w-f(z)|\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial\bar z\,\partial w}\,(z,w)\,dm_4(z,w)\,\bar b_1 b_2 +$$

$$+\int \operatorname{Log}|w-f(z)|\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\,\partial\bar w}\,(z,w)\,dm_4(z,w)\,b_1\bar b_2 +$$

$$+\int \operatorname{Log}|w-f(z)|\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial w\,\partial\bar w}\,(z,w)\,dm_4(z,w)\,b_2\bar b_2 \geqslant 0$$

$\Big($remarquer que $\displaystyle\iint c(z)\,\frac{\partial\varphi_1}{\partial\bar z}\,(z)\,\frac{\partial\varphi_2}{\partial w}\,(w)\,dm_2(z)\,dm_2(w) =$

$$=\iint c(z)\,\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\,(z)\,\frac{\partial\varphi_2}{\partial\bar w}\,(w)\,dm_2(z)\,dm_2(w) =$$

$$=\iint c(z)\,\varphi_1(z)\,\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial\bar w\,\partial w}\,(w)\,dm_2(z)\,dm_2(w) = 0\Big).$$

On a:

$$\iint \operatorname{Log}|w-f(z)|\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial\bar w\,\partial w}\,(z,w)\,dm_2(z)\,dm_2(w) =$$

$$=\int_{z\in D(z^0,\,r)}\varphi_1(z)\left[\int_{w\in C-\overline{D}(0,R)}\operatorname{Log}|w-f(z)|\,\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial\bar w\,\partial w}\,(w)\,dm_2(w)\right]dm_2(z).$$

Mais, pour tout $z\in D(z^0,\,r)$, pour tout $w\in C-\overline{D}(0,\,R)$, $w\neq f(z)$.

Donc, pour tout $z\in D(z^0,\,r)$, l'application $w\in C-\overline{D}(0,\,R)\to\operatorname{Log}|w-f(z)|$ est harmonique. D'où

$$\int \operatorname{Log}|w-f(z)|\,\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial\bar w\,\partial w}\,(w)\,dm_2(w) = 0\,.$$

Ce qui implique que

$$\int_{z\in D(z^0,r)}\varphi_1(z)\left[\int \operatorname{Log}|w-f(z)|\,\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial\bar w\,\partial w}\,(w)\,dm_2(w)\right]dm_2(z) = 0\,.$$

Soit $b_1 = 1$. Il arrive alors que

$$\iint \mathrm{Log}\,|w - f(z)|\, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \bar{z}\, \partial z}\,(z, w)\, dm_2(z)\, dm_2(w) + \iint c(z)\, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \bar{z}\, \partial z}\,(z, w)\, dm_2(z)\, dm_2(w) +$$

$$+ 2\ \mathrm{R\acute{e}}\left[\iint \mathrm{Log}\,|w - f(z)|\, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \bar{z}\, \partial w}\,(z,\, w)\, dm_2(z)\, dm_2(w)\, b_2\right] \geqslant 0\ ,\ \text{pour tout}\ b_2 \in \mathbb{C}\ .$$

Ceci implique que

$$\iint \mathrm{Log}\,|w - f(z)|\, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \bar{z}\, \partial w}\,(z,\, w)\, dm_2(z)\, dm_2(w) = 0\ .$$

En effet, posons

$$B = \mathrm{R\acute{e}}\left[\iint \mathrm{Log}\,|w - f(z)|\, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \bar{z}\, \partial z}\,(z,\, w)\, dm_2(z)\, dm_2(w)\right]$$

et

$$A = \iint \mathrm{Log}\,|w - f(z)|\, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \bar{z}\, \partial z}\,(z,\, w)\, dm_2(z)\, dm_2(w) +$$

$$+ \iint c(z)\, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \bar{z}\, \partial z}\,(z,\, w)\, dm_2(z)\, dm_2(w)\ \ (\text{notons alors que}\ A \geqslant 0)\,.$$

Alors, pour tout $b_2 \in \mathbb{R}$, on a $A + b_2\, B \geqslant 0$.

