Rendiconti
Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL
Memorie di Matematica e Applicazioni
118° (2000), Vol. XXIV, fasc. 1, pagg. 169-183

LUIGI AMERIO (*)

La trasformazione di Laplace nello studio dei problemi con memoria (**)

SUNTO. — Si studia un'equazione integrale singolare di convoluzione, collegata a problemi di evoluzione con memoria, in un intervallo illimitato. Per tale equazione si dimostrano teoremi di unicità e di esistenza nel dominio della trasformazione di Laplace (semplice o bilatera). Si analizzano inoltre lo spettro degli autovalori e le autosoluzioni olomorfe o di classe C^∞.

Laplace transformation in the study of problems with memory

ABSTRACT. — We study a singular integral equation of convolution type connected with evolution problems with memory, in an unbounded interval. In the (simple or bilateral) Laplace transformation domain, uniqueness and existence theorems are proved, adding moreover the analysis of the eigenvalues spectrum and of the holomorphic or C^∞ eigensolutions.

1. - INTRODUZIONE

I problemi di propagazione con memoria vengono ricondotti, nella classica trattazione di Volterra [1], alla risoluzione di una equazione di convoluzione. Nell'ipotesi che la sollecitazione $y(t)$, di un mezzo all'istante t, sia influenzata dalla storia del mezzo stesso negli istanti τ precedenti t, tale equazione ha la forma

$$y(t) + \int_{-\infty}^{t} K(t-\tau)\, y(\tau)\, d\tau = f(t)\,, \tag{1.1}$$

ove il *nucleo* $K(t)$, $0 \leq t < +\infty$, e il *termine noto* $f(t)$, $-\infty < t < +\infty$, sono funzioni

(*) Indirizzo dell'Autore: Dipartimento di Matematica «Francesco Brioschi», Politecnico di Milano, Piazza Leonardo da Vinci 32, 20133 Milano.

(**) Memoria presentata il 10 luglio 2000 da Luigi Amerio, uno dei XL.

assegnate. Anche l'*incognita* $y(t)$ nella (1.1) si suppone definita per $-\infty < t < +\infty$.

La (1.1) è una equazione integrale *singolare* (essendo *illimitato* l'intervallo di integrazione) ed è stata oggetto di vari studi: particolarmente penetrante, per le questioni inerenti alla «fading memory» e all'esistenza di autosoluzioni, l'analisi e la critica di Gaetano Fichera [2].

La presente nota è appunto suscitata da tale analisi, e mi è gradito pubblicarla in ricordo dell'illustre scienziato e caro amico.

La presenza dell'operazione di convoluzione:

$$\int_{-\infty}^{t} K(t-\tau)\, y(\tau)\, d\tau = K * y(t) \qquad (-\infty < t < +\infty)$$

in un intervallo illimitato nei due sensi, suggerisce infatti, a mio avviso, l'uso della trasformazione *bilatera* di Laplace, $\mathcal{L}_2$, per il termine noto e l'incognita. Lo spazio funzionale assunto per la risoluzione della (1.1) consente, in tal modo, di dimostrare *unicità ed esistenza* della soluzione (§ 2.I; le ipotesi sul comportamento per $t \to +\infty$ vengono poi eliminate: § 2.II). *Se* $f(t) = 0$ *e* (tra $\mathcal{L}$-ascisse di convergenza) $k' \leq k$, la (1.1) *non ammette* autosoluzioni (cfr. (3.1)). Le *autosoluzioni del tipo* $e^{\gamma t}$, indicate, con un esempio, da Fichera, risultano escluse, in tale ambito. Si effettua, per queste, nel §3, uno studio in campo analitico, in base alla $\mathcal{L}$-trasformazione, aggiungendovi l'esempio di autosoluzioni *non analitiche* e *non $\mathcal{L}$-trasformabili*.

2. - Unicità ed esistenza

I – Supponiamo che esistano, nel piano della variabile complessa $p = \varrho + i\sigma$, le trasformate di Laplace dei dati:

$$\mathcal{L}(K) = \int_{0}^{\infty} e^{-pt} K(t)\, dt\,, \tag{2.1}$$

$$\mathcal{L}_2(f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-pt} f(t)\, dt\,, \tag{2.2}$$

ammettendo (come faremo sempre in seguito) che anche i valori assoluti, $|K(t)|$ e $|f(t)|$, siano trasformabili, rispettivamente in un semipiano $\mathcal{R}(p) > k$ e in una striscia $a < \mathcal{R}(p) < b$.

