Rendiconti
Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL
Memorie di Matematica e Applicazioni
118° (2000), Vol. XXIV, fasc. 1, pagg. 43-62

MOHAMED EL KADIRI (*)

Fonctions finement biharmoniques (**)

RÉSUMÉ. — Nous définissons et nous étudions une théorie des fonctions finement biharmoniques dans un domaine fin de $\boldsymbol{R}^n$. Les résultats de cette théorie s'étentdent d'une manière évidente à un domaine fin d'un espace biharmonique de la théorie axiomatique de Smyrnelis dont les espaces harmoniques vérifient l'axiome D.

Funzioni finemente biarmoniche

RIASSUNTO. — Si espone una teoria delle funzioni biarmoniche in un dominio fine di $\boldsymbol{R}^n$. I risultati di questa teoria si estendono in maniera evidente a un dominio fine di uno spazio biarmonico (nel senso della teoria assiomatica di Smyrnelis, nella quale gli spazi armonici verificano l'assioma D).

1. - INTRODUCTION

Soit Ω un domaine de $\boldsymbol{R}^n$, qu'on suppose borné si $n = 2$. La topologie fine sur Ω a été définie par H. Cartan en 1940 comme étant la plus fine des topologies rendant continues les fonctions surharmoniques dans Ω.

La théorie du balayage des mesures a permis à Fuglede de développer et étudier dans [11] une théorie des fonctions finement harmoniques dans un ouvert fin (i.e., ouvert au sens de la topologie fine) de Ω, généralisant la notion classique de fonction harmonique dans un ouvert ordinaire de Ω.

Smyrnelis ([18] et [19]) a aussi développé une théorie axiomatique des fonctions biharmoniques s'appliquant à un opérateur obtenu par couplage de deux opérateurs différentiels L_1 et L_2 du second ordre elliptiques ou paraboliques dans Ω, et a montré

(*) Indirizzo dell'Autore: B.P. 726, Salé-Tabriquet, Salé, Maroc (e-mail: elkadiri@fsr.ac.ma)
(**) Memoria presentata il 9 dicembre 1999 da Giorgio Letta, uno dei XL.

qu'on peut étendre à ce nouveau cadre les méthodes et les résultats de la théorie classique ou axiomatique des fonctions harmoniques.

Dans cette théorie Smyrnelis identifie les fonctions biharmoniques au sens de l'opérateur $L_1 L_2$, i.e., les fonctions u telles que $L_1 L_2 u = 0$, aux couples de fonctions (u, v) telles que $L_2 u = -v$ et $L_1 v = 0$, ces couples sont appelés couples biharmoniques. Il définit alors les notions de couples surharmoniques et de potentiels. Bouleau [4] a ensuite montré que dans la théorie de Smyrnelis les couples hyperharmoniques $\geqslant 0$ sont exactement les couples excessifs d'une résolvante triangulaire de noyaux boréliens sur l'espace de base. Boboc et Bicur [2] ont montré que ces couples s'identifient aussi aux fonctions excessives d'une famille résolvante de noyaux sur l'espace $\Omega \oplus \Omega$.

Dans le présent travail nous nous proposons de développer et d'étudier la notion de fonction finement biharmonique sous-jacente à la théorie de Smyrnelis des fonctions biharmoniques.

Pour des raisons de simplicité, nous considérons uniquement la théorie des fonctions biharmoniques au sens du Laplacien dans Ω; l'extension au cadre général d'un espace biharmonique de Smyrnelis dont les espaces harmoniques associés vérifient les hypothèses de la théorie des fonctions finement harmoniques de Fuglede est évidente.

Comme en théorie des fonctions finement harmoniques, nous utilisons le balayage des mesures en théorie de Smyrnelis pour définir les notions de couple finement harmonique ou hyperharmonique. Nous définissons également la notion de potentiel fin et nous établissons un principe du minimum fin.

Pour une fonction finement hyperharmonique $v \geqslant 0$ dans un domaine fin de Ω nous introduisons la notion de fonction finement hyperharmonique pure d'ordre 2 associée et nous montrons qu'elle minore spécifiquement toute fonction finement hyperharmonique $u \geqslant 0$ telle que le couple (u, v) soit finement hyperharmonique. Ce résultat, qui peut être obtenu aussi par la technique des résolvantes comme dans [2], permet de faire la représentation intégrale des couples potentiels fins à partir de celle des potentiels fins ordinaires.

À la fin de ce travail nous étudions le problème de Riquier dans un ouvert fin et nous montrons que, pour tout ouvert fin borné ω de $\boldsymbol{R}^n$ et tout $x \in \omega$, la mesure $\nu_x^{C\omega}$ (voir paragraphe 2) est absolument continue par rapport à la mesure $\varepsilon_x^{C\omega}$.

Les notations utilisées dans tout ce travail seront identiques à celles des travaux de Fuglede et Smyrnelis cités dans la bibliographie. En particulier, si U est un domaine fin non vide de Ω, c'est-à-dire un domaine au sens de la topologie fine classique sur $\boldsymbol{R}^n$ (on utilisera le mot fin (finement) pour distinguer les notions relatives à la topologie fine de celles relatives à la topologie initiale), la réduite et la balayée, dans Ω (resp. U), sur une partie A de Ω (resp. U), d'une fonction f sur Ω (resp. U) à valeurs dans $\overline{\boldsymbol{R}}$ seront désignées respectivement par R_f^A et $\widehat{R}_f^A$ (resp. ${}^U R_f^A$ et ${}^U\widehat{R}_f^A$).

Pour d'amples détails sur la théorie des fonctions finement harmoniques on renvoie à [11].

2. - Mesures biharmoniques

Tout au long de ce travail nous utilisons la théorie locale des fonctions biharmoniques telle qu'elle est présentée par Smyrnelis dans [18] et [19], dont nous rappelons ici quelques résultats nécessaires aux développements qui suivent.

Soit $(X, \mathcal{H})$ un espace biharmonique au sens de [18]; on note $\mathcal{U}^+(X)$ le cône des couples hyperharmoniques positifs sur X. Par le mot fonction on entendra toujours, sauf mention expresse du contraire, une fonction à valeurs dans $\overline{\boldsymbol{R}}$. L'ordre sur l'ensemble des couples de fonctions sur un ensemble M est l'ordre produit usuel:

$$(f, g) \leqslant (h, k) \Leftrightarrow f \leqslant h \quad \text{et} \quad g \leqslant k ,$$

on écrira aussi $(h, k) \geqslant (f, g)$ au lieu de $(f, g) \leqslant (h, k)$. Si $(f, g) \geqslant (0, 0)$, on écrira tout simplement $(f, g) \geqslant 0$. Soient $F = (f, g)$ et $G = (h, k)$ deux couples de fonctions; on pose $\min(F, G) = (\min(f, h), \min(g, k))$ (resp. $\max(F, G) = (\max(f, h), \max(g, k))$), où, pour deux fonctions u et v, la fonction habituellement notée $\min(u, v)$ (resp. $\max(u, v)$) est définie par $\min(u, v)(x) = \min(u(x), v(x))$ (resp. $\max(u, v)(x) = \max(u(x), v(x))$).

Pour tout couple $\boldsymbol{\Phi} = (f, g)$ de fonctions sur X, et toute partie E de X, on note $\boldsymbol{\Phi}^E$ le couple réduit du couple $\boldsymbol{\Phi}$ sur E. On rappelle que ce couple est défini par

$$\boldsymbol{\Phi}^E = \inf\{(u, v) \in \mathcal{U}^+(X); (u, v) \geqslant \boldsymbol{\Phi} \text{ sur } E\} ,$$

où l'inf est pris au sens de l'ordre produit. Le couple balayé de $\boldsymbol{\Phi}$ sur E est noté $\widehat{\boldsymbol{\Phi}}^E$, et défini par $\widehat{\boldsymbol{\Phi}}^E = (\widehat{\boldsymbol{\Phi}}_1, \widehat{\boldsymbol{\Phi}}_2)$, où, pour une fonction h sur X, $\widehat{h}$ désigne la régularisée s.c.i. de h, i.e. la plus grande minorante s.c.i. de h dans X. On remarquera que l'on a $\boldsymbol{\Phi}^E = (\boldsymbol{\Phi}^+)^E$, où $\boldsymbol{\Phi}^+ = \max(\boldsymbol{\Phi}, 0)$.