Le cas où $B > 0$ est impossible, car si b_2 tend vers $(-\infty)$, on a une contradiction.

Aussi le cas où $B < 0$, si on fait tendre b_2 vers $(+\infty)$, on a une absurdité.

Donc $B = 0$.

Par une méthode similaire, on démontre que

$$C_1 = \mathrm{Im}\left[\iint \mathrm{Log}\,|w - f(z)|\, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \bar{z}\, \partial w}\,(z,\, w)\, dm_2(z)\, dm_2(w)\right] = 0\ .$$

D'où $\displaystyle\iint \mathrm{Log}\,|w - f(z)|\, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \bar{z}\, \partial w}\,(z,\, w)\, dm_2(z)\, dm_2(w) = 0$.

Développons maintenant cette égalité. Il arrive que

$$0 = \int \mathrm{Log}\,|w - f(z)|\, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \bar{z}\, \partial w}\,(z,\, w)\, dm_4(z,\, w) =$$

$$= \iint \mathrm{Log}\,|w - f(z)|\, \frac{\partial \varphi_1}{\partial \bar{z}}\,(z)\, \frac{\partial \varphi_2}{\partial w}\,(w)\, dm_2(z)\, dm_2(w) =$$

$$= \int \frac{\partial \varphi_2}{\partial w}(w) \left[\int \mathrm{Log}|w - f(z)| \, \frac{\partial \varphi_1}{\partial \bar{z}}(z) \, dm_2(z) \right] dm_2(w) =$$

$$= - \int \varphi_2(w) \left[\int \frac{\partial}{\partial w} \mathrm{Log}|w - f(z)| \, \frac{\partial \varphi_1}{\partial \bar{z}}(z) \, dm_2(z) \right] dm_2(w) .$$

Donc $\int \varphi_2(w) \left[\int \frac{1}{w - f(z)} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \bar{z}}(z) \, dm_2(z) \right] dm_2(w) = 0.$

Ceci implique que $\int \frac{1}{w - f(z)} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \bar{z}}(z) \, dm_2(z) = 0.$

Supposons par l'absurde qu'il existe $w_0 \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}(0,\mathbb{R})$ avec

$$\int \frac{1}{w_0 - f(z)} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \bar{z}}(z) \, dm_2(z) \neq 0 .$$

Sans perte de généralité, on admet que

$$\mathrm{Ré}\left[\int \frac{1}{w_0 - f(z)} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \bar{z}}(z) \, dm_2(z) \right] \neq 0 \text{ et même } \mathrm{Ré}\left[\int \frac{1}{w_0 - f(z)} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \bar{z}}(z) \, dm_2(z) \right] > 0 .$$

Notons alors que l'application

$$w \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}(0, R) \mapsto \left[\int \frac{1}{w - f(z)} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \bar{z}}(z) \, dm_2(z) \right] \text{ est continue ,}$$

donc, il existe $r_1 > 0$ et $s > 0$ avec $\overline{D}(w_0, r_1) \subset \mathbb{C} \setminus \overline{D}(0, R)$ et pour tout

$$w \in \overline{D}(w_0, r_1) , \qquad \mathrm{Ré}\left[\int \frac{1}{w - f(z)} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \bar{z}}(z) \, dm_2(z) \right] \geqslant s .$$

On choisira alors une fonction $\varphi_2 \in \mathcal{C}_c^\infty(D(w_0, r_1))$, $\varphi_2 \geqslant 0$ et $\varphi_2(w_0) > 0$.

$$\int \varphi_2(w) \left[\mathrm{Ré} \int \frac{1}{w - f(z)} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \bar{z}}(z) \, dm_2(z) \right] dm_2(w) \geqslant \int \varphi_2(w) \, s \, dm_2(w) > 0 .$$

D'où la contradiction.

Ainsi $\left[\int \frac{1}{w - f(z)} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \bar{z}}(z) \, dm_2(z) \right] = 0$ pour toute $\varphi_1 \in \mathcal{C}_c^\infty(D(z^0, r_1))$, $\varphi_1 \geqslant 0$ et pour tout $w \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}(0, R)$.