Dovremo inoltre supporre, per l'esistenza simultanea di entrambe le trasformate, che sia $k < b$, sicché le due trasformate, $\mathcal{L}(K)$ ed $\mathcal{L}_2(f)$, esisteranno nella striscia

$$\max(a, k) < \mathcal{R}(p) < b\,. \tag{2.3}$$

Osserviamo che, fissato T ad arbitrio, i valori di $y(t)$ nell'intervallo $-\infty < t \leq T$ non dipendono dai valori $f(t')$ con $t' > T$ (cfr. (2.14)). Siccome nella trasformata

$$\mathcal{L}_2(f) = \int_{-\infty}^{T} e^{-pt} f(t)\, dt + \int_{T}^{\infty} e^{-pt} f(t)\, dt$$

il secondo integrale converge nel semipiano $\mathcal{R}(p) > a$, non è restrittivo, per gli scopi pratici, supporre $a \leqslant k$; potremmo addirittura supporre $a = -\infty$ (nel qual caso il secondo integrale definisce una trascendente intera nella variabile p).

Associamo ora alla (1.1) l'equazione seguente (anch'essa di convoluzione), nella incognita $G(t)$:

$$G(t) + K(t) + \int_0^t K(t-\tau)\, G(\tau)\, d\tau = 0\,. \tag{2.4}$$

Si tratta di una equazione di Volterra assai semplice, che risolveremo applicando a entrambi i membri la trasformazione $\mathcal{L}$ di Laplace. Ammesso che anche $G(t)$ sia $\mathcal{L}$-trasformabile in un semipiano $\mathcal{R}(p) > k'$ e applicando il teorema della convoluzione, si ha, per $\mathcal{R}(p) > \max(k, k')$:

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t K(t-\tau)\, G(\tau)\, d\tau\right) = \mathcal{L}(K * G) = \mathcal{L}(K)\,\mathcal{L}(G)$$

e quindi, per la (2.4),

$$\mathcal{L}(G)\{1 + \mathcal{L}(K)\} = -\mathcal{L}(K)\,.$$

Non può essere $\mathcal{L}(K) = -1$, poiché avremmo $K = -\delta$, distribuzione impulsiva di Dirac. Si ha dunque

$$\mathcal{L}(G) = -\mathcal{L}(K)/(1 + \mathcal{L}(K))\,. \tag{2.5}$$

Osserviamo ora che il secondo membro definisce effettivamente una $\mathcal{L}$-trasformata [3]: è infatti ottenuto da una funzione analitica, $-z/(1+z)$, olomorfa e nulla nell'origine, sostituendo la variabile z con la trasformata $\mathcal{L}(K)$. Quanto all'ascissa di convergenza (assoluta) k', risulta $k' \leqslant k_0$, valore tale che sia $|\mathcal{L}(|K|)| < 1$ per $\mathcal{R}(p) > k_0$ (circostanza certo verificata poiché $\mathcal{L}(|K|)$ è infinitesima per $\mathcal{R}(p) \to +\infty$).

Abbiamo dunque gli sviluppi

$$\mathcal{L}(G) = -\mathcal{L}(K)/(1 + \mathcal{L}(K)) = \sum_{n=0}^{\infty} (-\mathcal{L}(K))^{n+1}, \tag{2.6}$$

$$G(t) = -K(t) + K * K(t) - K * K * K(t) + \dots\,, \tag{2.7}$$

convergenti rispettivamente per $\mathcal{R}(p) > k_0$, e q.o. per $0 \leqslant t < +\infty$.

La (2.5) vale nel semipiano $\mathcal{R}(p) > \max(k, k')$ e, per la biunivocità della corrispondenza tra funzioni trasformande e trasformate, la (2.4) risulta soddisfatta.

La funzione $G(t)$ è detta il *nucleo risolvente* del nucleo $K(t)$. Questo è, a sua volta, per la (2.4), il *risolvente* di $G(t)$. In particolare: $K(t) \leqslant 0 \Rightarrow G(t) \geqslant 0$.

Ciò premesso, supporremo, in più della (2.3), che sia $b > k'$ e che la variabile p appartenga d'ora innanzi alla striscia

$$S = \{\max(a, k, k') < \mathcal{R}(p) < b\}. \tag{2.8}$$

Nella striscia S risultano perciò trasformabili le funzioni $f(t)$, $K(t)$, $G(t)$.

Definiamo ora lo spazio funzionale Y nel quale risolvere l'equazione (1.1). Y è costituito, precisamente, dalle funzioni $y(t)$ $\mathcal{L}_2$-trasformabili, ciascuna in una striscia

$$\alpha_y < \mathcal{R}(p) < \beta_y \tag{2.9}$$

la quale abbia una parte, l_y, comune con S: sia cioè

$$\alpha_y < b, \qquad \beta_y > \max(a, k, k').$$

Dimostriamo il teorema di *unicità e di esistenza: L'equazione* (1.1) *ammette una e una sola soluzione,* $y(t)$, *appartenente allo spazio* Y; *è inoltre* $l_y = S$.

