Rendiconti
Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL
Memorie di Matematica e Applicazioni
120° (2002), Vol. XXVI, fasc. 1, pagg. 29-34

BERNARD MAUREY - JEAN-PIERRE TACCHI (*)

Qui a inventé la fonction singulière de Cantor? (**)

Résumé. — La fonction singulière qui varie continûment de 0 à 1 sur l'intervalle [0, 1], alors que sa dérivée reste nulle en dehors de l'ensemble triadique de Cantor, est l'un des objets les plus célèbres de l'Analyse; on attribue aussi à Cantor la découverte de cette fonction. Dans cet article, nous voudrions convaincre le lecteur qu'il serait juste d'associer au nom de Cantor le nom d'un de ses contemporains aujourd'hui un peu oublié, Ludwig Scheeffer, qui a découvert le même objet au cours de ses recherches sur la longueur des courbes.

Chi ha inventato la funzione singolare di Cantor?

Riassunto. — La funzione singolare che varia con continuità da 0 a 1 sull'intervallo [0, 1], ma la cui derivata è nulla al di fuori dell'insieme triadico di Cantor, rappresenta uno degli oggetti più celebri dell'Analisi. La sua scoperta è attribuita pure a Cantor. In questo articolo cercheremo di convincere il lettore che sarebbe giusto associare a quello di Cantor il nome di uno dei suoi contemporanei oggi in parte dimenticato, Ludwig Scheeffer, che ha scoperto lo stesso oggetto nel corso delle sue ricerche sulla lunghezza delle curve.

Dans son important article sur la rectification des courbes écrit en 1883, Ludwig Scheeffer indique une manière de définir sur un intervalle des *fonctions de saut* particulièrement intéressantes. Ces fonctions lui fournissent en effet des exemples pour illustrer les théorèmes qu'il a obtenus sur la longueur de courbes représentatives de fonctions, non nécessairement dérivables ni même continues. Nous traduisons en français le texte de Scheeffer, [Sch] p. 61-62.

(*) Indirizzi degli Autori: B. Maurey: Université Paris 7, UFR de Mathématiques, 2 Place Jussieu, 75251 Paris cedex 05; J. P. Tacchi: Université Pierre et Marie Curie (Paris 6), Case postale 189 - Combinatoire, 4 Place Jussieu, 75252 Paris cedex 05, France.
(**) Memoria presentata il 7 maggio 2002 da Giorgio Letta, uno dei XL.

«Soit $w_1, w_2, \ldots$ un ensemble dénombrable de grandeurs quelconques, $s_1, s_2, \ldots$ un ensemble dénombrable de grandeurs positives, dont la somme est finie et égale à S. On définit alors une courbe par l'équation $y = \sum_{-\infty}^{x} s_r$, dans laquelle la somme est étendue à tous les indices r pour lesquels $w_r < x$.

La courbe possède d'après notre théorème III la longueur $x_1 - x_0 + y_1 - y_0$ entre deux points quelconques x_0, y_0 et x_1, y_1. Cette propriété est particulièrement remarquable lorsque l'ensemble $w_1, w_2, \ldots$ est partout dense. Ces courbes se distinguent alors des courbes ordinaires en escalier (...) en ce qu'elles ne contiennent aucun segment de droite horizontal, si petit soit-il. Nous y reviendrons dans le prochain paragraphe.»

Un peu plus loin dans cet article, Scheeffer considère la fonction réciproque φ de la fonction de saut f précédente; il explique alors que cette fonction φ possède toutes les propriétés de la fonction que nous appelons de nos jours *la fonction singulière de Cantor*: la fonction φ est continue sur $[0, 1]$, constante sur une suite d'intervalles dont la somme des longueurs est égale à 1, et pourtant $\varphi(1)$ est différent de $\varphi(0)$.