Comme en théorie des espaces harmoniques, c'est la notion de balayée d'un couple de mesures qui va nous permettre de définir la notion de couples finement hyperharmoniques, surharmoniques ou harmoniques. A cet effet, nous rappelons le résultat suivant ([19], th. 7.11 et th. 7.12):

Théorème 2.1: *Pour tout couple (μ, λ) de mesures de Radon positives sur X et toute partie E de X, il existe trois mesures de Radon positives μ^E, ν^E et λ^E sur X telles que, pour tout $\mathcal{H}$-potentiel $P = (p, q)$, on ait*

$$\int \widehat{P}_1^E \, d\mu = \int p \, d\mu^E + \int q \, d\nu^E ,$$

$$\int \widehat{P}_2^E \, d\nu = \int q \, d\lambda^E ,$$

où $\widehat{P}^E = (\widehat{P}_1^E, \widehat{P}_2^E)$.

Remarque: Les mesures μ^E et λ^E ne sont autres que les balayées des mesures μ et λ relativement aux espaces harmoniques $(X, \mathcal{H}_1)$ et $(X, \mathcal{H}_2)$ associés à l'espace biharmonique $(X, \mathcal{H})$. Si ces espaces sont égaux comme dans le cas considéré ici, on a $\mu^E = \lambda^E$ dès que $\mu = \lambda$.

Lorsque $\mu = \lambda = \varepsilon_x$, $x \in X$, on notera les mesures μ^E, ν^E et λ^E correspondantes dans le théorème précédent par μ_x^E, ν_x^E et λ_x^E respectivement. Ce sont ces mesures qui permettent de définir les notions de couples finement harmoniques et finement hyperharmoniques.

On note $\mathcal{P}(X)$ (resp. $\mathcal{P}_1(X)$, resp. $\mathcal{P}_2(X)$) le cône des $\mathcal{H}$- (resp. $\mathcal{H}_1$-, resp. $\mathcal{H}_2$-) potentiels et on pose

$$\mathcal{P}_2'(X) = \{q \in \mathcal{P}_2(X) \,|\, \exists p \in \mathcal{P}_1(X) : (p, q) \in \mathcal{P}(X)\}.$$

Lemme 2.2: *Soit $(X, \mathcal{H})$ un espace biharmonique fort; alors tout $\mathcal{H}_2$-potentiel q est l'enveloppe supérieure d'une suite croissante (q_n) d'éléments de $\mathcal{P}_2'(X)$.*

Démonstration: Soit (p', q') un $\mathcal{H}$-potentiel tel que $p' > 0$ et $q' > 0$. Il est facile de vérifier que la suite (q_n) définie par $q_n = \min(q, nq')$ répond aux conditions du lemme.

On note $\mathcal{H}_\Delta$ le faisceau biharmonique défini sur Ω par le Laplacien:

$$\mathcal{H}_\Delta(\omega) = \{(u, v) \in [\mathcal{C}^2(\omega)]^2 : \Delta u = -v, \Delta v = 0\},$$

pour tout ouvert ω de Ω. Le couple $(\Omega, \mathcal{H}_\Delta)$ est un espace biharmonique dont les espaces harmoniques associés sont identiques à l'espace harmonique classique défini par l'opérateur de Laplace sur Ω.

On rappelle d'après [10] que l'espace biharmonique $(\boldsymbol{R}^n, \mathcal{H}_\Delta)$ est fort si et seulement si $n \geqslant 5$. Par contre, si Ω est un domaine borné de $\boldsymbol{R}^n$, l'espace $(\Omega, \mathcal{H}_\Delta)$ est fort pour tout $n \geqslant 1$. Il serait intéressant de caractériser les domaines forts de $\boldsymbol{R}^n$ pour $n \leqslant 4$. Dans toute la suite on suppose que Ω est un domaine fort.

Proposition 2.3: *Pour tout ouvert fin ω relativement compact, $\overline{\omega} \subset \Omega$, et tout $x \in \omega$, on a $\mu_x^{C\omega} = \lambda_x^{C\omega} = \varepsilon_x^{C\omega}$, où $\varepsilon_x^{C\omega}$ est la balayée de la mesure ε_x sur $C\omega$ dans l'espace harmonique classique associé au Laplacien.*

Démonstration: En appliquant le théorème précédent aux couples $P = (p, 0)$, où p est un potentiel quelconque sur Ω, on voit que $\mu_x^{C\omega} = \varepsilon_x^{C\omega}$. Pour établir la relation $\lambda_x^{C\omega} = \varepsilon_x^{C\omega}$, il suffit d'utiliser le lemme précédent en observant pour tout $\mathcal{H}$-potentiel $P = (p, q)$, la fonction $\widehat{P}_2^E$ n'est autre que la réduite de q sur E.

Pour tout ouvert fin V on désigne par $\partial_f V$ la frontière fine de V et par $\widetilde{V}$ son adhérence fine. Il est bien connu que si l'ouvert fin ω est régulier, alors la mesure $\varepsilon_x^{C\omega}$ est portée par $\partial_f \omega$.

Définition 2.4: *Soit ω un ouvert fin relativement compact de Ω, $\overline{\omega} \subset \Omega$, le triplet de mesures $(\mu_x^{C\omega}, \nu_x^{C\omega}, \lambda_x^{C\omega})$ est appelé le triplet des mesures biharmoniques au point x de ω.*

3. - COUPLES FINEMENT HYPERHARMONIQUES ET COUPLES FINEMENT BIHARMONIQUES

Dans toute la suite, $\mathrm{f}-\lim$ et $\mathrm{f}-\lim\inf$ désigneront respectivement les limites fine et fine inférieure, c'est-à-dire au sens de la topologie fine. Pour un couple $F = (u, v)$ de fonctions sur U, on note $\mathrm{f}-\liminf_{x\to y} F(x)$ le couple $(\mathrm{f}-\liminf_{x\to y} u(x), \mathrm{f}-\liminf_{x\to y} v(x))$.

On rappelle d'abord qu'une fonction u sur un ouvert fin V de Ω est dite finement hyperharmonique dans V si u est finement s.c.i., à valeurs dans $]-\infty, +\infty]$, et si pour tout ouvert fin relativement compact ω tel que $\overline{\omega} \subset V$, et tout $x \in \omega$, on a

$$u(x) \geqslant \int^* u d\varepsilon_x^{C\omega} > -\infty .$$

DÉFINITION 3.1: *Un couple (u, v) de fonctions sur un ouvert fin V de Ω est dit finement hyperharmonique dans V si u et v sont finement s.c.i. à valeurs dans $]-\infty, +\infty]$, et si pour tout ouvert fin relativement compact ω tel que $\overline{\omega} \subset V$, et tout $x \in \omega$, on a*

$$u(x) \geqslant \int^* u d\mu_x^{C\omega} + \int^* v d\nu_x^{C\omega} > -\infty , \; v(x) \geqslant \int^* v d\lambda_x^{C\omega} > -\infty .$$

Ces inégalités sont appelées inégalités de la moyenne.

On note $\mathcal{U}_f(V)$ l'ensemble des couples finement hyperharmoniques dans un ouvert fin V de Ω. Il est clair que $\mathcal{U}_f(V)$ est un cône convexe de sommet 0, c'est-à-dire,

1) $\forall u, v \in \mathcal{U}_f(V),\ u + v \in \mathcal{U}_f(V)$,
2) $\forall u \in \mathcal{U}_f(V), \forall \lambda \geqslant 0,\ \lambda u \in \mathcal{U}_f(V)$.

De plus, le cône $\mathcal{U}_f(V)$ est inf-stable, c'est à dire,

$$\forall F, G \in \mathcal{U}_f(V), \min(F, G) \in \mathcal{U}_f(V) .$$

On notera également $\mathcal{U}_f^+(V)$ le cône des couples finement hyperharmoniques $\geqslant 0$ dans V.

Un couple (u, v) de fonctions sur un ouvert fin V de Ω est dit finement hypoharmonique dans V si le couple $(-u, -v)$ est finement hyperharmonique dans V.

DÉFINITION 3.2: *Un couple (u, v) de fonctions sur un ouvert fin V de Ω à valeurs dans **R** est dit finement harmonique dans V si (u, v) est à la fois finement hyperharmonique et finement hypoharmonique.*

Ainsi, un couple finement biharmonique dans un ouvert fin V de Ω est un couple (u, v) de fonctions finies, finement continues sur V, et qui vérifient les formules de la moyenne:

$$u(x) = \int u d\mu_x^{C\omega} + \int v d\nu_x^{C\omega}, \qquad v(x) = \int \lambda_x^{C\omega},$$

pour tout ouvert fin relativement compact $\omega \subset \overline{\omega} \subset V$, et tout $x \in \omega$.

Il est facile de voir que si U et V sont des ouverts fins de Ω tels que $V \subset U$ et si $F = (u, v) \in \mathcal{U}_f(U)$, alors $F|_V = (u|_V, v|_V) \in \mathcal{U}_f(V)$. Cette propriété, vraie aussi pour les couples finement harmoniques, permet, quitte à se restreindre aux composantes finement connexes de l'ouvert fin V, de se ramener au cas où V est un domaine fin U que l'on fixera dans toute la suite. On rappelle que la topologie fine est localement connexe (voir [11], cor. du th. 9.11).