Ceci implique que $z \in D(z^0, r) \mapsto \frac{1}{w - f(z)}$ est analytique sur $D(z^0, r)$ (pour $w \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}(0, R)$). Donc, en particulier, f est analytique sur $D(z^0, r)$.

$2^{ème}$ *étape*: $n \geqslant 2$. Soit $z^0 = (z_1^0, \ldots, z_n^0) \in D$, $r > 0$ avec $\overline{\Delta^{(n)}}(z^0, r) \subset D$. Fixons $\varphi_j \in \mathcal{C}_c^\infty(\Delta(z_j^0, r))$, $\varphi_j \geqslant 0$ pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$. Posons $\varphi(z) = \varphi_1(z_1) \cdot \varphi_2(z_2) \ldots \varphi_n(z_n)$ pour $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$.

Soit $R > 0$ avec $f(\overline{\Delta}^{(n)}(z^0, r)) \subset D(0, R)$.

Soit $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{C}\setminus\overline{D}(0, R))$, $\psi \geqslant 0$. On définit alors $\theta(z, w) = \varphi(z)\,\psi(w)$ pour $z \in \mathbb{C}^n$ et $w \in \mathbb{C}$. On pose $z_{n+1} = w$. Dans ce cas, on a

$$\int (\mathrm{Log}|z_{n+1} - f(z)| + c(z)) \sum_{j,k=1}^{n+1} \frac{\partial^2(\theta)}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(z, z_{n+1})\, b_j \bar{b}_k\, dm_{2n+2}(z, z_{n+1}) \geqslant 0 \,.$$

Fixons $b_1 = 1$ et $b_2 = \ldots = b_n = 0$. Il arrive que

$$\begin{aligned}
&\int \mathrm{Log}|w - f(z)|\, \frac{\partial^2(\varphi)}{\partial z_1 \partial \bar{z}_1}(z)\, \psi(w)\, dm_{2n+2}(z, w)\, b_1 \bar{b}_1 + \\
&+ \int c(z)\, \frac{\partial^2(\varphi)}{\partial z_1 \partial \bar{z}_1}(z)\, \psi(w)\, dm_{2n+2}(z, w)\, b_1 \bar{b}_1 + \\
&+ 2\,\mathrm{Ré}\left[\int \mathrm{Log}|w - f(z)|\, \frac{\partial(\varphi)}{\partial \bar{z}_1}(z)\, \frac{\partial(\psi)}{\partial w}(w)\, dm_{2n+2}(z, w)\, \bar{b}_1 b_{n+1}\right] + \\
&\qquad\qquad + \int \mathrm{Log}|w - f(z)|\, \frac{\partial^2(\psi)}{\partial w \partial \bar{w}}(w)\, \varphi(z)\, dm_{2n+2}(z, w)\, b_{n+1} \bar{b}_{n+1} \geqslant 0 \,.
\end{aligned}$$

Remarquons alors que, pour tout $z \in B(z^0, r)$, pour tout $w \in \mathbb{C}\setminus\overline{D}(0, R)$ on a $w \neq f(z)$. Donc

$$\begin{aligned}
&\int \mathrm{Log}|w - f(z)|\, \frac{\partial^2(\psi)}{\partial w \partial \bar{w}}(w)\, \varphi(z)\, dm_{2n+2}(z, w) = \\
&\qquad = \int \varphi(z) \left[\int \mathrm{Log}|w - f(z)|\, \frac{\partial^2(\psi)}{\partial w \partial \bar{w}}(w)\, dm_2(w)\right] dm_{2n}(z) = 0 \,.
\end{aligned}$$

Pour $b_1 = 1$, alors

$$\begin{aligned}
&\int \mathrm{Log}\,|w - f(z)|\, \frac{\partial^2(\varphi)}{\partial z_1 \partial \bar{z}_1}(z)\, \psi(w)\, dm_{2n+2}(z, w) + \int c(z)\, \frac{\partial^2(\varphi)}{\partial z_1 \partial \bar{z}_1}(z)\, \psi(w)\, dm_{2n+2}(z, w) + \\
&\qquad + 2\,\mathrm{Ré}\left[\int \mathrm{Log}|w - f(z)|\, \frac{\partial(\varphi)}{\partial \bar{z}_1}(z)\, \frac{\partial(\psi)}{\partial w}(w)\, dm_{2n+2}(z, w)\, b_{n+1}\right] \geqslant 0
\end{aligned}$$

pour tout $b_{n+1} \in \mathbb{C}$.

