Rendiconti
Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL
*Memorie di Matematica e Applicazioni*
123° (2005), Vol. XXIX, fasc. 1, pagg. 281-286

MARIO MIRANDA

# Sulle singolarità eliminabili delle soluzioni dell'equazione delle superfici minime

ABSTRACT. — For any $n \geq 2$, any open set $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, any subset $K$ of $\Omega$, closed in $\Omega$, with $\mathcal{H}^{n-1}(K) = 0$, any $u \in \mathcal{C}^2(\Omega \setminus K)$, solution of the minimal surface equation, there exists an unique $U \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, equal to $u$ in $\Omega \setminus K$.

This result of mine, was published in 1977 (see [5]). I will give here an easier proof of it, not resorting to the generalized solution theory.

Moreover, I will compare the new proof with De Giorgi-Stampacchia's one of 1965 (see [3]), that assumed the stronger hypothesis $K \subset\subset \Omega$, i.e. $K$ compact in $\Omega$.

I will remind too, the case of isolated singularities, as treated by Finn in 1953 (see [4]).

## 1. - IL TEOREMA DI REGOLARITÀ

Nell'abstract ho anticipato il seguente

TEOREMA 1: *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è un insieme aperto, $n \geq 2$, $K$ un sottoinsieme di $\Omega$, chiuso in $\Omega$, $\mathcal{H}^{n-1}(K) = 0$, per ogni $u \in \mathcal{C}^2(\Omega \setminus K)$ soluzione dell'equazione delle superfici minime, i.e.*

$$\operatorname{div}\left(\frac{Du}{\sqrt{1 + |Du|^2}}\right) = 0, \quad \forall x \in \Omega \setminus K, \tag{1}$$

*esiste un'unica $U \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, con*

$$U_{|\Omega \setminus K} = u. \tag{2}$$

Per la dimostrazione di questo Teorema utilizzeremo il seguente Lemma, dimostrato in [5].

Indirizzo dell'Autore: Dipartimento di Matematica Università di Trento, Via Sommarive, 14 - 38050 Povo (TN).
E-mail: miranda@science.unitn.it

LEMMA 2: *Sia $A$ un aperto di $\mathbb{R}^{n+1}$ e $C$ un sottoinsieme chiuso di $A$, con $\mathcal{H}^n(C) = 0$. Per ogni insieme $E \subset A$ e misurabile secondo Lebesgue, avente perimetro localmente minimo in $A \setminus C$, si ha che il perimetro di $E$ è localmente minimo in $A$.*

Non riporterò qui la dimostrazione di questo Lemma, ma per comodità di lettura ricorderò il significato di *perimetro localmente minimo*.

DEFINIZIONE 3: *$E$ ha perimetro localmente minimo in $A$, se sono vere le seguenti diseguaglianze; per ogni aperto $L \subset\subset A$,*

$$P_L(E) = \sup\left\{ \int_E \operatorname{div} \varphi(x) dx : \varphi \in \left[\mathcal{C}_0^1(L)\right]^{n+1}, |\Phi(x)| \leq 1 \right\} < +\infty. \tag{3}$$

*Per ogni insieme misurabile secondo Lebesgue $F \subset A$, con $F \Delta E = (F \setminus E) \cup$ $\cup (E \setminus F) \subset\subset L$,*

$$P_L(E) \leq P_L(F). \tag{4}$$

Applicheremo il Lemma al caso di

$$A = \Omega \times \mathbb{R}, \quad C = K \times \mathbb{R}, \quad E = \{(x,t) : x \in \Omega \setminus K, t < u(x)\},$$

dove $\Omega$, $K$, $u$ hanno il significato dato loro nell'enunciato del Teorema.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA. Cominceremo col dimostrare la locale limitatezza di $u$ in $\Omega$. A tale scopo, ci limiteremo a verificare l'esistenza, per ogni palla $B = B_\varrho \subset\subset \Omega$, di $H \in \mathbb{R}$ con

$$H \geq u(x), \quad \forall x \in \overline{B}_\varrho \setminus K. \tag{5}$$

Sia $\sigma > 0$ e tale che la palla $B_{\varrho+\sigma}$, avente lo stesso centro di $B_\varrho$, sia

$$B_{\varrho+\sigma} \subset\subset \Omega. \tag{6}$$

Sia $\varepsilon \in (0, \sigma)$ un numero il cui valore decideremo più avanti, e sia $\Omega_\varepsilon$ un intorno aperto di $K \cap \overline{B}_{\varrho+\sigma}$, con

$$\mathcal{H}^n(\Omega_\varepsilon) < \varepsilon. \tag{7}$$

Indichiamo con $M$ il numero

$$M = \max\{u(x) : x \in \overline{B}_{\varrho+\sigma} \setminus \Omega_\varepsilon\}. \tag{8}$$