Le théorème suivant se démontre exactement comme le théorème 9.4. de [11].

Théorème 3.3: *Soit (f, g) un couple de fonctions définies et s.c.i. sur $\widetilde{U}$, finement hyperharmonique dans U. Si de plus il existe un potentiel fin stable P dans Ω tel que $(f, g) \geqslant -P$, alors on a $(f(x), g(x)) \geqslant (\int^* f d\mu_x^{CU} + \int^* g d\nu_x^{CU}, \int^* g d\lambda_x^{CU})$ pour tout $x \in U$ où P est fini.*

On dit qu'un potentiel $P = (p, q)$ est stable si les potentiels p et q sont stables.

Les quatres propositions qui suivent résultent immédiatement de la définition 3.1 et de celle des fonctions finement hyperharmoniques.

Proposition 3.4: *Soit (u_n, v_n) une suite croissante d'éléments de $\mathcal{U}_f(U)$. On a alors $(\sup_n u_n, \sup_n v_n) \in \mathcal{U}_f(U)$.*

Proposition 3.5: *Soit $(u, v) \in \mathcal{U}_f(U)$, et soit v' une fonction finement hyperharmonique dans U. Si $v' \leqslant v$, alors $(u, v') \in \mathcal{U}_f(U)$.*

Proposition 3.6: *Soient u et v deux fonctions finement hyperharmoniques $\geqslant 0$ dans U On a alors $(u, 0) \in \mathcal{U}_f^+(U)$, et $(+\infty, v) \in \mathcal{U}_f^+(U)$.*

Proposition 3.7: *Soit $(u, v) \in \mathcal{U}_f^+(U)$; alors les fonctions u et v sont finement hyperharmoniques dans U. En particulier le couple $(u, 0) \in \mathcal{U}_f^+(U)$.*

Théorème 3.8: *Soient V un ouvert fin de U et $(u_1, v_1) \in \mathcal{U}_f(U)$, et $(u_2, v_2) \in \mathcal{U}_f(V)$ tels que*

$$\mathrm{f} - \liminf_{x \to y} (u_2, v_2)(x) \geqslant (u_1(y), v_1(y)), \ \forall y \in \partial_f V \cap U,$$

alors le couple (u, v) *défini par*

$$(u, v)(x) = \begin{cases} \min((u_1, v_1), (u_2, v_2))(x) & \text{si } x \in V, \\ (u_1, v_1)(x) & \text{si } x \in U \backslash V \end{cases}$$

est finement hyperharmonique dans U.

Démonstration: Le couple (u, v) est finement s.c.i. d'après les hypothèses de l'énoncé; les inégalités de la moyennes sont évidentes.

Proposition 3.9: *Si* $(u, v) \in \mathcal{U}_f^+(U)$, *alors les fonctions* u *et* v *sont finement hyperharmoniques dans* U.

Proposition 3.10: *Soient* $(u, v) \in \mathcal{U}_f^+(U)$ *et* ω *un ouvert fin régulier tel que* $\tilde{\omega} \subset U$; *alors la fonction* $(u, v)_\omega$ *définie par*

$$(u, v)_\omega = \begin{cases} \left(\int^* u d\varepsilon_{\cdot}^{C\omega} + \int^* v d\nu_{\cdot}^{C\omega}, \int^* v d\varepsilon_{\cdot}^{C\omega}\right) & \text{dans } \omega, \\ (u, v) & \text{dans } U \backslash \omega \end{cases}$$

est finement hyperharmonique dans U.

Démonstration: Comme le couple (u, v) est $\geqslant 0$, les fonctions u et v sont finement hyperharmoniques $\geqslant 0$ dans U d'après la proposition précédente. Il en résulte alors d'après ([11], th. 14.6 et th. 14.7) que l'on a $\mathrm{f} - \liminf_{x \to y} \left(\int^* u d\varepsilon_x^{C\omega} + \int^* v d\nu_x^{C\omega}\right) \geqslant u(x)$ et $\mathrm{f} - \liminf_{x \to y} \left(\int^* v d\varepsilon_x^{C\omega}\right) \geqslant v(y)$ pour tout $y \in \partial_f \omega$. La proposition résulte maintenant des théorèmes 3.3 et 3.8.

4. - Réduction et balayage des couples finement hyperharmoniques

Si f est une fonction sur U, on note $\hat{f}$ sa régularisée finement s.c.i. C'est la plus grande minorante de f qui soit finement s.c.i. dans U, et elle est donnée par

$$f(x) = \mathrm{f} - \liminf_{y \to x} f(y), \qquad \forall x \in U.$$

Si $F = (f, g)$ est un couple de fonctions sur U, on note $\hat{F}$ le couple $(\hat{f}, \hat{g})$. Ce couple est applelé le couple régularisé finement s.c.i. de F dans U.

Définition 4.1: *Soit* $A \subset U$ *et* $F = (f, g)$ *un couple de fonctions sur* U. *Le couple réduit de* F *sur* A, *noté* F^A, *est le couple défini par*

$$F^A = \inf\{(u, v) \in \mathcal{U}_f^+(U); (u, v) \geqslant (f, g) \ \ sur\ A\}.$$

Le couple balayé de F *sur* A *est le couple* $\hat{F}^A$ *régularisé finement s.c.i. de* F^A.

Proposition 4.2: *Soit* $A \subset U$ *et* $F = (f, g)$ *un couple de fonctions sur* U. *Alors le couple* $\hat{F}^A$ *est finement hyperharmonique dans* U. *Si de plus le couple* F *est majoré par* *un couple finement surharmonique* $\geqslant 0$ *dans* U, *alors le couple* $\widehat{F}^A$ *est finement surharmonique dans* U.

PROPOSITION 4.3: *Soient* (f, g) *un couple de fonctions sur* U, *et* $A \subset U$. *Posons* $\widehat{F}^A = (\widehat{F}_1^A, \widehat{F}_2^A)$. *On a alors* $\widehat{(f, 0)}^A = ({}^U\widehat{R}_f^A, 0)$ *et* $\widehat{F}_2^A = {}^U\widehat{R}_g^A$.

DÉMONSTRATION: Le couple $({}^U\widehat{R}_f^A, 0)$ est finement hyperharmonique $\geqslant 0$ dans U et majore $(f, 0)$ q.p. sur A, donc $(\widehat{R}_f^A, 0) \geqslant \widehat{(f, 0)}^A$. D'autre part si $(u, v) \in \mathcal{U}_f^+(U)$ majore le couple $(f, 0)$ sur A, alors u est une fonction finement hyperharmonique $\geqslant 0$ qui majore f sur A, donc $\widehat{(f, 0)}^A \geqslant (\widehat{R}_f^A, 0)$, et par suite $\widehat{(f, 0)}^A = (\widehat{R}_f^A, 0)$. Soit maintenant v une fonction finement hyperharmonique $\geqslant 0$ sur U telle que $v \geqslant g$ sur A. Alors le couple $(+\infty, v)$ est finement hyperharmonique $\geqslant 0$ et majore (f, g) sur A, d'où $\widehat{R}_g^A \geqslant \widehat{F}_2^A$; l'inégalité inverse découle facilement du fait que pour tout couple finement hyperharmonique $(u, v) \geqslant 0$ tel que $(u, v) \geqslant (f, g)$ sur A, la fonction v est finement hyperharmonique $\geqslant 0$ et majore g sur A.

PROPOSITION 4.4: *Soient* $(u, v) \in \mathcal{U}_f^+(U)$ *et* $A \subset U$. *Alors on a* $\widehat{(u, v)}^A = (u, v)$ *q.p. sur* A.

DÉMONSTRATION: Cela résulte en effet du fait que, pour tout couple finement hyperharmonique $(u, v) \geqslant 0$, les fonctions u et v sont finement hyperharmoniques positives et de [11], th. 11.8.

REMARQUE: Si $(u, v) \in \mathcal{U}_f^+(U)$ majore q.p. un couple F de fonctions sur $A \subset U$, alors $(u, v) \geqslant \widehat{F}^A$.

5. - ORDRE SPÉCIFIQUE DANS $\mathcal{U}_f^+(U)$

Remarquons d'abord que le cône $\mathcal{U}_f^+(U)$ est réticulé pour l'ordre naturel, ce qui se démontre comme en théorie des fonctions finement harmoniques.

L'ordre spécifique, noté $\prec$, est défini sur $\mathcal{U}_f^+(U)$ par

$$(u, v) \prec (s, t) \Leftrightarrow \exists (u_1, v_1) \in \mathcal{U}_f(U) : (s, t) = (u_1, v_1) + (u, v).$$

PROPOSITION 5.1: *Soient* $F_1 = (u_1, v_1)$, $F_2 = (u_2, v_2) \in \mathcal{U}_f^+(U)$. *On a alors* $[\widehat{(F_1 - F_2)^+}]^U \prec F_1$.