Ceci implique que

$$\begin{aligned}
0 &= \int \mathrm{Log}|w - f(z)|\, \frac{\partial(\varphi)}{\partial \bar{z}_1}(z)\, \frac{\partial(\psi)}{\partial w}(w)\, dm_{2n+2}(z, w) = \\
&= \int \varphi_2(z_2) \ldots \varphi_n(z_n) \left[\int\!\!\int \mathrm{Log}|w - f(z)|\, \frac{\partial(\varphi_1)}{\partial \bar{z}_1}(z_1)\, \frac{\partial(\psi)}{\partial w}(w)\, dm_2(z_1)\, dm_2(w)\right] \cdot \\
&\qquad\qquad \cdot dm_{2n-2}(z_2, \ldots, z_n)
\end{aligned}$$

pour toute $\varphi_j \in \mathcal{C}_c^\infty(\Delta(z_j^0, r))$, $\varphi_j \geqslant 0$ pour tout $j \in \{2, \ldots, n\}$.

Donc

$$0 = \int\int \operatorname{Log}|w - f(z)|\, \frac{\partial(\varphi_1)}{\partial \bar{z}_1}(z)\, \frac{\partial(\psi)}{\partial w}(w)\, dm_2(z_1)\, dm_2(w) =$$

$$= \int \frac{\partial(\psi)}{\partial w}(w)\left[\int \operatorname{Log}|w - f(z)|\, \frac{\partial(\varphi_1)}{\partial \bar{z}_1}(z_1)\, \frac{\partial(\psi)}{\partial w}(w)\, dm_2(z_1)\right] dm_2(w)$$

pour tout $Z_1 \in \overline{\Delta}^{(n-1)}(Z_1^0, r)$.

D'après la première étape, ceci implique que l'application g, définie par $g(z_1) = = \dfrac{1}{w - f(z_1, Z_1)}$ est analytique sur $\Delta(z_1^0, r)$ pour tout $Z_1 \in \Delta^{(n-1)}(Z_1^0, r)$ et $w \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}(0, R)$.

Donc $f(., Z_1)$ est analytique sur $\Delta(z_1^0, r)$ pour tout $Z_1 \in \Delta^{(n-1)}(Z_1^0, r)$. Par une méthode analogue, on démontre que $f(., Z_j)$ est analytique sur $\Delta(z_j^0, r)$ pour $j \in \{2, \ldots, n\}$.

D'après le théorème de Hartogs (cf. [6]), f est analytique sur $\Delta^{(n)}(z^0, r)$. Donc pour tout $w \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}(0, R)$, on a $u_1(z) = \operatorname{Log}|w - f(z)|$ est pluriharmonique sur $\Delta^{(n)}(z^0, r)$.

D'où $c(z) = u(z, w) - \operatorname{Log}|w - f(z)|$ est psh sur $\Delta^{(n)}(z^0, r)$.

Corollaire 4: *Soit D un ouvert de $\mathbb{C}^n$, K fermé pluripolaire dans D et E fermé polaire dans $\mathbb{C}$.*

Soit $u \in \operatorname{psh}((D \setminus K) \times (\mathbb{C} \setminus E))$ avec $\{(z, w) \in (D \setminus K) \times (\mathbb{C} \setminus E) : u(z, w) = -\infty\} = F$ est fermé dans $(D \setminus K) \times (\mathbb{C} \setminus E)$.

Soit $f : D \setminus K \to \mathbb{C}$ une fonction continue et localement bornée à travers K.