Dans l'exemple ci-dessus, Scheeffer a considéré que les sauts contribuent à la longueur de la courbe, graphe de la fonction de saut, comme s'ils étaient matérialisés par un segment vertical reliant les points représentatifs des limites à gauche et à droite de la fonction. Dans ce point de vue géométrique de longueur de courbe, il est bien sûr extrêmement naturel de regarder la «courbe» après une symétrie par rapport à la première bissectrice; pour le géomètre, c'est évidemment à peu près la même courbe, et à coup sûr elle doit avoir la même longueur, si longueur il y a dans un sens raisonnable. Mais du point de vue des fonctions tout a changé: on est passé du graphe d'une fonction de sauts au graphe d'une fonction singulière de Cantor. Revenons à [Sch], p. 67-68.

«Comme exemple au théorème III nous avons donné une fonction discontinue $f(x) = \sum_{-\infty}^{x} s_r$. Comme cette fonction croît constamment avec x, pourvu que l'ensemble des points $w_1, w_2, \ldots$ soit partout dense, à chaque valeur de y correspond au plus une valeur de x. Si nous laissons la fonction indéterminée aux points de discontinuité de sorte qu'elle puisse prendre toute valeur de $f(x-0)$ jusqu'à $f(x+0)$, à toute valeur de y (entre certaines limites) correspond une valeur de x. La réciproque de la fonction $f(x)$ est donc bien définie, et comme il est facile de voir, continue. Si nous désignons cette fonction par φ, alors l'équation $y = \varphi(x)$ définit une courbe continue. (...)

La fonction $\varphi(x)$ possède de très remarquables propriétés. Tout d'abord, dans tout intervalle $x_0 x_1$, si petit soit-il, il y a non seulement des valeurs particulières mais encore des segments entiers sur lesquels la dérivée de la fonction $\varphi(x)$ est nulle. Si on classe ces segments par longueur décroissante et si on les additionne, leur somme n'est pas différente, si peu que ce soit, de la longueur $x_1 - x_0$ de l'intervalle entier [1][2].»

On pourrait reprocher à l'approche de Scheeffer d'être un peu vague, et de ne pas fournir un exemple *vraiment explicite*. Nous allons montrer que le choix des points (w_r) et des valeurs (s_r) de Scheeffer, qui conduit à ce que la fonction réciproque φ de la fonction de saut f soit précisément la fonction singulière de Cantor, est très simple à expliciter.

Considérons l'ensemble dénombrable des *nombres dyadiques* de $(0, 1)$, qui sont les nombres qui s'écrivent $j2^{-k}$, où k est un entier $\geqslant 1$ et j un entier tel que $0 < j < 2^k$. Pour les obtenir sans répétition, écrivons $v_{k,i} = (2i+1)2^{-k}$, avec $k \geqslant 1$ et $0 \leqslant \leqslant i < 2^{k-1}$. Ainsi, pour $k = 1$, on a une seule possibilité, le point $v_{1,0} = 1/2$; pour $k = 2$, on aura $1/4$ et $3/4$, puis $1/8, 3/8, 5/8, 7/8$ pour $k = 3$, etc... On peut, si on veut, ranger ces nombres $(v_{k,i})$ dans une suite $(w_r)_{r \geqslant 1}$: si $r = 2^p + j$, avec $p \geqslant 0$ et $0 \leqslant j < 2^p$, on lui associe $w_r = v_{p+1,j}$.

A chaque point $w_r = v_{k,i}$ associons la grandeur $s_r = t_{k,i} = 3^{-k}$, et calculons la fonction de Scheeffer dans ce cas,

$$f(x) = \sum_{w_r < x} s_r = \sum \{t_{k,i} : (k, i) \in D,\ v_{k,i} < x\} = \sum_{k=1}^{+\infty} N_k(x) 3^{-k}$$

où D désigne l'ensemble des couples (k, i) d'entiers tels que $k \geqslant 1$ et $0 \leqslant i < 2^{k-1}$ et où $N_k(x)$ désigne le nombre des points $v_{k,i}$ plus petits que x. On notera que f est continue à gauche.

