Rendiconti
Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL
Memorie di Matematica e Applicazioni
117° (1999), Vol. XXIII, fasc. 1, pagg. 173-177

MOHAMED EL KADIRI (*)

Démonstration simplifiée d'un théorème de Fuglede sur la représentation intégrale des potentiels fins (**)

Résumé. — Nous donnons, en utilisant un théorème de partition de type Brelot-Feyel, une démonstration simplifiée d'un théorème de Fuglede sur la représentation intégrale des potentiels fins dans un domaine fin de R^n.

Dimostrazione semplificata di un teorema di Fuglede sulla rappresentazione integrale dei potenziali fini

Riassunto. — Impiegando un teorema di partizione di tipo Brelot-Feyel, si dà una dimostrazione semplificata di un teorema di Fuglede riguardante la rappresentazione integrale dei potenziali fini in un dominio fine di R^n.

1. - Introduction

Soient Ω l'espace R^n si $n \geq 3$, ou un domaine borné de R^2, et U un domaine fin non vide de Ω que l'on supposera toujours régulier (donc un K_σ de Ω) grâce au principe de prolongement par continuité fine. On note G_U le noyau de Green fin de U (*voir* [5]). Dans [8] Fuglede a démontré le théorème suivant:

Théorème: *Pour tout potentiel fin p dans U, il existe une mesure de Borel $\mu \geq 0$ sur U, unique, telle que $p = G_U^\mu$.*

On rappelle qu'une mesure de Borel sur U est une mesure positive σ-finie sur U muni de sa tribu de Borel définie par la topologie induite par celle de Ω. Si μ est une mesure de Borel sur U, la fonction G_U^μ est définie par $G_U^\mu(x) = \int G_U(x, y)\, d\mu(y)$ pour

(*) Indirizzo dell'Autore: B.P. 726, Salé-Tabriquet, Salé, Maroc. e-mail: elkadiri@fsr.ac.ma
(**) Memoria presentata il 12 ottobre 1999 da Giorgio Letta, uno dei XL.

tout $x \in U$. Plus généralement, si μ est une mesure de Borel sur Ω, l'intégrale $\int G_U(x, y)\, d\mu(y)$ a un sens pour tout $x \in U$; on la notera aussi $G^\mu_U(x)$. En identifiant une mesure de Borel μ sur U avec son image $\tilde{\mu}$ par l'injection canonique de U sur Ω, on a $G^\mu_U = G^{\tilde{\mu}}_U$.

La démonstration de Fuglede du théorème précédent est trop longue. Notre but dans ce travail est de dégager des travaux de Fuglede [7] et [8] une démonstration simplifiée du théorème précédent, moyennant un théorème de partition du type Brelot-Feyel [3]. Les résultats de ce travail s'étendent d'une manière évidente au cadre général des espaces de Brelot considérés par Fuglede.

Dans tout ce travail le mot fonction signifiera toujours fonction à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$. On note $\mathcal{S}(\Omega)$ le cône des fonctions surharmoniques $\geqslant 0$ sur Ω et $\mathcal{S}(U)$ celui des fonctions finement surharmoniques $\geqslant 0$ dans U. L'ordre spécifique dans $\mathcal{S}(U)$ (ou $\mathcal{S}(\Omega)$) est noté $\prec$. Si $s \in \mathcal{S}(\Omega)$, on notera, suivant [6], s_U la fonction $s - \widehat{R}^{CU}_s$, eventuellement prolongée par continuité fine aux points où la différence n'a pas de sens, où $\widehat{R}^E_f$ désigne la balayée sur $E \subset \Omega$ d'une fonction f sur E. Si $E \subset U$ et si f est une fonction sur E, on notera sa balayée dans le cône $\mathcal{S}(U)$ par ${}^U\widehat{R}^E_f$ ou simplement ${}^U\widehat{R}_f$ si $E = U$. La régularisée s.c.i. (resp. finement s.c.i.) d'une fonction sur Ω (resp. U) est notée $\widehat{f}$. Enfin, si λ est une mesure de Radon positive sur Ω et si $E \subset \Omega$, on notera λ^E la balayée de λ sur E (*voir* [1]). Les autres notations et définitions utilisées dans ce travail seront toujours comme dans les travaux de Fuglede cités dans la bibliographie.

2. - Démonstration du théorème de Fuglede

Nous allons utiliser le résultat suivant inspiré de Feyel [3]:

Théorème 2.1: *Soient $E \subset U$ et $s \in \mathcal{S}(U)$; alors il existe $s_1, s_2 \in \mathcal{S}(U)$ telles que:*

i) $s = s_1 + s_2$;
ii) ${}^U\widehat{R}^E_{s_1} = s_1$ (*on dira alors que s_1 est autoréduite sur E*) *et* ${}^U\widehat{R}^{CE}_{s_2} = s_2$.