DÉMONSTRATION: La proposition se démontre exactement comme dans le cas des fonctions finement hyperharmoniques (voir [11], pages 129, 130 et 131).

COROLLAIRE: (Propriété de décomposition de Riesz). *Soient* F, G *et* H *trois couples de* $\mathcal{U}_f^+(U)$ *tels que* $F \leqslant G + H$. *Il existe alors deux couples* $F_1, F_2 \in \mathcal{U}_f^+(U)$ *tels que* $F = F_1 + F_2$, $F_1 \leqslant G$ *et* $F_2 \leqslant H$.

THÉORÈME 5.2: *Soient* S, $T \in \mathcal{U}_f^+(U)$, *et* $A \subset U$. *On a alors* $(\widehat{S+T})^A = \widehat{S}^A + \widehat{T}^A$.

DÉMONSTRATION: L'inégalité $(\widehat{S+T})^A \leqslant \widehat{S}^A + \widehat{T}^A$ découle immédiatement de la définition de couple balayé. Montrons l'inégalité inverse. On a $(\widehat{S+T})^A = S + T = \widehat{S}^A + \widehat{T}^A$ q.p. sur A d'après la proposition précédente, donc $\widehat{S}^A + \widehat{T}^A \leqslant (\widehat{S+T})^A$ en vertu du corollaire précédent appliqué à l'inégalité $(\widehat{S+T})^A \leqslant \widehat{S}^A + \widehat{T}^A$.

On déduit aussi de la proposition 5.1 que le cône $\mathcal{U}_f^+(U)$ vérifie les axiomes du chapitre 4 de [5] quand U est muni de la topologie fine, d'où le résultat suivant:

PROPOSITION 5.3: *Le cône* $\mathcal{U}_f^+(U)$ *est un treillis complètement réticulé pour l'ordre spécifique.*

Si F, $G \in \mathcal{U}_f^+(U)$, on note $F \vee G$ et $F \wedge G$ respectivement le max et le min au sens de l'ordre spécifique. Si $\{F_i;\ i \in I\}$ est une famille d'éléments de $\mathcal{U}_f^+(U)$, on note $\bigwedge_i F_i$ (resp. $\bigvee_i F_i$) l'enveloppe inférieure (resp. supérieure) au sens de l'ordre spécifique de la famille $\{F_i;\ i \in I\}$.

Remarquons que, comme dans le cas harmonique, on a

$$F \vee G + F \wedge G = F + G$$

et, pour une famille filtrante croissante (resp. décroissante), au sens de l'ordre spécifique, $\{F_i;\ i \in I\}$, d'éléments de $\mathcal{U}_f^+(U)$, on a

$$\bigvee_i F_i = \sup_i F_i \left(resp.\ \bigwedge_i F_i = \widehat{\inf_i F_i}\right).$$

6. - COUPLES FINEMENT SURHARMONIQUES ET COUPLES POTENTIELS FINS

Dans ce paragraphe on va se contenter d'énoncer seulement les définitions et quelques propriétés essentielles des couples finement surharmoniques et des couples potentiels fins (dans la suite on dira tout simplement, par abus de langage, potentiels fins).

DÉFINITION 6.1: *Un couple* (u, v) *finement hyperharmonique dans un ouvert fin* V *de* Ω *est dit finement surharmonique dans* V *si les fonctions* u *et* v *sont finies sur un ensemble dense dans* V.

Il n'est pas difficile de voir que, d'après ([11], th. 12.9), pour qu'un couple $(u, v) \in \mathcal{U}_f(U)$ soit finement surharmonique, il faut et il suffit que les fonctions u et v soient finies en au moins un point de U.

On note $\mathcal{S}_f(U)$ l'ensemble des couples surharmoniques dans U. Il est clair que cet ensemble est un cône convexe. On note aussi $\mathcal{S}_f^+(U)$ le sous-cône de $\mathcal{S}_f(U)$ formé des couples finement surharmoniques $\geqslant 0$, et $\mathcal{S}_f^{1,+}(U)$ le cône des fonctions finement surharmoniques $\geqslant 0$ dans U.

DÉFINITION 6.2: *Un couple* $P = (p_1, p_2) \in \mathcal{S}_f^+(U)$ *est appelé potentiel fin si tout couple* (u, v) *finement hypoharmonique dans U qui le minore au sens de l'ordre naturel produit est* $\leqslant 0$.

On note $\mathcal{P}_f(U)$ l'ensemble des couples potentiels fins dans U. Alors $\mathcal{P}_f(U)$ est un sous-cône de $\mathcal{S}_f^+(U)$. C'est aussi une bande de $\mathcal{S}_f^+(U)$, i.e.,

$$\forall P, Q \in \mathcal{S}_f^+(U) : P + Q \in \mathcal{P}_f(U) \Rightarrow P, Q \in \mathcal{P}_f(U).$$

PROPOSITION 6.3: *Soit* (s_1, s_2) *un couple finement surharmonique dans un domaine fin U de* Ω. *Alors*

i) *si* $s_2 \geqslant 0$, *la fonction* s_1 *est finement surharmonique*;

ii) *le couple* (s_1, s_2) *est un potentiel fin si et seulement si* s_1 *et* s_2 *sont des potentiels fins.*

DÉMONSTRATION: Le i) résulte aussitôt de la définition 6.1 et de celle des fonctions finement surharmoniques. Montrons le ii). Supposons que s_1 et s_2 soient des potentiels fins dans U et que (u, v) soit un couple finement hypoharmonique dans U tel que $(u, v) \leqslant (s_1, s_2)$. Comme v est finement hypoharmonique dans U, on a $v \leqslant 0$, et il résulte alors de la définition des couples finement hypoharmoniques que u est finement hypoharmonique dans U, et donc $u \leqslant 0$. Inversement, supposons que le couple (s_1, s_2) soit un potentiel fin. Si u est une fonction finement hypoharmonique dans U, telle que $u \leqslant s_1$, alors le couple $(u, 0)$ est finement hypoharmonique $\leqslant (s_1, s_2)$, d'où $(u, 0) \leqslant 0$, et par suite $u \leqslant 0$, donc s_1 est un potentiel fin dans U. De même, si v est une fonction finement hypoharmonique dans U telle que $0 \leqslant v$, alors le couple $(-\infty, v)$ est finement hypoharmonique et on a $(-\infty, v) \leqslant (s_1, s_2)$, d'où $v = 0$, donc s_2 est un potentiel fin dans U.

PROPOSITION 6.4: (Principe du maximum). *Soient* ω *un ouvert fin* $\subset U$ *et* $(u, v) \in \mathcal{U}_f(\omega)$ *tel que* $\mathrm{f} - \liminf_{x \in \omega,\, x \to y} (u, v)(y) \geqslant 0$, *pour tout* $y \in \partial_f \omega \cap U$. *S'il existe un potentiel fin P dans U tel que* $(u, v) \geqslant -P$ *dans* ω, *alors on a* $(u, v) \geqslant 0$ *dans* ω.

On signale que la réstriction de l'ordre spécifique dans $\mathcal{U}_f^+(U)$ à $\mathcal{S}_f^+(U)$ en fait un treillis complètement réticulé.

Comme en théorie des fonctions finement harmoniques, un couple $H \in \mathcal{S}_f^+(U)$ sera dit invariant s'il est orthogonal, pour l'ordre spécifique, à la bande des couples potentiels fins. On note $\mathcal{H}_i(U)$ l'ensemble des couples invariants; $\mathcal{H}_i(U)$ est un sous-cône de

$\mathcal{S}_f^+(U)$. C'est aussi une bande de $\mathcal{S}_f^+(U)$. On a donc,

$$\forall S \in \mathcal{S}_f^+(U),\ \exists!\, P \in \mathcal{P}_f(U),\ \exists! H \in \mathcal{H}_i(U) : S = P + H\,.$$

Il est clair que que $\mathcal{H}_i(U)$ est un cône convexe. Il est clair aussi que tout couple finement biharmonique est invariant, mais la réciproque est fausse en général. En effet soit h une fonction invariante dans U qui ne soit pas finement harmonique; alors le couple $(h, 0)$ est invariant, mais il n'est pas finement biharmonique.

Question: Le problème de savoir si une fonction invariante dans U est la somme d'une suite de fonctions finement harmoniques positives dans U a été posé par Fuglede dans [16]. A notre connaissance ce problème demeure toujours ouvert. Par analogie avec ce problème on peut poser la question suivante:

Est-ce que tout couple invariant dans U est la somme d'une suite de couples finement harmoniques $\geqslant 0$?