Proposition: *Si* $x = \sum_{j=1}^{+\infty} \varepsilon_j 2^{-j}$ *est le développement binaire propre d'un nombre non dyadique* $x \in (0, 1)$, *où* $\varepsilon_j = 0, 1$ *pour tout* $j \geqslant 1$, *alors*

$$f(x) = 2 \sum_{j=1}^{+\infty} \varepsilon_j 3^{-j}.$$

Si $x = \sum_{j=1}^{k-1} \varepsilon_j 2^{-j} + 2^{-k}$ *est dyadique, on a* $f(x) = 2 \sum_{j=1}^{k-1} \varepsilon_j 3^{-j} + 3^{-k}$; *de plus,* $f(0) = 0$ *et* $f(1) = 1$.

La fonction f prend ses valeurs dans l'ensemble triadique de Cantor. Elle prend pour valeurs tous les points de l'ensemble triadique qui ne sont pas des origines de tiers médians (origines telles que 2/3, 2/9, 8/9, ... qui s'expriment par une somme finie $2 \sum_{j=1}^{k} \varepsilon_j 3^{-j}$).

On pourrait exprimer le résultat en une seule formule si on décidait d'écrire les nombres dyadiques sous la forme d'un développement impropre où $\varepsilon_j = 1$ pour $j \geqslant j_0$;

[1] Cette fonction montre qu'une proposition de Monsieur Harnack (Mathematische Annalen B. 19, pag. 235-279, proposition 3) n'est pas correcte sans hypothèse supplémentaire.

[2] Note des auteurs: bien entendu la Note [1] est extraite de l'article de Scheeffer.

avec cette convention, la formule $f(x) = 2 \sum_{j=1}^{+\infty} \varepsilon_j 3^{-j}$ s'appliquerait aussi aux dyadiques.

Démonstration. Si x est un nombre de $(0, 1)$, écrivons son développement binaire propre $x = \sum_{j=1}^{+\infty} \varepsilon_j 2^{-j}$, où $\varepsilon_j = 0, 1$. Pour chaque entier $k \geqslant 1$, faisons le compte $N_k^+(x)$ du nombre des points $v_{k,i} = (2i+1)2^{-k}$ qui sont inférieurs ou égaux à x, c'est-à-dire le nombre des entiers impairs $2i+1$ qui sont $\leqslant 2^k x$. Posons

$$x_k = \sum_{j=1}^{k} \varepsilon_j 2^{-j}, \qquad m_k = 2^k x_k = \varepsilon_k + 2\varepsilon_{k-1} + \cdots + 2^{k-1}\varepsilon_1.$$

Le nombre m_k est un entier $\leqslant 2^k x$ qui a la parité de ε_k, et $2^k x < m_k + 1$ puisque le développement de x est propre. Les entiers impairs $\leqslant 2^k x$ sont donc ceux qui sont $\leqslant m_k$, par conséquent on voit que $N_k^+(x) = m_k/2 = 2^{k-1} x_k$ quand m_k est pair ($\varepsilon_k = 0$) et $N_k^+(x) = (m_k+1)/2 = 2^{k-1}x_k + 1/2$ quand m_k est impair ($\varepsilon_k = 1$), autrement dit

$$N_k^+(x) = 2^{k-1} x_k + \varepsilon_k/2.$$

Si on désigne par $N_k(x)$ le nombre des points $v_{k,i} < x$, on aura $N_k(x) = N_k^+(x)$ sauf dans le cas exceptionnel où $x = v_{k,j}$ pour un certain j; dans ce cas nous devons enlever le dernier point, et $N_k(x) = N_k^+(x) - 1$.

Supposons d'abord que x ne soit pas dyadique. Nous avons alors $N_k(x) = N_k^+(x)$ pour tout $k \geqslant 1$. La somme des sauts s_r aux points w_r situés avant x, correspondant au niveau k, est égale à $N_k(x)3^{-k}$, si bien que

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} N_k(x) 3^{-k} = \sum_{k=1}^{+\infty} 2^{k-1} 3^{-k} x_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} \varepsilon_k 3^{-k}.$$

Or

$$\sum_{k=1}^{+\infty} 2^{k-1} 3^{-k} x_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k \sum_{j=1}^{k} \varepsilon_j 2^{-j} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{+\infty} \sum_{k=j}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k \varepsilon_j 2^{-j}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{+\infty} 3 \left(\frac{2}{3}\right)^j \varepsilon_j 2^{-j} = \frac{3}{2} \sum_{j=1}^{+\infty} \varepsilon_j 3^{-j}.$$

Finalement,

$$f(x) = y = 2 \sum_{j=1}^{+\infty} \varepsilon_j 3^{-j}.$$

On reconnaît que y est un point de l'ensemble triadique de Cantor.