Proviamo dapprima l'*unicità*. Sia $y(t)$ una soluzione, e osserviamo che $K * y(t)$ è assolutamente trasformabile nella striscia l_y e vale la classica formula

$$\mathcal{L}_2(y)\,\mathcal{L}(K) = \mathcal{L}_2(K * y). \tag{2.10}$$

Abbiamo infatti:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2(y)\ \mathcal{L}(K) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-p\tau} y(\tau)\, d\tau \int_{0}^{\infty} e^{-ps} K(s)\, ds = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-p\tau} y(\tau)\, d\tau \int_{\tau}^{\infty} e^{-p(t-\tau)} K(t-\tau)\, dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-pt}\, dt \int_{-\infty}^{t} K(t-\tau)\, y(\tau)\, d\tau = \mathcal{L}_2(K * y), \end{aligned} \tag{2.11}$$

potendosi invertire l'ordine di integrazione (nel dominio $-\infty < \tau \leqslant t < +\infty$) a causa della assoluta trasformabilità.

Applicando perciò, nella striscia l_y, la $\mathcal{L}_2$-trasformazione, si ricava dalle (1.1):

$$\mathcal{L}_2(y) + \mathcal{L}_2(y)\,\mathcal{L}(K) = \mathcal{L}_2(f) \tag{2.12}$$

cioè, per la (2.6),

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2(y) = \mathcal{L}_2(f)\,\frac{1}{1+\mathcal{L}(K)} &= \mathcal{L}_2(f) - \mathcal{L}_2(f)\,\frac{\mathcal{L}(K)}{1+\mathcal{L}(K)} = \\ &= \mathcal{L}_2(f) + \mathcal{L}_2(f)\,\mathcal{L}(G) = \mathcal{L}_2(f + G * f). \end{aligned} \tag{2.13}$$

Dalla eguaglianza delle trasformate nella striscia l_y, segue allora l'eguaglianza delle funzioni trasformande (in virtù della biunivocità della corrispondenza istituita dalla trasformazione $\mathcal{L}_2$ [4]).

Si ha dunque, per la (2.13),

$$y(t) = f(t) + G * f(t) \tag{2.14}$$

sicché $y(t)$ risulta univocamente determinata.

Il teorema di unicità è perciò dimostrato.

La dimostrazione dell'*esistenza* è immediata. Consideriamo infatti la funzione $y(t)$ definita dalla (2.14). Si ha, per la (2.4),

$$K * y = K * f + K * G * f = K * f - (K + G) * f = -G * f$$

e quindi, per la (2.14), il risultato conclusivo:

$$y(t) + K * y(t) = f(t) \,. \tag{2.15}$$

Per la (2.14), *la trasformata* $\mathcal{L}_2(y)$ *esiste nella striscia S.*

Se $f(t) = 0$, *è* $\mathcal{L}_2(y) = 0$, per la (2.12); *l'equazione omogenea*

$$y(t) + \int_{-\infty}^{t} K(t-\tau)\, y(\tau)\, d\tau = 0 \tag{2.16}$$

non ammette dunque *autosoluzioni* $\mathcal{L}_2$*-trasformabili in una striscia del semipiano* $\mathcal{R}(p) > k$.

Esempio: Sia $K(t) = -H(t)\, H(1-t)$, con $H(t)$ funzione di Heaviside. Si ha

$$\mathcal{L}(K) = -\int_0^1 e^{-pt}\, dt = -\frac{1-e^{-p}}{p} \,. \tag{2.17}$$

In questo caso $\mathcal{L}(K)$ è una trascendente intera ($k = -\infty$).

Posto poi $\mathcal{R}(p) = \varrho$, sia k_0 la radice (>1) dell'equazione $1 + e^{-\varrho} = \varrho$. Per $\varrho > k_0$, è $\varrho > 1 + e^{-\varrho}$ e quindi

$$|p| \geqslant \varrho > (1 + e^{-\varrho}) \geqslant |1 - e^{-p}| \,.$$

È inoltre $e^{-\varrho} < \varrho - 1$, sicché

$$|p-1| \geqslant \varrho - 1 > |e^{-p}| \,.$$

Se $\mathcal{R}(p) > k_0$, valgono perciò, per $\mathcal{L}(G)$, gli sviluppi:

$$(2.18)\qquad \frac{-\mathcal{L}(K)}{1+\mathcal{L}(K)} = \frac{1-e^{-p}}{p}\,\frac{1}{1-(1-e^{-p})/p} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-e^{-p}}{p}\right)^n = \mathcal{L}(G)\,,$$

$$(2.19)\qquad \frac{-\mathcal{L}(K)}{1+\mathcal{L}(K)} = \frac{1-e^{-p}}{(p-1)+e^{-p}} = \frac{1}{p-1}\,\frac{1-e^{-p}}{1+e^{-p}/(p-1)} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{e^{-np}}{(p-1)^{n+1}} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{e^{-np}}{(p-1)^n} =$$

$$= \frac{1}{p-1} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n e^{-np}\frac{p}{(p-1)^{n+1}} = \mathcal{L}(G)\,.$$

Il nucleo risolvente è $\geqslant 0\ \forall t$, essendo $K(t)\leqslant 0$.