Même si la réponse au problème de Fuglede est positive, il semble qu'il n'est pas évident qu'il en soit de même pour les couples invariants. En effet, comme on va le voir dans la suite, si $H = (h, k)$ est un couple invariant, on a $h = h_1 + V(k)$, où V est un noyau borélien sur U, et h_1 est invariante. On voit donc que, même si h_1 et k sont des sommes de suites de fonctions finement harmoniques $\geqslant 0$, il ne semble pas facile d'affirmer que le couple $(V(k), k)$ est la somme d'une suite de couples finement harmoniques dans U.

7. - Couples finement hyperharmoniques purs

Proposition 7.1: *Soit v une fonction finement hyperharmonique $\geqslant 0$ dans un ouvert fin V de Ω. Alors la fonction*

$$u_0 = \widehat{\inf}\{u \geqslant 0; (u, v) \in \mathcal{U}_f^+(V)\}$$

est finement hyperharmonique dans V et l'on a $(u_0, v) \in \mathcal{U}_f^+(V)$.

Comme en théorie des fonctions biharmoniques, nous adoptons la définition suivante:

Définition 7.2: *La fonction u_0 de la proposition précédente est appelée la fonction finement hyperharmonique pure d'ordre 2 associée à v.*

Soit (u, v) un couple finement hyperharmonique $\geqslant 0$ dans U. On dit que ce couple est pur si u est la fonction finement hyperharmonique pure d'ordre 2 associée à v.

Pour alléger les écritures, on notera dans la suite $V_0(v)$ la fonction finement hyperharmonique d'ordre 2 associée à une fonction finement hyperharmonique $v \geqslant 0$ dans U. Cette notation sera justifiée par la suite.

Proposition 7.3: *Soit* $(u, v) \in \mathcal{S}_f^+(U)$ *un couple pur. Si la fonction* v *est finement harmonique dans un ouvert fin* $V \subset U$, *et si* u *est finie dans* V, *alors le couple* (u, v) *est biharmonique dans* V.

Démonstration: Soit ω un ouvert fin relativement compact régulier tel que $\overline{\omega} \subset V$; alors le couple $(u, v)_\omega$ est finement hyperharmonique dans U d'après la proposition 3.8, et l'on a

$$(u, v)_\omega = \left(\int u d\mu_\cdot^{C\omega} + \int v d\nu_\cdot^{C\omega}, v\right)$$

dans ω, d'où $u \leqslant \int u d\mu_\cdot^{C\omega} + \int v d\nu_\cdot^{C\omega}$, et, par suite, $u = \int u d\mu_\cdot^{C\omega} + \int v d\nu_\cdot^{C\omega}$ dans ω. Comme le couple (u, v) est finement continu, on en déduit qu'il est finement harmonique dans V.

Proposition 7.4: *Soient* v_1, v_2 *deux fonctions finement hyperharmoniques* $\geqslant 0$ *dans* U. *Alors, si* $v_1 \leqslant v_2$, *on a* $V_0(v_1) \leqslant V_0(v_2)$.

Démonstration: La proposition résulte immédiatement de la définition 7.2 et de la proposition 3.5.

Proposition 7.5: *Soit* $(s_1, s_2) \in \mathcal{S}_f^+(U)$. *On a alors* $V_0(s_2) \prec s_1$, *i.e. il existe* $t \in \mathcal{S}_f^{1,+}(U)$ *tel que* $V_0(s_2) + t = s_1$.

Démonstration: Posons $s = V_0(s_2)$. Soit ω un ouvert fin relativement compact régulier tel que $\overline{\omega} \subset U$ et soient v finement hypoharmonique dans ω, bornée supérieurement, et u finement hyperharmonique dans ω, bornée inférieurement, telles que $\text{f} - \limsup_{x \to y,\, x \in \omega} v(x) \leqslant s_1(y)$ (resp. $\text{f} - \liminf_{x \to y,\, x \in \omega} u(x) \geqslant s(y)$), considérons la fonction

$$t = \begin{cases} \inf(s_1 + u - v, s_1) & \text{dans } \omega, \\ s_1 & \text{dans } U \backslash \omega. \end{cases}$$

Alors, d'après les conditions ci-dessus sur u et v et le théorème 3.8, le couple (t, s_2) est finement surharmonique $\geqslant 0$ dans U. On en déduit $s_1 + u - v \geqslant s$ dans ω. Les fonctions u et v étant arbitraires, on en déduit donc d'après ([11], th. 14.6) que, pour tout $x \in U$, tel que $s(x) < +\infty$, on a

$$s_1(x) - s(x) \geqslant \int^* (s_1 - s)\, d\varepsilon_x^{C\omega}.$$

Le théorème de prolongement par continuité fine ([11], th. 9.14) nous assure alors que la fonction $s_1 - s$ se prolonge en une fonction finement surharmonique $t \geqslant 0$ dans U et l'on a donc $s_1 = s + t$.

PROPOSITION 7.6: *Soient v_1, v_2 deux fonctions finement hyperharmoniques $\geqslant 0$ dans U. On a alors*

$$V_0(v_1 + v_2) = V_0(v_1) + V_0(v_2).$$

DÉMONSTRATION: L'inégalité $V_0(v_1 + v_2) \leqslant V_0(v_1) + V_0(v_2)$ découle simplement de la définition 7.1 et du fait que le couple $(V_0(v_1) + V_0(v_2), v_1 + v_2) = = (V_0(v_1), v_1) + (V_0(v_2), v_2)$ est finement hyperharmonique $\geqslant 0$ dans U. Montrons l'inégalité inverse. Le résultat est trivial si $V_0(v_1) \equiv +\infty$ ou $V_0(v_2) \equiv +\infty$. Supposons donc que les fonctions $V_0(v_1)$ et $V_0(v_2)$ soient finement surharmoniques. Alors, d'après la propriété de décomposition de Riesz des couples finement surharmoniques $\geqslant 0$ appliquée à l'inégalité $(V_0(v_1 + v_2), v_1 + v_2) \leqslant (V_0(v_1), v_1) + (V(v_2), v_2)$, on peut trouver deux couples finement surharmoniques dans U, $(s_1, t_1) \geqslant 0$ et $(s_2, t_2) \geqslant 0$, tels que $(V_0(v_1 + v_2), v_1 + v_2) = (s_1, t_1) + (s_2, t_2)$, $(s_1, t_1) \leqslant (V_0(v_1), v_1)$ et $(s_2, t_2) \leqslant \leqslant (V_0(v_2), v_2)$, ce qui entraîne $t_1 = v_1$ et $t_2 = v_2$ et donc $s_1 = V_0(v_1)$ et $s_2 = V_0(v_2)$, ce qui achève la démonstration de la proposition.

PROPOSITION 7.7: *Soit (v_n) une suite croissante de fonctions finement hyperharmoniques $\geqslant 0$ dans U, et soit $v = \sup\limits_n v_n$. On a alors $V_0(v) = \sup\limits_n V_0(v_n)$.*

DÉMONSTRATION: On a $(V_0(v), v) \in \mathcal{U}_f^+(U)$, et $v \geqslant v_n$, donc $(V_0(v), v_n) \in \mathcal{U}_f^+(U)$ pour tout n d'après la proposition 3.5, donc $V_0(v) \geqslant V_0(v_n)$ pour tout n, et par suite $V_0(v) \geqslant \sup\limits_n V_0(v_n)$. D'autre part, $(\sup\limits_n V_0(v_n), \sup\limits_n v_n) \in \mathcal{U}_f^+(U)$ pour tout n, d'après la proposition 3.4, donc $(\sup\limits_n V_0(v_n), v) \in \mathcal{U}_f^+(U)$, d'où $V_0(v) \leqslant \sup\limits_n V_0(v_n)$.

On note G_Ω le noyau de Green de Ω. On rappelle que G_Ω est défini par

$$G_\Omega(x, y) = G(x, y) - h(x, y),$$

où, si $n \geqslant 3$, G est le noyau de Green de $\boldsymbol{R}^n$:

$$G(x, y) = \frac{1}{\sigma_n(n-2)} \frac{1}{\|x - y\|^{n-2}},$$

et, si $n = 2$, G est le noyau logarithmique de $\boldsymbol{R}^2$:

$$G(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \ln \|x - y\|,$$

et où σ_n est l'aire de la sphère unité de $\boldsymbol{R}^n$ et, pour tout $y \in \Omega$, $h(., y)$ est la plus grande minorante harmonique de la fonction $G(., y)$ dans Ω.

Soit W le noyau borélien défini sur Ω par

$$W(f) = \int G_\Omega(., y) f(y)\, dy$$

pour toute fonction borélienne $f \geqslant 0$ sur Ω. Alors, pour toute fonction hyperharmonique $v \geqslant 0$ dans Ω, $W(v)$ est la fonction hyperharmonique pure d'ordre 2 associée à v.