Si maintenant $x = \sum_{j=1}^{p} \varepsilon_j 2^{-j}$ est un dyadique de $(0, 1)$, avec $\varepsilon_p = 1$, alors le compte $N_k(x)$ est dans le cas exceptionnel lorsque $k = p$, et nous devons retrancher 3^{-p} à la valeur obtenue par la formule du cas non dyadique. On pourrait aussi utiliser le fait que la formule de Scheeffer définit une fonction f continue à gauche: le point x est limite croissante de points non dyadiques x' pour lesquels $\varepsilon'_1 = \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon'_{p-1} = \varepsilon_{p-1}$, mais $\varepsilon'_p = 0$; la limite des valeurs de $f(x')$ est alors

$$y = 2 \sum_{j=1}^{p-1} \varepsilon_j 3^{-j} + 2 \sum_{j=p+1}^{+\infty} 3^{-j} = 2 \sum_{j=1}^{p-1} \varepsilon_j 3^{-j} + 3^{-p},$$

un point de l'ensemble triadique qui est une extrémité de tiers médian.

Passons aux propriétés de la fonction réciproque φ. Donnons d'abord la définition de cette fonction φ, réciproque de la fonction strictement croissante f définie sur $[0, 1]$: on désigne par $\varphi(y)$ l'endroit x où $f(x)$ franchit la valeur y; précisément, on pose

$$\varphi(y) = \sup \{x \in [0, 1] : f(x) \leqslant y\}$$

pour tout y de l'intervalle $[f(0), f(1)] = [0, 1]$. On a vu que $f(1/2) = 1/3$, et la limite à droite $f((1/2)+)$ est égale à $2/3$: on a ainsi $\varphi(y) = 1/2$ sur l'intervalle $[1/3, 2/3]$. Expliquons pourquoi la fonction φ est continue sur $[0, 1]$. Nous allons voir que

si $|y_2 - y_1| < 3^{-k}$, *alors* $|\varphi(y_2) - \varphi(y_1)| < 2^{-k}$.

Supposons par exemple $y_1 < y_2$; posons $x_1 = \varphi(y_1)$, $x_2 = \varphi(y_2)$; on sait que $x_1 < x_2$; si on a $x_2 - x_1 \geqslant 2^{-k}$, l'intervalle $[x_1, x_2)$ contient au moins un point de la forme $j2^{-k}$ (avec j impair ou non), où le saut de f est au moins égal à 3^{-k} (si par exemple $x_1 = j2^{-k}$, on aura $f(x') - f(x_1) \geqslant 3^{-k}$ pour tout $x' > x_1$); on a donc $y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1) \geqslant 3^{-k}$.

Arrivés à ce point, nous voyons bien que la fonction réciproque φ admet la description que Cantor donne (à des différences mineures de notation près) pour sa fonction singulière, dans l'article [Can] page 386: à tout point $y = 2 \sum_{j=1}^{+\infty} \varepsilon_j 3^{-j}$ de l'ensemble triadique, il associe la valeur $x = \varphi(y) = \sum_{j=1}^{+\infty} \varepsilon_j 2^{-j}$, et il complète ensuite la définition sur les intervalles complémentaires de l'ensemble triadique. On trouve aussi une description graphique de la fonction dans une lettre de Cantor à Mittag-Leffler du 28 novembre 1883 ([CaB], lettre 57); la description par la formule précédente est dans une lettre du 1er décembre (lettre 58). C'est le contenu de plusieurs de ces lettres de Cantor à Mittag-Leffler qui devient ensuite l'article [Can]. Par ailleurs, le 26 novembre, Cantor écrit à Mittag-Leffler ([CaB], lettre 56) pour lui annoncer qu'il va bientôt lui envoyer pour Acta des travaux d'un jeune mathématicien, Ludwig Scheeffer; parmi ces travaux figure très certainement l'article [Sch] sur la rectification des courbes, dont la version définitive envoyée à Acta est datée du 8 décembre par son auteur.