Si ha poi dalla (2.19), per $n \geqslant 1$,

$$\frac{p}{(p-1)^{n+1}} = p\mathcal{L}\left(e^t\,\frac{t^n}{n!}\right) = \mathcal{L}\left(e^t\,\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\left(1+\frac{t}{n}\right)\right) = \mathcal{L}(g_n(t))$$

e quindi

$$e^{-np}\,\frac{p}{(p-1)^{n+1}} = \mathcal{L}(g_n(t-n)\,H(t-n))\,.$$

Ne segue l'altra espressione del risolvente:

$$G(t) = e^t + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n g_n(t-n)\,H(t-n)\,.$$

In questo sviluppo, solo un numero *finito* di termini è $\neq 0$, $\forall t$.

II – *Il metodo della trasformata bilatera di Laplace* consente di ampliare lo spazio delle soluzioni della (1.1), nella *sola ipotesi* che siano $\mathcal{L}_2$-trasformabili, $\forall T$, le funzioni $f_T(t) = f(t)\,H(T-t)$ (coincidenti con $f(t)$ per $t < T$ e nulle per $t > T$; basterebbe una sola). Per queste si ha ovviamente

$$(2.20)\qquad a_T = -\infty\,,\quad b_T = b \text{ (indipendente da } T\text{); es.: } f(t) = e^{bt}.$$

Indicheremo con Y^* lo spazio delle funzioni $y(t)$ tali che $y_T(t) = y(t)\, H(T-t)$ sia $\mathcal{L}_2$-trasformabile in una striscia avente una parte l_y contenuta (come in I) nella striscia

$$S = \{\max(k, k') < \mathcal{R}(p) < b\}. \tag{2.21}$$

Dimostriamo che *l'equazione* (1.1) *ammette, in* Y^*, *una e una sola soluzione,* $y(t)$: *è inoltre* $l_y = S$. *Non esistono* perciò *autosoluzioni.*

Unicità: Sia $y(t)$ una soluzione della (1.1), nello spazio Y^*. Moltiplicando entrambi i membri per $H(T-t)$, si ottiene per $y_T(t)$ l'equazione

$$y_T(t) + K * y_T(t) = f_T(t) - \int_{-\infty}^{t} K(t-\tau)\, y(\tau)[H(T-t) - H(T-\tau)]\, d\tau \tag{2.22}$$

$$= f_T(t) + \varphi_T(t)$$

ove

$$\varphi_T(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < T \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{T} K(t-\tau)\, y(\tau)\, d\tau & \text{per } t > T\,. \end{cases} \tag{2.23}$$

Il termine $\varphi_T(t)$ è incognito, ma $\mathcal{L}_2$-trasformabile, poiché l'integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-pt} \varphi_T(t)\, dt = \int_{T}^{\infty} e^{-pt} dt \int_{-\infty}^{T} K(t-\tau)\, y(\tau)\, d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{T} e^{-p\tau} y(\tau)\, d\tau \int_{T}^{\infty} e^{-p(t-\tau)} K(t-\tau)\, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{T} e^{-p\tau} y(\tau)\, d\tau \int_{T-\tau}^{\infty} e^{-ps} K(s)\, ds \quad (p \in l_y)$$

ha valore finito.

Dalle (2.22) e (2.14) segue perciò l'equaglianza

$$y_T(t) = \{f_T(t) + G * f_T(t)\} + \{\varphi_T(t) + G * \varphi_T(t)\}. \tag{2.24}$$

Osserviamo ora che dalla (2.23) segue

$$G * \varphi_T(t) = \int_{-\infty}^{t} G(t-\tau)\, \varphi_T(\tau)\, d\tau = 0 \qquad \text{per } t < T \tag{2.25}$$

e quindi, in virtù delle (2.23) e (2.25), se $t < T$:

$$y(t) = f(t) + G * f(t)\,. \tag{2.26}$$

La (2.26) definisce la soluzione $y(t)$ in tutto l'intervallo $(-\infty\,,\ +\infty)$ data l'arbitrarietà di T. L'unicità è perciò provata.