On note G_U le noyau de Green fin de U. On rappelle que G_U est défini par

$$G_U(x, y) = [G_\Omega(., y) - \widehat{R}^{CU}_{G_\Omega(., y)}](x), \ \forall x, y \in U ,$$

où la fonction entre crochets est prolongée par continuité fine au point y.

Pour tout $y \in U$, la fonction $G_U(., y): x \mapsto G_U(x, y)$ est un potentiel fin finement harmonique dans $U \backslash \{y\}$, et tout potentiel fin vérifiant cette propriété est proportionnel à $G_U(., y)$ (voir [12]).

Il résulte aussitôt de la définition de G_U que, pour tout $x \in U$, la fonction $y \mapsto G_U(x, y)$ est borélienne sur U. Soit V_U le noyau borélien sur U défini par

$$V_U f(x) = \int G_U(x, y) \, f(y) \, dy$$

pour toute fonction borélienne $f \geqslant 0$ sur U. Ce noyau sera noté simplement V dans la suite. On remarquera que si $U = \Omega$, alors $V = W$.

Si ω est un ouvert fin de U, on notera V_ω le noyau égal à V_δ dans chaque composante finement connexe δ de ω.

On rappelle qu'une mesure de Borel sur U est une mesure positive σ-finie sur U muni de sa tribu de Borel définie par la topologie induite par celle de Ω. Si μ est une mesure de Borel sur U, alors pour tout $x \in U$, l'intégrale $\int G_U(x, y) \, d\mu(y)$ a un sens, et la fonction G_U^μ est définie par $G_U^\mu(x) = \int G_U(x, y) \, d\mu(y)$ pour tout $x \in U$.

Nous rappelons d'abord les résultats suivants:

THÉORÈME 7.8 ([14], th. 2.4): *Soit μ une mesure de Borel $\geqslant 0$ sur U. Alors G_U^μ est finement hyperharmonique dans U, et si G_U^μ est finement surharmonique, alors c'est un potentiel fin.*

THÉORÈME 7.9: ([15] *Pour tout potentiel fin p dans U, il existe une mesure de Borel $\mu \geqslant 0$ sur U, unique, telle que $p = G_U^\mu$.*

Posons

$$\mathcal{V}(\Omega) = \{ t \in \mathcal{S}^+(\Omega) : W(t) \in \mathcal{S}^+(\Omega) \} .$$

Pour toute fonction $s \in \mathcal{S}^+(\Omega)$, la fonction $s - \widehat{R}^{CU}_s$ est bien définie et finement surharmonique dans le complémentaire dans U d'un ensemble polaire. Elle se prolonge donc, en vertu du principe du prolongement par continuité fine, en une fonction, notée s_U, de $\mathcal{S}_f^+(U)$. Remarquons que si $t \in \mathcal{V}(\Omega)$, alors $W(t)_U = V(t|_U)$.

PROPOSITION 7.10: *Soit $t \in \mathcal{V}(\Omega)$. Alors la fonction hyperharmonique pure d'ordre 2 associée à la restriction de t à U est égale à $W(t)_U$.*

DÉMONSTRATION: Le couple $(W(t)_U, t)$ est finement hyperharmonique $\geqslant 0$ dans U. En effet, on a, pour tout ouvert fin $\delta \subset \overline{\delta} \subset U$ et tout $x \in \delta$,

$$\begin{aligned} \int^* (W(t))_U \, d\mu_x^\delta + \int^* t \, d\nu_x^\delta &\leqslant W(t) - \int^* \widehat{R}^{CU}_{W(t)} \,|_U \, d\mu_x^\delta \\ &= (W(t) - \widehat{R}^{CU}_{W(t)})(x) , \end{aligned}$$

car le couple $(W(t), t)$ est finement hyperharmonique dans U et la fonction $\widehat{R}^{CU}_{W(t)}$ est l'enveloppe supérieure des fonctions $\widehat{R}^{CU}_{\min(W(t),\, n)}$, finement harmoniques dans U d'après [11], th. 10.2. Soit u une fonction finement surharmonique $\geqslant 0$ dans U telle que le couple (u, t) soit finement surharmonique dans U, et soit u_1 la fonction définie par

$$u_1 = \begin{cases} \min(u + \widehat{R}^{CU}_{W(t)},\ W(t)) & \text{dans } U, \\ W(t) & \text{dans } \Omega \backslash U. \end{cases}$$

Alors, d'après le théorème 3.8, le couple (u_1, t) est finement surharmonique dans Ω. Or, comme $t \geqslant 0$, la fonction u_1 est finement surharmonique dans Ω, donc elle est surharmonique dans Ω en vertu du théorème 9.8 de [11]. Il en résulte, d'après la définition des couples finement surharmoniques que (u_1, t) est surharmonique dans Ω, d'où $u + \widehat{R}^{CU}_{W(t)} \geqslant W(t)$ et donc le résultat.

PROPOSITION 7.11: *Soit $(u, v) \in \mathcal{S}^+_f(U)$ un couple pur. Alors, si v est invariante dans U, le couple (u, v) est invariant. En particulier si v est finement harmonique dans U, et si u est finie dans U, alors le couple (u, v) est finement harmonique dans U.*

DÉMONSTRATION: Soit (p, q) un potentiel fin tel que $(p, q) \prec (u, v)$. On a alors $q \prec v$, et comme v est invariante et q est un potentiel fin, on a $q = 0$, et par suite $(u, v) = (u_1, v) + (p, 0)$, où $(u_1, v) \in \mathcal{S}^+_f(U)$; mais alors on aura $u_1 \geqslant u$ et donc $p = 0$ et le couple (u, v) est invariant. Le reste de la proposition est évident.

LEMME 7.12: *Pour toute fonction $s \in \mathcal{S}^{1,+}_f(U)$, il existe une suite croissante (t_n) de fonctions de $\mathcal{V}(\Omega)$ telle que $\sup_n (t_n)_U$.*

DÉMONSTRATION: Soit q un potentiel fin > 0 dans U. On a alors $s = \sup_m \min(s, mq)$. D'autre part, pour tout $m \in \mathbf{N}$, $\min(s, mq)$ est un potentiel fin; il est donc, d'après le théorème 7.9, de la forme $G^{\mu_m}_U$, où μ_m est une mesure de Borel $\geqslant 0$ sur U. Les mesures μ_m sont des sommes de suites $(\mu_{m,n})_n$ de mesures finies sur U de supports compacts, et l'on a pour chaque n, $G^{\mu_{m,n}}_U = (G_{\mu_{m,n}})_U$. La suite $((\sum_{i \leqslant n} G_{\mu_{m,i}})_U)_{m,n}$ répond aux conditions du lemme.

THÉORÈME 7.13: *Pour toute fonction finement hyperharmonique $v \geqslant 0$ dans U, $V(v)$ est la fonction hyperharmonique pure d'ordre 2 associée à v.*

DÉMONSTRATION: Soit $s \in \mathcal{V}(\Omega)$. On a alors

$$s|_U = s_U + \widehat{R}^{CU}_s|_U,$$

d'où, d'après la proposition 7.6,

$$V_0(s|_U) = V_0(s_U) + V_0(\widehat{R}^{CU}_s),$$

et, par suite, d'après la proposition 7.10,

$$\begin{aligned} V_0(s_U) &= V_0(s|_U) - V_0(\widehat{R}_s^{CU}|_U) \\ &= W(s)_U - W(\widehat{R}_s^{CU})_U, \end{aligned}$$

q.p. dans U. D'autre part, un calcul facile donne

$$W(s)_U - W(\widehat{R}_s^{CU})_U = V(s_U) \text{ q.p.},$$

d'où $V_0(s_U) = V(s_U)$. Le théorème découle maintenant du lemme 7.12 en vertu de la proposition 7.7.

Remarque: Si v est une fonction finement hyperharmonique $\geqslant 0$ dans un ouvert fin de U, alors la fonction finement hyperharmonique pure d'ordre 2 associée à v est égale à $V_\omega(v)$.

Le théorème suivant est une application du précédent:

Théorème 7.14: *Si (u, v) est un couple finement surharmonique localement borné inférieurement dans Ω, alors (u, v) est un couple surharmonique dans Ω.*

Démonstration: Quitte à se placer localement, on peut supposer que $(u, v) \geqslant 0$ dans Ω. D'après [11], th. 9.8, la fonction v est hyperharmonique dans Ω. D'autre part on a, d'après ce qui précède, $u = V(v) + t$, où t est une fonction finement surharmonique $\geqslant 0$, donc surharmonique dans Ω toujours d'après [11], th. 9.8. Maintenant le théorème résulte du fait que, dans le cas où $U = \Omega$, le noyau V coïncide avec le noyau W du début de ce paragraphe.