Supponiamo ora che esista un $x \in \overline{B}_\varrho \setminus K$ con

$$u(x) > M + \sigma. \tag{9}$$

Per una elementare proprietà delle frontiere minime, come è il caso della frontiera di $E$, deve valere

$$\mathcal{H}^{n+1}\left\{(y,t) : |y - x|^2 + |t - u(x)|^2 < \sigma^2, t < u(x)\right\} \geq \frac{\omega_n}{n+1}\sigma^{n+1}, \tag{10}$$

dove $\omega_n$ è la misura della palla unitaria $n$-dimensionale. Dalla (10) si ricava

$$\mathcal{H}^n\left\{y \in B_{\varrho+\sigma} \setminus K : |y - x| < \sigma, u(y) > M\right\} \geq \frac{\omega_n}{2(n+1)}\sigma^n. \tag{11}$$

Poichè vale

$$\{y \in B_{\varrho+\sigma} \setminus K : |y-x| < \sigma, u(y) > M\} \subset \Omega_\varepsilon \tag{12}$$

deve essere, per la (7),

$$\varepsilon \geq \frac{\omega_n}{2(n+1)}\sigma^n. \tag{13}$$

Se $\varepsilon$ viola la (13), non può valere la (9), quindi possiamo concludere che la (5) è vera se $H = M + \sigma$.

Consideriamo la $-u$, possiamo affermare l'esistenza di $H^* < H$, tale che

$$u(x) \geq H^*, \quad \forall x \in \overline{B}_\varrho \setminus K. \tag{14}$$

Poichè la frontiera $\partial E$ dell'insieme $E$ è la chiusura dell'insieme grafico della $u$, varrà l'identità

$$\partial E \cap (\overline{B}_\varrho \times \mathbb{R}) = \partial E \cap (\overline{B}_\varrho \times [H^*, H]). \tag{15}$$

Indichiamo con $\upsilon$ il vettore unitario uscente dai punti della frontiera di $E$, quando questa esiste, si ha

$$\upsilon_{n+1}(x) = \frac{1}{\sqrt{1+|Du|^2}}, \quad \forall (x, u(x)). \tag{16}$$

Calcoliamo e dimostriamo che

$$\inf\{\upsilon_{n+1}(x) : x \in \overline{B}_\varrho \setminus K\} > 0. \tag{17}$$

In caso contrario esisterebbe una successione $\{x_j\} \subset \overline{B}_\varrho \setminus K$, con

$$\lim_j \upsilon_{n+1}(x_j) = 0 \tag{18}$$

$$\lim_j x_j = x \in \overline{B}_\varrho \tag{19}$$

$$\lim_j u(x_j) = t \in [H^*, H] \tag{20}$$

e il punto $(x, t) \in \partial E$.

La (18) e il Theorem 6, p. 39 di [1] implicherebbero l'esistenza di un intorno di $(x, t)$ nel quale sarebbe

$$\upsilon_{n+1} \equiv 0. \tag{21}$$

Ma questo contrasta con il fatto che in ogni intorno di $(x, t)$ debbono esservi punti di grafico della $u$.

Deve essere allora vera la (17), la quale implica, grazie al Teorema 5.6, p. 55 di [7], che la frontiera di $E$ in $B_\varrho \times \mathbb{R}$ è il grafico di una funzione Lipschitziana $U$, con $U_{|B_\varrho \setminus K} = u$.

Il fatto che la $U \in \mathcal{C}^2(B_\varrho)$ è allora conseguenza del Teorema di regolarità di De Giorgi (vedi [2]) e di un precedente Teorema di C.B. Morrey, jr. (vedi [8]). □

## 2. - Il Teorema di De Giorgi-Stampacchia

Ennio De Giorgi e Guido Stampacchia dimostrarono nel 1965 la tesi del Teorema 1, nell'ipotesi più restrittiva per l'insieme $K$, i.e.