Supposons que $u(z, w) \leq \operatorname{Log}|w - f(z)|$ pour tout $(z, w) \in (D \setminus K) \times (\mathbb{C} \setminus E)$.

Alors u se prolonge de manière unique en une fonction $v \in \operatorname{psh}(D \times \mathbb{C})$, il existe une fonction $c : D \to [-\infty, 0]$ psh et une fonction g analytique sur D avec $g_{|D \setminus K} = f$ et $v(z, w) = \operatorname{Log}|w - f(z)| + c(z)$ pour tout $(z, w) \in D \times \mathbb{C}$. Si de plus e^v est de classe $\mathcal{C}^l$ sur $D \times \mathbb{C} \setminus \{(z, w) \in D \times \mathbb{C} : w = g(z)\}$ $(l \in \mathbb{N})$, alors $\{z \in D : c(z) = -\infty\}$ est fermé dans D, c est continue sur $D \setminus \{z \in D : c(z) = -\infty\}$ et e^c est de classe $\mathcal{C}^l$ sur D.

Démonstration: Soit $A = \{z \in D \setminus K : u(z, .) = -\infty \text{ sur } \mathbb{C} \setminus E\}$. F étant fermé dans $(D \setminus K) \times (C \setminus E)$, donc A est fermé dans $D \setminus K$. Notons aussi que A est pluripolaire dans $D \setminus K$ (d'après le lemme 2). Soit $z^0 \in D \setminus (K \cup A)$. Considérons $v_1(w) = = u(z^0, w) - \operatorname{Log}|w - f(z^0)|$ pour $w \in \mathbb{C} \setminus (E \cup \{f(z^0)\})$. Notons que v_1 est sousharmonique négative sur $\mathbb{C} \setminus (E \cup \{f(z^0)\})$.

$E \cup \{f(z^0)\}$ étant fermé polaire dans $\mathbb{C}$, donc v_1 se prolonge en une fonction sh et négative sur $\mathbb{C}$ (notée encore v_1). D'où, il existe une constante unique $c \in \mathbb{R}_-$ avec $u(z^0, w) = \operatorname{Log}|w - f(z^0)| + c$.

Ceci permet donc de définir une fonction $c : D \setminus (K \cup A) \to \mathbb{R}_-$.

Pour $z \in A$, on pose $c(z) = -\infty$.

Pour $z^0 \in D \backslash K$, $r > 0$ avec $\overline{B}(z^0, r) \subset D$. Soit $R > 0$ avec $f(\overline{B}(z^0, r)) \subset D(0, R)$. $\forall (z, w) \in B(z^0, r) \times [\mathbb{C} \backslash \overline{D}(0, r)]$, on a $u(z, w) - \mathrm{Log}|w - f(z)| = c(z)$. Donc c est s.c.s sur $B(z^0, r)$.

On démontre, de manière analogue au théorème 5, que f est analytique sur $D \backslash K$. K étant fermé pluripolaire dans D et f localement bornée à travers K, donc f se prolonge en une fonction g analytique sur D.

$c \leqslant 0$ sur $D \backslash K$, il résulte que u est localement majorée sur $D \times \mathbb{C}$ à travers $[K \times \times \mathbb{C} \cup D \times E]((D \backslash K) \times (\mathbb{C} \backslash E) = D \times \mathbb{C} \backslash [K \times \mathbb{C} \cup D \times E])$. Donc u se prolonge en une fonction $v \in \mathrm{psh}(D \times \mathbb{C})(K \times \mathbb{C} \cup D \times E$ est fermé pluripolaire dans $D \times \mathbb{C})$.

$v(z, w) \leqslant \mathrm{Log}|\mathrm{w} - \mathrm{g}(z)|$, pour tout $(z, w) \in D \times \mathbb{C} \backslash (K \times \mathbb{C} \cup D \times E)$, donc $v(z, w) \leqslant \mathrm{Log}|w - g(z)|$ pour $(z, w) \in D \times \mathbb{C}$.

Utilisant le raisonnement plus haut, il résulte alors que $v(z, w) = \mathrm{Log}|w - - g(z)| + c_1(z)$ où $c_1 : D \to [-\infty, 0]$ est une fonction s.c.s dans D.