Proposition 7.15: *Soit $(u, v) \in \mathcal{S}_f^+(U)$ un couple pur. Si v est un potentiel fin, alors (u, v) est un potentiel fin.*

Maintenant on peut donner également quelques applications du théorème 7.13. aux couples invariants.

Proposition 7.16: *Si (h, k) est un couple invariant dans U, alors k est une fonction invariante dans U.*

Démonstration: En effet, si p est un potentiel fin qui minore spécifiquement k, alors le couple (h, p) est finement surharmonique dans U et donc le couple $(V(p), p)$ est, d'après la proposition précédente, un potentiel fin qui minore spécifiquement (h, k) d'après la proposition 7.5, donc il est nul.

Comme en théorie des fonctions finement harmoniques, nous avons la

Proposition 7.17: *Soit $H = (h, k)$ un couple invariant dans U, alors H est finement harmonique dans le domaine fin $V = \{x \in U;\ h(x) + k(x) < +\infty\}$.*

DÉMONSTRATION: En effet, comme la fonction k est invariante d'après la proposition précédente, elle est finement harmonique dans V d'après ([14], th. 4.4 et [11], th. 10.2). La proposition découle maintenant de la proposition 7.3.

8. - REPRÉSENTATION INTÉGRALE DES POTENTIELS FINS

Le domaine Ω étant supposé fort, on peut affirmer, d'après [10], que pour tout $y \in \Omega$, la fonction $W(G_\Omega(.\ y))$ est surharmonique.

On définit le premier noyau de Green fin G_U^1 de U par

$$G_U^1(x, y) = V(G_U(., y))(x), \ \forall (x, y) \in U^2,$$

où V est le noyau du paragraphe précédent.

PROPOSITION 8.1: *Soit $y \in U$. Alors le couple $(G_U^1(., y), G_U(., y))$ est un potentiel fin pur dans U, finement biharmonique dans $U \backslash \{y\}$. Tout potentiel fin vérifiant cette propriété est proportionnel à $(G_U^1(., y), G_U(., y))$.*

DÉMONSTRATION: Le couple $(G_U^1(., y), G_U(., y))$ est pur et l'on a $G_U^1(., y) \leqslant \leqslant W(G(., y))$. Puisque la fonction $W(G_\Omega(., y))$ est finie dans $U \backslash \{y\}$, et que $G_U(., y)$ est finement harmonique dans $U \backslash \{y\}$, il résulte de la proposition 7.3 que le couple $(G_U^1(., y), G_U(., y))$ est finement biharmonique dans $U \backslash \{y\}$. Soit maintenant (p, q) un couple potentiel fin pur dans U, finement biharmonique dans $U \backslash \{y\}$. Alors q est proportionnel à $G_U(., y)$, soit, $q = \alpha G_U(., y)$, d'où $p = V(q) = \alpha G_U^1(., y)$.

Pour tout $x \in U$, la fonction $y \mapsto G_U^1(x, y)$ est borélienne. Donc si μ est une mesure de Borel $\geqslant 0$ sur U, l'intégrale $\int G_U^1(x, y)\, d\mu(y)$ a un sens. On notera alors $G_U^{1\mu}$ la fonction $\int G_U^1(., y)\, d\mu(y)$.

PROPOSITION 8.2: *Pour toute mesure de Borel $\mu \geqslant 0$ sur U, le couple $(G_U^{1\mu}, G_U^\mu)$ est finement hyperharmonique. C'est un potentiel fin dès qu'il est finement surharmonique.*

Nous pouvons maintenant énoncer le

THÉORÈME 8.3: *Soit (p, q) un potentiel fin dans U; alors il existe deux mesures de Borel $\mu, \nu \geqslant 0$ sur U, uniques, telles que $p = G_U^\mu + G_U^{1\nu}$ et $q = G_U^\nu$.*

DÉMONSTRATION: D'après la proposition 7.5 et le théorème 7.13, on a $p = p_1 + + V(q)$, où p_1 est un potentiel fin dans U. Or q es un potentiel fin dans U d'après la proposition 6.4, donc, en vertu du théorème 7.9, il existe une mesure de Borel unique $\nu \geqslant \geqslant 0$ sur U telle que $q = G_U^\nu$, d'où, $V(q) = G_U^1 \nu$ d'après le théorème de Fubini. De même, p_1 est un potentiel fin dans U, donc il existe une mesure de Borel unique $\mu \geqslant 0$ sur U telle que $p = G_U^\mu$.

9. - Problème de Riquier fin

Soit ω un ouvert fin borné tel que $\overline{\omega} \subset U$; on note $\mathcal{U}_f^i(\omega)$ l'ensemble des couples finement hyperharmoniques bornés inférieurement dans ω.

Si (f, g) est un couple de fonctions sur $\partial_f \omega$, on pose

$$\overline{H}^{\omega}_{(f,\,g)} = \inf\{(u,\,v) \in \mathcal{U}_f^i(\omega):\ \mathrm{f}-\liminf_{x\in\omega,\,x\to y}(u,\,v)(x) \geqslant (f(y),\,g(y)),\ \forall y \in \partial_f\omega\}\,.$$

On pose aussi $\overline{H}^{\omega}_{(f,\,g)} = (\overline{H}^{\omega,\,1}_{(f,\,g)}, \overline{H}^{\omega,\,2}_{(f,\,g)})$ et $\underline{H}^{\omega}_{(f,\,g)} = -\overline{H}^{\omega}_{(-f,\,-g)}$.

Il est clair que le couple $\overline{H}^{\omega}_{(f,\,g)}$ (resp. $\underline{H}^{\omega}_{(f,\,g)}$) est un couple finement hyperharmonique (resp. finement hypoharmonique) dans ω.

On dit qu'un couple (f, g) de fonctions sur $\partial_f\omega$ est résolutif (pour le problème de Riquier fin) si on a $\underline{H}^{\omega}_{(f,\,g)} = \overline{H}^{\omega}_{(f,\,g)}$ et si ces fonctions sont finement harmoniques dans ω; on notera alors ces fonctions par $H^{\omega}_{(f,\,g)}$.

Il résulte de la définition et des propriétés des couples finement hyperharmoniques que l'on a $\overline{H}^{\omega,\,2}_{(f,\,g)} = \overline{H}^{\omega}_{g}$ et $\overline{H}^{\omega,\,1}_{(f,\,0)} = \overline{H}^{\omega}_{g}$, avec les notations de [11], p. 173, relatives au problème de Dirichlet fin.

Théorème 9.1: *Soit (f, g) un couple de fonctions sur $\partial_f\omega$. On a alors*

$$\overline{H}^{\omega,\,1}_{(f,\,g)} = \int^* f d\mu^{C\omega}_{\cdot} + \int^* g d\nu^{C\omega}_{\cdot} \quad \text{et} \quad \overline{H}^{\omega,\,2}_{(f,\,g)} = \int^* g d\lambda^{C\omega}_{\cdot}\,.$$

Démonstration: Le théorème se démontre comme dans le cas finement harmonique ([11], preuve du th. 14.6), en utilisant le théorème 3.3.

Corollaire 1: *Pour tout couple (f, g) de fonctions sur $\partial_f\omega$, on a*

$$\overline{H}^{\omega}_{(f,\,g)} = (\overline{H}^{\omega}_{f} + \overline{H}^{\omega,\,1}_{(0,\,g)}, \overline{H}^{\omega}_{g})\,.$$

Corollaire 2: *Un couple (f, g) de fonctions sur $\partial_f\omega$ est résolutif si, et seulement si, pour tout $x \in \omega$, les fonctions f et g sont respectivement intégrables pour les mesures $\mu_x^{C\omega}$, $\nu_x^{C\omega}$ et g est intégrable pour la mesure $\lambda_x^{C\omega}$.*

Corollaire 3: *Soit (f, g) un couple de fonctions boréliennes bornées sur $\partial_f\omega$. Alors (f, g) est résolutif.*

Théorème 9.2: *Supposons que l'ouvert fin ω est régulier et soit (f, g) un couple de fonctions continues bornées sur $\partial_f\omega$. On a alors*

$$\mathrm{f}-\lim_{x\in\omega\to y} H^{\omega}_{(f,\,g)}(x) = (f(y),\,g(y))$$

pour tout $y \in \partial_f\omega$.