$$K \subset\subset \Omega. \tag{22}$$

La (22) permise loro di dimostrare il seguente

Teorema 4 (Principio del Massimo debole). *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è aperto, connesso, $n \geq 2$, e $K \subset\subset \Omega$ con $\mathcal{H}^{n-1}(K) = 0$. Se $u \in \mathcal{C}^2(\Omega \setminus K)$ è soluzione della equazione delle superfici minime e se $A$ è un aperto con*

$$K \subset A \subset\subset \Omega. \tag{23}$$

*Allora vale l'identità*

$$\sup_{A \setminus K} u = \max_{\partial A} u. \tag{24}$$

La (3) è facilmente ottenibile con un calcolo introdotto da R. Finn nel caso $K = \{x_0\}$.
Utilizzando il Principio del Massimo debole si ottiene il

Teorema 5 (Principio del Massimo forte). *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è un aperto connesso, $n \geq 2$, $K \subset\subset \Omega$ con $\mathcal{H}^{n-1}(K) = 0$. Se $u$, $w$ è una coppia di soluzioni in $\Omega \setminus K$, se $A$ è un aperto verificante* (24) *e se vale*

$$u(x) \leq w(x), \quad \forall x \in \partial A, \tag{25}$$

*allora vale*

$$u(x) \leq w(x), \quad \forall x \in A \setminus K. \tag{26}$$

Dal Principio del Massimo forte si ricava il seguente

Teorema 6 (Principio di Massimo per i rapporti incrementali) *Nelle ipotesi del Principio del Massimo debole si ha la seguente identità*

$$\sup_{x,y \in A \setminus K} \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|} = \sup_{\substack{x \in \partial A \\ y \in A \setminus K}} \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|}. \tag{27}$$

La (27) implica la Lipschitzianità della $u$ in $A \setminus K$ e perciò l'esistenza di $U \in \mathcal{C}^2(A)$ eguale alla $u$ in $A \setminus K$.

Il Principio di Massimo per i rapporti incrementali fu utilizzato da David Hilbert per la sua dimostrazione del Principio di Dirichlet del 1904. John von Neumann nel 1931 (vedi [9]) sent il bisogno di scrivere e pubblicare una dimostrazione elementare per il Principio già usato da Hilbert. Il Lemma di J.von Neumann fu utilizzato da De Giorgi e Stampacchia nel loro lavoro del 1965.

## 3. - Il Teorema di Finn

Nel caso $K = \{x_0\} \subset B_\varepsilon(0)$, e $u \in \mathcal{C}(\overline{B}_\varepsilon(0) \setminus \{0\}) \cap \mathcal{C}^2(B_\varepsilon(0) \setminus \{0\})$ soluzione dell'equazione delle superfici minime, utilizzando la soluzione $P(x)$ del Problema di Dirichlet per l'equazione delle superfici minime su $\overline{B_\varepsilon}(0)$ con i valori di $u$ su $\partial B_\varepsilon(0)$, si ottiene $u(x) = P(x)$, per ogni $0 < |x| \leq \varepsilon$ e da ciò l'ovvia eliminazione della singolarità in $\{0\}$.

## REFERENCES


[1] E. Bombieri - E. Giusti, *Harnack's Inequality for Elliptic Differential Equations on Minimal Surfaces*. Inv. Math., **15** (1972), 24-46.

[2] E. De Giorgi, *Sulla differenziabilità e l'analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari*. Mem. Acc. Sci. Torino, vol., **3** (1957), 25-43.

[3] E. De Giorgi - G. Stampacchia, *Sulle singolarità eliminabili delle ipersuperficie minimali*. Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8), **38** (1965), 352-357.

[4] R. Finn, *Isolated Singularities of Solutions of Non-linear Partial Differential Equations*. Trans. Amer. Math. Soc., **75** (1953), 385-404.

[5] M. Miranda, *Sulle singolarità eliminabili delle soluzioni dell'equazione delle superfici minime*. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, s. IV, vol. IV, **1** (1977), 129-132.

[6] M. Miranda, *Superfici minime illimitate*. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, s. IV, vol. IV, **2** (1977), 313-322.

[7] M. Miranda, *Distribuzioni aventi derivate misure e insiemi di perimetro localmente finito*. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, s. III, vol. XVIII, **1** (1964), 27-56.

[8] C.B. Morrey jr., *Second order elliptic systems of differential equations*. Ann. of Math. Studies, Princeton Univ. Press, **33**, 1954.

[9] J. von Neumann, *Über einen Hilfsatz der Variationsrechnung*. Abh. Mat. Semin. Hamburg Univ., **8** (1931), 28-31.

*Direttore responsabile*: Prof. A. Ballio - Autorizz. Trib. di Roma n. 7269 dell'8-12-1959
«Monograf» - Via Collamarini, 5 - Bologna