On peut bien sûr avancer que Cantor et Scheeffer sont arrivés tous les deux à la même conclusion par des chemins parallèles, et que Cantor pensait depuis un moment déjà à montrer que tous les ensembles parfaits ont la même cardinalité; cependant, s'agissant du point précis de la construction d'une fonction *continue* jouissant des propriétés de la fonction singulière, nous penchons très fortement pour une antériorité de Scheeffer, rejoignant ainsi Hawkins ([Haw], 3.3, p. 74), qui écrit à propos de la découverte des fonctions singulières: *according to Cantor, Ludwig Scheeffer had already discovered a similar counterexample by an entirely different line of reasoning...* Mais Hawkins n'indique pas clairement dans quelle source il a trouvé cet avis (aveu) de Cantor; interrogé en 2001 sur ce point, il n'a pu nous donner plus de précision sur cette phrase qu'il a écrite il y a plus de trente ans. Peut-être pensait-t-il au passage suivant de l'article [Can] (article en français), p. 387.

«M. L. Scheeffer à Berlin a observé, que cette fonction $\psi(x)$, ainsi que beaucoup d'autres, est en contradiction avec un théorème de M. Harnack (v. Math. Annalen Bd. 19, pag. 241, Lehrs. 5). En effet cette fonction $\psi(x)$ a sa dérivée $\psi'(x)$ égale à zéro pour toutes les valeurs de x, à l'exception de ceux, que nous avons nommées z; celles-ci constituent un ensemble parfait $\{z\}$, dont la grandeur $\mathfrak{J}(\{z\})$ est égale à zéro. Mais M. Scheeffer m'a aussi dit, qu'il pouvait remplacer ce théorème par un autre, qui serait exempt de doute (...)»

Ce passage peut effectivement signifier ce qu'a écrit Hawkins. Pour être plus affirmatif sur l'identité du premier découvreur de la fonction de Cantor, il faudrait savoir, ce que nous n'avons pu encore obtenir jusqu'ici, quelles étaient les relations entre Cantor et le jeune Scheeffer en cette année 1883; Scheeffer a-t-il fait avancer son travail sous l'œil attentif de Cantor, ou bien Scheeffer s'est-il présenté à lui avec des travaux déjà au point pour l'essentiel, dont la lecture aurait inspiré à Cantor son point de vue sur la fonction singulière? Dans ce dernier cas, il faudrait bien réformer un peu nos habitudes et parler de *la fonction singulière de Cantor-Scheeffer*.

BIBLIOGRAPHIE

[CaB] Georg Cantor Briefe, *Herausgegeben von H. Meschkowski et W. Nilson*, Springer 1991.

[Can] G. Cantor, *De la puissance des ensembles parfaits de points*, Acta Mathematica, 4 (1884), 381-392.

[Har] A. Harnack, *Vereinfachung der Beweise in der Theorie der Fourier'schen Reihe*, Math. Annalen, 19 (1882), 235-279.

[Haw] T. Hawkins, *Lebesgue's Theory of Integration; its Origins and Development*, Chelsea Publishing Company (1970).

[MTa] B. Maurey - J. P. Tacchi, *Ludwig Scheeffer et les extensions du théorème des accroissements finis*, à paraître dans Travaux mathématiques, Luxembourg.

[Sch] L. Scheeffer, *Allgemeine Untersuchungen über Rectification der Curven*, Acta Math., 5 (1884), 49-82.

Direttore responsabile: Prof. A. Ballio - Autorizz. Trib. di Roma n. 7269 dell'8-12-1959

«Monograf» - Via Collamarini, 5 - Bologna