Démonstration: Quitte à ajouter à f et g des constantes, on peut supposer que le couple (f, g) est $\geqslant 0$. D'après le théorème précédent et le théorème 14.6 de [11], on a

$H^{\omega}_{(f,\,g)} = (H^{\omega,\,1}_f + H^{\omega,\,1}_{(0,\,g)},\, H^{\omega,\,2}_g)$. Or on sait d'après [11], th. 14.7, que, pour tout $y \in \partial_f \omega$, $\mathrm{f}-\lim\limits_{x\in\omega,\,x\to y} H^{\omega,\,1}_f(x) = f(y)$ et $\mathrm{f}-\lim\limits_{x\in\omega,\,x\to y} H^{\omega,\,2}_g(x) = g(y)$, donc $\mathrm{f}-\liminf\limits_{x\in\omega,\,x\to y} H^{\omega}_{(f,\,g)}(x) \geqslant (f(y),\, g(y))$. Soit c une constante $\geqslant \max(\sup\limits_{x\in\partial_f\omega} f(x), \sup\limits_{x\in\partial_f\omega} g(x))$, alors en appliquant ce qui précède au couple $(c-f,\, c-g)$, on obtient $\mathrm{f}-\limsup\limits_{x\in\omega,\,x\to y} H^{\omega}_{(f,\,g)}(x) \leqslant (f(y),\, g(y))$, et le théorème est donc démontré.

Proposition 9.3: *Si g est une fonction bornée $\geqslant 0$ sur $\partial_f\omega$, alors $\overline{H}^{\omega,\,1}_{(0,\,g)}$ est la fonction hyperharmonique pure d'orde 2 associée à $\overline{H}^{\omega}_g$ dans ω.*

Démonstration: Si $(u,\,v) \in \mathcal{U}^i_f(\omega)$ tel que $\mathrm{f}-\liminf(u,\,v) \geqslant (0,\,g)$ sur $\partial_f\omega$, alors $v \geqslant \overline{H}^{\omega}_g$, et donc $u \geqslant V_{\omega}(\overline{H}^{\omega}_g)$, d'òu l'inégalité $\overline{H}^{\omega,\,1}_{(0,\,g)} \geqslant V^{\omega}(\overline{H}^{\omega}_g)$. D'autre part, on peut trouver une suite décroissante (v_n) de fonctions de $\mathcal{S}^{1,\,+}_f(\omega)$ telle que $\inf v_n = \overline{H}^{\omega}_g$. On a alors $\overline{H}^{\omega}_{(0,\,g)} \leqslant (V_{\omega}(v_n),\, v_n) = (V_{\omega}(\overline{H}^{\omega}_g),\, \overline{H}^{\omega}_g)$.

Corollaire: *Pour tout $x \in \omega$, la mesure ν^{ω}_x est absolument continue par rapport à la mesure λ^{ω}_x.*

Démonstration: Soient A un borélien de U, $A \subset \partial_f\omega$, et $x \in \omega$ tels que $\int 1_A\, d\lambda^{\omega}_x = 0$, alors le couple $H^{\omega}_{(0,\,1_A)} = (0,\,0)$, d'après ce qui précéde, donc $\nu^{C\omega}_x(A) = 0$.

Si l'ouvert fin ω est régulier, alors $\partial_f\omega$ est un borélien de Ω. En effet, on a $\partial_f\omega = b(\omega)\backslash\omega$, où $b(\omega)$ est la base de ω. Si ω est régulier, alors c'est un K_σ de Ω. D'autre part, il est bien connu qu'il existe un potentiel p fini continu sur Ω tel que $b(\omega) = \{x \in \Omega;\, p(x) = \widehat{R}^{\omega}_p\}$, donc $b(\omega)$ et par suite $\partial_f\omega$ sont des boréliens de Ω.

Théorème 9.4: *Supposons que l'ouvert fin ω est régulier. Alors, pour tout $x \in \omega$, les mesures μ^{ω}_x, ν^{ω}_x, et λ^{ω}_x sont portées par $\partial_f\omega$.*

Démonstration: Soit $x \in \omega$. Les mesures $\mu^{C\omega}_x$ et $\lambda^{C\omega}_x$, égales à $\varepsilon^{C\omega}_x$, sont portées par $\partial_f\omega$, d'après ([11], 0.6). Il reste juste à montrer que la mesure $\nu^{C\omega}_x$ est portée par $\partial_f\omega$, mais ceci résulte simplement du fait que cette mesure est absolument continue par rapport à $\lambda^{C\omega}_x$.

Voici une application du résultat précédent:

Théorème 9.5: *Soient ω un ouvert fin relativement compact tel que $\overline{\omega} \subset U$, et $(u,\,v) \in \mathcal{U}^+_f(U)$. On a alors $(u,\,v)_{\omega} = (\widehat{u,\,v})^{C\omega}$.*

Démonstration: Soit $(s,\,t) \in \mathcal{U}^+_f(U)$ tel que $(s,\,t) \geqslant (u,\,v)$ sur $C\omega$; alors on a, d'après le théorème 3.3, $s(x) \geqslant \int^* s\,d\mu^{\omega}_x + \int^* t\,d\nu^{\omega}_x$ et $t(x) \geqslant \int^* t\,d\lambda^{\omega}_x$ pour tout $x \in \omega$, et donc $s(x) \geqslant \int^* u\,d\mu^{\omega}_x + \int^* v\,d\nu^{\omega}_x$ et $t(x) \geqslant \int^* v\,d\lambda^{\omega}_x$ pour tout $x \in \omega$, car les les mesures μ^{ω}_x, ν^{ω}_x et λ^{ω}_x sont portées par $\partial_f\omega$; donc $(\widehat{u,\,v})^{C\omega} \geqslant (u,\,v)_{\omega}$. L'inégalité inverse est évidente.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] N. Boboc - Gh. Bucur - A. Cornea, *Order and convexity in Potential theory*: H-cnes. Lect. Notes in Math., 853, Springer Verlag, 1981.

[2] N. Boboc - Gh. Bucur, *Perturbations in excessive structures*, Lect. Notes in Math., 1014, Springer Verlag (1981), 155-187.

[3] A. Boukricha, *Espaces biharmoniques*, Lect. Notes in Math., 1096, Springer Verlag (1983), 116-148.

[4] N. Bouleau, *Espaces biharmoniques et couplages de processus de Markov*, J. Math. Pures et Appliquées, 58 (1979), 187-204.

[5] M. Brelot, *Éléments de la théorie classique du potentiel*, C.D.U, 1969.

[6] G. Choquet, *Lectures on Analysis*, Vol. 2, Mathematics Lect. Notes Series, Benjamen, Inc. New York, 1969.

[7] C. Constantinescu - A. Cornea, *Potential Theory on Harmonic Spaces*, Springer-Verlag Heidelberg, 1972.

[8] C. Dellacherie - P. A. Meyer, *Probabilités et Potentiel*, chap. I à IV, Hermann, Paris, 1975.

[9] C. Dellacherie - P. A. Meyer, *Probabilités et Potentiel Chap. XII à XVI*, Hermann, Paris, 1987.

[10] M. El Kadiri, *Représentation intégrale dans le cadre de la théorie des fonctions biharmoniques*, Revue Roumaine de Math. Pures et Appl., 1997.

[11] B. Fuglede, *Finely harmonic functions*, Lecture Notes in Math., 289, Springer-Verlag, 1972.

[12] B. Fuglede, *Sur la fonction de Green dans un domaine fin*, Ann. Inst. Fourier, 25 (1975), 201-206.

[13] B. Fuglede, *Localization in Fine Potential Theory and Uniform Approximation by Subharmonic Functions*, J. Funct. Anal., 49 (1982), 52-72.

[14] B. Fuglede, *Integral Representation of Fine Potential*, Math. Annalen, 262, 1983.

[15] B. Fuglede, *Représentation intègrale des potentiels fins*, Comptes Rendus, 300, Série I (1985), 129-132.

[16] B. Fuglede, *On the Riesz representation of finely superharmonic functions*, Lect. Notes in Math., 1344, Springer Verlag (1987), 199-201.

[17] R. M. Hervé, *Rechreches axiomatiques sur la théorie des fonctions surharmoniques et du potentiel*, Ann. Inst. Fourier, 12 (1962), 415-517.

[18] E. P. Smyrnelis, *Axiomatique des fonctions biharmoniques, 1e section*, Ann. Inst. Fourier, 26, 1 (1975), 35-98.

[19] E. P. Smyrnelis, *Axiomatiques des fonctions biharmoniques, 2e section*, Ann. Inst. Fourier, tome 26, 3 (1976), 1-47.

[20] E. P. Smyrnelis, *Sur la fonction hyperharmonique d'ordre 2*, Lect. Notes in Math., 787, Springer Verlag-Heidelberg, 1978.

[21] E. P. Smyrnelis, *Support biharmonique et support harmonique associé*, Lect. Notes in Math., 787, Springer Verlag-Heidelberg, 1978.

Direttore responsabile: Prof. A. Ballio - Autorizz. Trib. di Roma n. 7269 dell'8-12-1959

«Monograf» - Via Collamarini, 5 - Bologna