Per dimostrare *l'esistenza*, si noti anzitutto che, nella (2.26), la funzione $y(t) \in Y^*$ *ed è* $l_y = S$, al pari di $f(t)$. Ha infatti valore finito l'integrale

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_2(H(T-t)\, G * f(t)) &= \int_{-\infty}^{T} e^{-pt}\, dt \int_{-\infty}^{t} G(t-\tau)\ f(\tau)\ d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{T} e^{-p\tau} f(\tau)\ d\tau \int_{\tau}^{T} e^{-p(t-\tau)}\, G(t-\tau)\ dt = \\ &= \int_{-\infty}^{T} e^{-p\tau} f(\tau)\ d\tau \int_{0}^{T-\tau} e^{-ps}\, G(s)\ ds \quad (p \in S)\,.\end{aligned}$$

Consideriamo ora l'equazione nell'incognita $\tilde{f}(t)$:

$$\tilde{f}(t) + G * \tilde{f}(t) = y(t)\,, \tag{2.27}$$

con termine noto $y(t)$ dato dalla (2.26). Procedendo come prima, si trova che la (2.27) ha, in Y^*, una soluzione al più: $\tilde{f}(t) = y(t) + K * y(t)$. Poiché $f(t)$ soddisfa la (2.27), segue dall'unicità $\tilde{f}(t) = f(t)$. Vale dunque (oltre la (2.26)) l'eguaglianza

$$f(t) = y(t) + K * y(t) \tag{2.28}$$

cioè $y(t)$ è *soluzione unica della* (1.1), *nello spazio* Y^*.

Come *applicazione*, supponiamo che $f(t)$ *sia quasi-periodica* secondo Bohr ($\Rightarrow b = 0$); sia inoltre $k' < 0$ ($\Rightarrow G(s)$ sommabile sulla semiretta $[0,\ +\infty)$).

In tal caso, anche la *soluzione* $y(t)$ *è quasi–periodica*.

Sia infatti τ_ε un ε-quasi-periodo per $f(t)$, risulti cioè

$$\operatorname*{Sup}_{-\infty < t < +\infty} |f(t+\tau_\varepsilon) - f(t)| \leqslant \varepsilon\,.$$

Segue allora dalla (2.26), $\forall t$:

$$\begin{aligned}|y(t+\tau_\varepsilon) - y(t)| &= |(f(t+\tau_\varepsilon) - f(t)) + \\ &+ \int_0^\infty G(s)(f(t+\tau_\varepsilon - s) - f(t-s))\ ds| \leqslant \varepsilon\Big(1 + \int_0^\infty |G(s)|\,ds\Big)\,,\end{aligned}$$

che prova la tesi.

3. - Autovalori e autosoluzioni

Dimostriamo anzitutto che: *se* $k' \leq k$ *e* $f(t) = 0$, *la* (1.1) *non ammette autosoluzioni* $y(t)$, *con* $y_T(t)$ $\mathcal{L}_2$*-trasformabile in una striscia* $l_y = \{k < \Re(p) < \beta_y\}$.

Se $k' \leq k$, esiste infatti, oltre $K * y(t)$, la convoluzione $G * y(t)$ (cfr. la (2.11), sostituendo y_T e G a y e K). Se $y(t)$ soddisfa l'equazione omogenea, è allora, per la (2.4):

$$y + K * y = 0 , \quad G * y + G * K * y = 0 = -K * y \; ; \Rightarrow y = 0 . \tag{3.1}$$

Es.: 1) $y(t) = e^{\gamma t}$ dà $\beta_y = \gamma$ e può essere autosoluzione solo se è $k < \gamma \leq k'$; 2) *Sia* $\mathcal{L}(|K|) < 1 \; \forall p > k$. Posto $\mathcal{L}(J) = \mathcal{L}(|K|)/(1 - \mathcal{L}(|K|))$, *si ha*:

$$\mathcal{L}(|G|) \leq \mathcal{L}(J) < +\infty \; \forall p > k \; ; \Rightarrow k' \leq k .$$

Preso ora ad arbitrio T, finito, consideriamo l'equazione (1.1) nell'intervallo $-\infty < t \leq T$. Posto $t = t_1 + T$, $\tau = \tau_1 + T$, la (1.1) si scrive

$$y(t_1 + T) + \int_{-\infty}^{t_1} K(t_1 - \tau_1) \, y(\tau_1 + T) \, d\tau_1 = f(t_1 + T) .$$

Otteniamo perciò la (1.1), nell'incognita $y_1(t_1) = y(t_1 + T)$ e termine noto $f_1(t_1) = f(t_1 + T)$, con $-\infty < t_1 \leq 0$.