En fait, c_1 est psh sur D, $c_1 = c$ sur $D \backslash K$. Notons qu'on pourra utiliser Shiffman [15].

Remarque 8: Soit D un ouvert de $\mathbb{C}^n$, $u \in \mathrm{psh}(D \times \mathbb{C})$, f et $g : D \to \mathbb{C}$ deux fonctions n-harmoniques.

Supposons que $u(z, w) \leqslant \mathrm{Log}|w - f(z)| + \mathrm{Log}|w - g(z)|$ pour $(z, w) \in D \times \mathbb{C}$.

Alors, f et g sont analytiques sur D, il existe une fonction $c : D \to \mathbb{R}_-$ psh avec $u(z, w) = \mathrm{Log}|w - f(z)| + \mathrm{Log}\,|w - g(z)| + c(z)$ pour tout $(z, w) \in D \times \mathbb{C}$.

En particulier si $u(z, w) \leqslant h(w) + \Psi(z)$ où $h : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ harmonique et $\Psi : D \to \mathbb{R}$ une fonction. Alors $u(z, w) = h(w) + c(z)$ où c est sousharmonique sur D et $c \leqslant \Psi$.

Remarque 9: Utilisant les notations du théorème 5 et de sa preuve avec $D = \mathbb{C}^n \backslash E$ où $E = E_1 \cup E_2$, E_1 compact dans $\mathbb{C}^n$ et E_2 polaire fermé dans $\mathbb{C}^n$. Alors, la fonction c ainsi introduite est une constante négative. Dans ce cas $u(z, w) = \mathrm{Log}|w - f(z)| + c$; $c \in \mathbb{R}_-$. Ainsi sur $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$, toute u minorante plurisousharmonique de v, où $v(z, w) = = \mathrm{Log}|w - f(z)|$ avec $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ et v s.c.s sur $\mathbb{C}^{n+1}$, est de la forme $u = v + c$ avec $c \in \mathbb{R}_-$.

D'une façon générale, si D est parabolique (c'est à dire, toute $u_1 \in \mathrm{psh}(D)$, $u_1 \leqslant 0$ alors u_1 est constante), c est constante sur D.

Dans la preuve du théorème 5, remarquons qu'il peut y arriver que c peut être non pluriharmonique.

Exemple: $D = D(0, 1)$. $c(z) = |z|^2 - 2$; $c \notin h(D)$. Soit $u(z, w) = \mathrm{Log}|w - z| + + (|z|^2 - 2)$. Remarquons que $u(z, w) \leqslant \mathrm{Log}|w - z|$ pour tout $(z, w) \in D \times \mathbb{C}$.

Remarque 10: Avec les mêmes notations du théorème 5 et de sa preuve, $c \in \mathrm{prh}(D)$ si et seulement si $u \in \mathrm{prh}(D \times \mathbb{C} \backslash F)$ où $F = \{(z, w) \in D \times \mathbb{C} : w = = f(z)\}$.

Il peut y arriver que l'hypothèse $\mathrm{Log}|w - f(z)|$ admet une majorante psh, dans $D \times \mathbb{C}$, ne garantit pas l'analyticité de f.

EXEMPLE: Soit $u(z, w) = \mathrm{Log}(|w| + |z|)$ pour $(z, w) \in \mathbb{C}^2$. Soit $f(z) = \bar{z}$, f est continue sur $\mathbb{C}$. On a $\mathrm{Log}\,|w - f(z)| \leqslant u(z, w)$ pour tout $(z, w) \in \mathbb{C}^2$. D'après Hörmander [6], $u \in \mathrm{psh}(\mathbb{C}^2)$ mais $f \notin H(\mathbb{C})$. Cependant on a

REMARQUE 11: Soient D un ouvert de $\mathbb{C}^n$ et $f : D \to \mathbb{C}$ une fonction.