Supposto dunque $t \leq 0$ nella (1.1), facciamo il cambiamento di variabili:

$$\begin{cases} s = & t - \tau \\ \eta = & -t \end{cases} \quad (\Rightarrow s \geq 0 , \; \eta \geq 0 , \; \tau = -(\eta + s)) .$$

La (1.1) diventa allora:

$$y(-\eta) + \int_0^\infty K(s) \, y(-(\eta + s)) \, ds = f(-\eta) .$$

Posto $z(\eta) = y(-\eta)$, $g(\eta) = f(-\eta)$, otteniamo perciò l'equazione

$$z(\eta) + \int_0^\infty K(s) \, z(\eta + s) \, ds = g(\eta) \qquad (0 \leq \eta < +\infty) .$$

Scrivendo t in luogo di η (ribaltando cioè il verso del tempo, rispetto alla (1.1)), la ricerca degli *autovalori* (frequenze proprie) e delle *autosoluzioni* è ricondotta alla risoluzione dell'equazione omogenea

$$z(t) = \lambda \int_0^\infty K(s) \, z(t + s) \, ds \tag{3.2}$$

con λ parametro complesso $\neq 0$.

Lo studio della (3.2) è particolarmente facilitato nell'ambito della $\mathfrak{L}$-trasformazione. Supponiamo come in precedenza $K(s)$ $\mathfrak{L}$-trasformabile (non necessariamente in valore assoluto) nel semipiano $\mathcal{R}(p) > k$ e consideriamo la trasformata

$$\mathfrak{L}(K) = \int_0^\infty e^{-ps} K(s)\, ds = \omega(p)\,. \tag{3.3}$$

Posto nella (3.2), $z(t) = e^{-pt}$ (cioè $y(t) = e^{pt}$), si ricava l'equazione

$$e^{-pt} = \lambda \int_0^\infty K(s)\, e^{-p(t+s)}\, ds \qquad (\lambda \neq 0)$$

cioè

$$\lambda\omega(p) = 1\,. \tag{3.4}$$

Perché la funzione e^{-pt} sia *autosoluzione* corrispondente all'*autovalore* λ, *occorre* dunque, *e basta, che* p *sia una radice dell'equazione* (3.4), *nel semipiano* $\mathcal{R}(p) > k$.

Deve dunque essere, *in tale radice*, $\omega(p) \neq 0$.

Per l'analiticità della funzione $\omega(p)$, le radici della (3.4), *se esistono* per un dato λ, possono essere in numero finito, o costituire una successione $\{p_0, p_1, \ldots, p_n, \ldots\}$.

Gli autovalori λ costituiscono pertanto uno spettro continuo che può essere estremamente vasto.

Se $\omega(p)$ è una trascendente intera, l'equazione (3.4) ha infatti infinite soluzioni, per il teorema di Picard, *qualunque sia* λ complesso, un valore al più escluso (oltre a $\lambda = 0$).

Possiamo trovare altre autosoluzioni, della forma

$$z(t) = e^{-pt} P(t)\,, \tag{3.5}$$

con $P(t)$ *polinomio*. Posto infatti nella (3.2)

$$z(t) = e^{-pt} \frac{t^n}{n!}\,,$$

ricaviamo l'equazione

$$\lambda \int_0^\infty K(s)\, e^{-p(t+s)} \frac{(t+s)^n}{n!}\, ds = e^{-pt} \frac{t^n}{n!}\,,$$

cioè

$$\lambda \sum_{m=0}^{n} \frac{t^m}{m!} \int_0^\infty K(s)\, e^{-ps} \frac{s^{n-m}}{(n-m)!}\, ds = \frac{t^n}{n!}\,. \tag{3.6}$$

Poiché, per la (3.3),

$$\int_0^\infty K(s)\, e^{-ps} s^{n-m}\, ds = (-1)^{n-m}\, \omega^{(n-m)}(p)\,,$$

la (3.6) diventa:

$$\lambda \sum_{m=0}^{n} \frac{t^m}{m!} (-1)^{n-m}\, \omega^{(n-m)}(p) = \frac{t^n}{n!}\,.$$

Perché $z(t)$ sia autosoluzione *occorre* dunque, *e basta*, che nel punto p risulti

$$\lambda\omega(p) = 1\,,\ \omega'(p) = 0\,,\ \ldots,\ \omega^{(n)}(p) = 0\,. \tag{3.7}$$

La prima delle (3.7) coincide con la (3.4). Se valgono, nel punto p, anche le rimanenti, ma è

$$\omega^{(n+1)}(p) \neq 0\,,$$

si deduce che all'autovalore $\lambda = \omega^{-1}(p)$ resta associata la autosoluzione

$$z(t) = e^{-pt} P_n(t)\,,$$

con $P_n(t)$ polinomio di grado n, a coefficienti arbitrari. Questa funzione soddisfa la (3.2) in *tutto* l'intervallo $(-\infty\,,\,+\infty)$. Osserviamo infine che la trasformata $\omega(p)$ può risultare funzione *limitata*, nel semipiano $\mathcal{R}(p) > k$: in tal caso $|\omega(p)| < M$ implica $|\lambda| > M^{-1}$, per la (3.4). Ad es.: $K(s) = (1+s)^{-2} \Rightarrow k = 0\,,\ |\omega(p)| < 1\,,\ |\lambda| > 1$; se $|\lambda| \leq 1$ *non esistono* autosoluzioni della (3.2).

Osservazione È interessante notare (con riferimento allo stesso esempio dato nel § 2) che *possono esistere autosoluzioni non analitiche e non $\mathcal{L}$-trasformabili.*

Consideriamo infatti l'equazione

$$z(t) = \lambda \int_0^1 z(t+s)\, ds \tag{3.8}$$

La soluzione esponenziale, $z(t) = e^{-pt}$, è immediata. Si ha infatti l'equazione in p (per la quale vale il teorema di Picard):

$$1 = \lambda \int_0^1 e^{-ps}\, ds = \lambda\, \frac{1 - e^{-p}}{p} = \lambda\omega(p) \quad (\omega(0) = 1)\,.$$

Esiste tuttavia, $\forall\lambda \neq 0$, un'altra soluzione, $\in C^\infty$ ma non analitica.

Poniamo, nella (3.8), $z(t) = e^{-\lambda t}\varphi(t)$, con $\varphi(t)$ funzione da determinare.

La (3.8) si scrive allora

$$\lambda \int_0^1 e^{-\lambda(t+s)} \varphi(t+s)\, ds = e^{-\lambda t} \varphi(t)\,,$$

cioè

$$\lambda \int_t^{t+1} e^{-\lambda\tau} \varphi(\tau)\, d\tau = e^{-\lambda t} \varphi(t)\,. \tag{3.9}$$

Ne segue (se $\varphi(t) \in C^1[0, +\infty)$)

$$\lambda\{e^{-\lambda(t+1)} \varphi(t+1) - e^{-\lambda t} \varphi(t)\} = -\lambda e^{-\lambda t} \varphi(t) + e^{-\lambda t} \varphi'(t)$$

cioè

$$\varphi'(t) = \lambda e^{-\lambda} \varphi(t+1)\,. \tag{3.10}$$

Sia, viceversa, $\varphi(t)$ soluzione della (3.10), in C^1.

Risulta allora

$$\lambda e^{-\lambda(t+1)} \varphi(t+1) = e^{-\lambda t} \varphi'(t) = (e^{-\lambda t} \varphi(t))' + \lambda e^{-\lambda t} \varphi(t)$$

cioè

$$\lambda\{e^{-\lambda(t+1)} \varphi(t+1) - e^{-\lambda t} \varphi(t)\} = \frac{d}{dt} e^{-\lambda t} \varphi(t)$$

e quindi

$$\frac{d}{dt} \lambda \int_t^{t+1} e^{-\lambda\tau} \varphi(\tau)\, d\tau = \frac{d}{dt} e^{-\lambda t} \varphi(t)\,.$$

Ne segue, detta C una costante,

$$\lambda \int_t^{t+1} e^{-\lambda\tau} \varphi(\tau)\, d\tau = e^{-\lambda t} \varphi(t) + C$$

e $C = 0$ equivale a supporre

$$\lambda \int_0^1 e^{-\lambda\tau} \varphi(\tau)\, d\tau = \varphi(0) \tag{3.11}$$

(condizione già espressa, come necessaria, dalla (3.9)).

Diamo ora una soluzione non esponenziale della (3.10).

Prendiamo $\varphi_0(t) \in C^\infty[0, 1]$, nulla agli estremi 0 e 1 insieme a tutte le derivate e tale che sia

$$\int_0^1 e^{-\lambda\tau}\varphi_0(\tau)\,d\tau = 0\,.$$

Possiamo porre, ad esempio,

$$\varphi_0(t) = e^{\lambda t}\,\frac{d}{dt}\,e^{-\frac{1}{t(1-t)}} \quad \text{in } (0,1), \quad \varphi_0(0) = \varphi_0(1) = 0\,.$$

In tal modo è soddisfatta la (3.11).

Posto poi

$$\alpha = \lambda^{-1} e^{\lambda},$$

la (3.10) si scrive

$$\varphi(t+1) = \alpha\varphi'(t) \tag{3.12}$$

e possiamo risolverla, per $t \geqslant 0$, con il seguente procedimento.

Si pone, per questo, $\varphi(t) = \varphi_n(t)$ nell'intervallo $n \leqslant t \leqslant n+1$, definendo le $\varphi_n(t)$ con la legge:

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= \varphi_0(t) && t \in [0,1) \\
\varphi_1(t) &= \alpha\varphi_0'(t-1) && t \in [1,2) \\
\varphi_2(t) &= \alpha\varphi_1'(t-1) = \alpha^2\varphi_0''(t-2) && t \in [2,3) \\
&\dots \\
\varphi_n(t) &= \alpha\varphi_{n-1}'(t-1) = \dots = \alpha^n\varphi_0^{(n)}(t-n) && t \in [n, n+1) \\
&\dots
\end{aligned} \tag{3.13}$$

La funzione $\varphi(t)$ si annulla con tutte le derivate nei punti di ascissa $t = n$, $\in C^\infty$ ma non è analitica, e soddisfa la (3.12) per costruzione.