Soit $u : D \times \mathbb{C} \to [-\infty, +\infty[$ une fonction plurisousharmonique avec $E = \{(z, w) \in D \times C : u(z, w) = -\infty\}$ contient le graphe d'une fonction n-harmonique g sur D.

Supposons que $\mathrm{Log}\,|w - f(z)| \leqslant u(z, w)$ pour tout $(z, w) \in D \times \mathbb{C}$.

Alors f est analytique sur D.

3. - SUR LE THÉORÈME DE HARTOGS

On propose une extension du théorème de prolongement de Hartogs (cf. [6]).

THÉORÈME 6: *Soient D un ouvert de $\mathbb{C}^n$, $n \geqslant 2$ et L compact dans D avec pour toute V composante connexe de D, $V \setminus L$ est une composante connexe dans $D \setminus L$. Supposons qu'il existe un polynôme analytique non constant p avec* $\mathrm{Log}\,|p(w) - f(z)|$ *admet une minorante* psh *dans $(D \setminus L) \times (\mathbb{C} \setminus K)$ où K est un sous-ensemble compact dans $\mathbb{C}$.*

Alors f se prolonge en une fonction holomorphe dans D.

DÉMONSTRATION: Sans perte de généralité on admet que $p(w) = w$ pour tout $w \in \mathbb{C}$. D'après la preuve du corollaire 4, f est analytique sur $D \setminus L$. Sur toute V composante connexe de D, $V \setminus L$ est un ouvert connexe et de plus $L \cap V$ est un sous-ensemble compact dans V. D'après le théorème de Hartogs [6], f se prolonge dans $H(V)$.

RÉFÉRENCES

[1] J. ABIDI, *Sur quelques problèmes concernant les fonctions holomorphes et plurisousharmoniques*, Rend. Circ. Mat. Palermo, **51** (2002), pp. 411-424.

[2] U. CEGRELL, *Removable singularities for plurisubharmonic functions and related problems*, Proc. London Math. Soc. (3), **36** (1978), pp. 310-336.

[3] H. FEDERER, *Geometric measure theory*, Berlin, Springer, 1969.

[4] W. K. HAYMAN - P. B. KENNEDY, *Subharmonic functions*, Vol. I (Academic Press, London 1976).

[5] G. M. HENKIN -J. LEITERER, *Theory of Functions on Complex Manifolds*, Birkhäuser, Boston, Mass., 1984.

[6] L. HÖRMANDER, *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables*, Van Nostrand, Princeton, N.J., 1966.

[7] B. JOSEFSON, *On the equivalence between locally polar and globally polar sets for plurisubharmonic functions on C^n*, Ark. Math., **16** (1978), pp. 109-115.

[8] M. KLIMEK, *Pluripotential theory*, Clarendon Press, Oxford, 1991.

[9] S. G. KRANTZ, *Function theory of several complex variables*, Wiley, New York, 1982.

[10] P. LELONG, *Fonctions Plurisousharmoniques et formes différentielles positives*, Gordon et Breach, New-York et Dunod, Paris, 1969.
[11] R. M. RANGE, *Holomorphic Functions and Integral Representations in Several Complex Variables*, Springer-Verlag, 1986.
[12] L. I. RONKIN, *Introduction to the theory of entire functions of several variables*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1974.
[13] W. RUDIN, *Function theory in polydiscs*, Benjamin New York, 1969.
[14] W. RUDIN, *Function theory in the Unit Ball of* $\mathbb{C}^n$, Springer-Verlag, New York, 1980.
[15] B. SHIFFMAN, *On the removal of singularities of analytic sets*, Michigan Math. J., Vol. **15** (1968), pp. 111-120.
[16] D. C. ULLRICH, *Removable sets for harmonic functions*, Michigan Math. J. **38** (1991), pp. 467-473.
[17] V. S. VLADIMIROV, *Les fonctions de plusieurs variables complexes (et leur application à la théorie quantique des champs)*, Paris: Dunod, 1967.

Direttore responsabile: Prof. A. BALLIO - Autorizz. Trib. di Roma n. 7269 dell'8-12-1959
«Monograf» - Via Collamarini, 5 - Bologna