Dimostriamo che *la corrispondente autosoluzione, $z(t) = e^{-\lambda t}\varphi(t)$, non è $\mathcal{L}$-trasformabile*.

Se infatti $z(t)$ fosse $\mathcal{L}$-trasformabile, anche $\varphi(t)$ lo sarebbe, in un semipiano $\mathcal{R}(p) > h$.

Ora si ha

$$\int_{n}^{n+1} e^{-ps}\varphi(s)\,ds = \int_{n}^{n+1} e^{-ps}\varphi_n(s)\,ds =$$

$$= \alpha^n \int_{n}^{n+1} e^{-ps}\varphi_0^{(n)}(s-n)\,ds = \alpha^n e^{-np}\int_0^1 e^{-ps}\varphi_0^{(n)}(s)\,ds =$$

$$= \alpha^n e^{-np} p^n \int_0^1 e^{-ps}\varphi_0(s)\,ds \quad (n = 0, 1, \dots)$$

essendo $\varphi_0^{(m)}(0) = \varphi_0^{(m)}(1) = 0$, $\forall m$.

Se $\varphi(t)$ fosse $\mathcal{L}$-trasformabile, la trasformata $\mathcal{L}(\varphi)$ coinciderebbe con la somma della serie

$$\mathcal{L}(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{n}^{n+1} e^{-ps}\varphi(s)\,ds = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha p e^{-p})^n \int_0^1 e^{-ps}\varphi_0(s)\,ds\,, \tag{3.14}$$

necessariamente convergente per $\mathcal{R}(p) > h$.

Questo però non avviene. Possiamo prendere infatti $p = \varrho + i\sigma$, con $\varrho > h$, in modo che sia

$$|\alpha p e^{-p}| = |\alpha| e^{-\varrho}\sqrt{\varrho^2 + \sigma^2} \geqslant 1$$

e inoltre

$$\int_0^1 e^{-(\varrho + i\sigma)s}\varphi_0(s)\,ds \neq 0\,.$$

La convergenza della serie (3.14) nel punto p è perciò esclusa.

Osserviamo che, anche in questo caso, l'autosoluzione $z(t)$ è prolungabile a tutto l'intervallo $(-\infty, 0]$. Integrando infatti la (3.12) con la condizione (per $t = 0$) $\varphi(0) = \varphi_0(0) = 0$, si ottiene, $\forall t$, l'equazione integrale

$$\varphi(t) = \alpha^{-1}\int_0^t \varphi(\tau + 1)\,d\tau = -\alpha^{-1}\int_{t+1}^{1} \varphi(s)\,ds\,. \tag{3.15}$$

Con questa, posto $\varphi(s) = \varphi_0(s)$, si ottengono i valori $\varphi(t) = \varphi_{-1}(t)$ nell'intervallo $-1 \leqslant t \leqslant 0$. Dalla (3.12) segue poi l'esistenza di tutte le derivate:

$$\varphi^{m+1}(t) = \alpha^{-1}\varphi^{(m)}(t+1) \qquad (m \geqslant 0)\,,$$

cioè $\varphi(t) \in C^{\infty}[-1, +\infty)$.

La tesi risulta provata, procedendo allo stesso modo per gli intervalli successivi: $[-2, +\infty)$, ...

BIBLIOGRAFIA

[1] V. VOLTERRA, *Leçons sur les fonctions de lignes*, Ch 7. Gauthier-Villars, Paris 1913.
[2] cfr. (anche per citazioni di altri Autori) G. FICHERA, *Sui materiali elastici con memoria*, Rend. Lincei, s. 8, v. 82, 1988; *I difficili rapporti tra l'analisi funzionale e la fisica matematica*, Rend. Lincei, s. 9, v. 1, 1990; *Sul principio della memoria evanescente*, in *Continui con memoria*, Centro Linceo interdisciplinare, v. 81, 1990.
[3] L. AMERIO, *Su alcune questioni relative alla trasformazione di Laplace*, Rend. Istituto Lombardo, s. 3, v. 76, 1942-43.
[4] Questo segue, nelle più larghe ipotesi di sommabilità, dalla formula di inversione di Riemann, nella forma generalizzata (cfr. L. AMERIO, *Sull'inversione della trasformata di Laplace*, Rend. Acc. Sc. Fis. e Mat. di Napoli, s. 7, v. 10, 1939-40).

Direttore responsabile: Prof. A. BALLIO - Autorizz. Trib. di Roma n. 7269 dell'8-12-1959
«Monograf» - Via Collamarini, 5 - Bologna