Démonstration: On va utiliser la propriété suivante bien connue du cône $\mathcal{S}(U)$ (*voir* [4]):

$$\forall u,\, v \in \mathcal{S}(U),\ \exists w \in \mathcal{S}(U):\ u = w + {}^U\widehat{R}_{u-v}.$$

On notera la fonction w par $u - {}^U\widehat{R}_{u-v}$.

On définit par récurrence sur $n \geqslant 0$ une suite (v_n) d'élélments de $\mathcal{S}(U)$ en posant:

$$v_0 = s \quad \text{et} \quad v_{n+1} = v_n - {}^U\widehat{R}_{v_n - {}^U\widehat{R}^E_{v_n}}.$$

Il est clair que la suite (v_n) est décroissante. Posant $s_1 = \widehat{\inf}\, v_n$, on a, pour tout $k \geq 0$

$$v_k = s_1 + \sum_{n \geq k} w_n,$$

où l'on a posé $w_n = {}^U\widehat{R}_{v_n - {}^U\widehat{R}^E_{v_n}}$, d'où

$${}^U\widehat{R}^E_{v_k} \leq {}^U\widehat{R}^E_{s_1} + \sum_{n \geq k} w_n,$$

et, par soustraction,

$$s_1 - {}^U\widehat{R}_{s_1} \leq v_k - {}^U\widehat{R}^E_{v_k} \leq w_k \quad \text{q.p.}$$

En faisant tendre k vers l'infini, on obtient $s_1 = {}^U\widehat{R}^E_{s_1}$ q.p., donc partout.

Posons $s_2 = \sum\limits_{n \geq 0} w_n$; on a $s = s_1 + s_2$ et, pour montrer que l'on a ${}^U\widehat{R}^{CE}_{s_2} = s_2$, il suffit de montrer que ${}^U\widehat{R}^{CE}_{w_n} = w_n$ pour tout n. Soit $f \in \mathcal{S}(U)$ telle que $f \geq w_n$ sur CE; alors $f + {}^U\widehat{R}^E_{v_n} \geq v_n$ q.p. sur CE, et donc $f + {}^U\widehat{R}^E_{v_n} \geq v_n$ q.p. sur Ω. Par régularisation, il vient $f + {}^U\widehat{R}^E_{v_n} \geq v_n$, puis $f \geq v_n - {}^U\widehat{R}^E_{v_n}$ q.p., d'où enfin $f \geq w_n$, donc ${}^U\widehat{R}^{CE}_{w_n} = w_n$ et le résultat.

Lemme 2.2.: *Soit V un ouvert fin relativement compact dans Ω tel que $\overline{V} \subset U$ et soit p un potentiel > 0 dans Ω, harmonique dans $C\overline{V}$. Alors on a ${}^U\widehat{R}^{U-V'}_{p_U} \neq p_U$ pour tout ouvert fin V' tel que $\overline{V} \subset V' \subset U$.*

Démonstration: On a ${}^U\widehat{R}^{U-V'}_{\widehat{R}^{CU}_p} = \widehat{R}^{CU}_p$ dans U. En effet, si $s \in \mathcal{S}(U)$ est telle que $s \geq \widehat{R}^{CU}_p$ sur $U - V'$, alors la fonction

$$t(x) = \begin{cases} \inf(s, \widehat{R}^{CU}_p)(x) & \text{si } x \in U, \\ \widehat{R}^{CU}_p(x) & \text{si } x \in CU \end{cases}$$

est surharmonique ≥ 0 dans Ω d'après ([4], lemma 10.1) et majore p q.p. sur CU, donc $s \geq \widehat{R}^{CU}_p$ dans U. D'autre part, on a $p = p_U + \widehat{R}^{CU}_p$, d'où ${}^U\widehat{R}^{U-V'}_p = {}^U\widehat{R}^{U-V'}_{p_U} + \widehat{R}^{CU}_p$. On en déduit que si ${}^U\widehat{R}^{U-V'}_{p_U} = p_U$, alors $p = \widehat{R}^{U-V'}_p$, et donc $p = \widehat{R}^{CV'}_p$, ce qui est absurde, car on aurait forcément $G(.,y) = \widehat{R}^{CV'}_{G(.,y)}$ μ-p.p., où μ est la mesure portée par $\overline{V}$ telle que $p = G^\mu$. Le lemme est démontré.

Lemme 2.3: *Soit x_0 un point de U et soit A une partie relativement compacte de Ω telle que $\overline{A} \subset U$ et $\inf\{G_U(x_0, y); y \in \overline{A}\} = c > 0$. Alors, pour toute $s \in \mathcal{S}(U)$ tel que $0 < s(x_0) < +\infty$, il existe un potentiel p sur Ω, harmonique dans $C\overline{A}$ et tel que $0 < p_U < \widehat{R}^A_s \leq p$.*

Démonstration: Soit q un potentiel > 0, fini et continu sur Ω. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe d'après ([6], th. 3) une mesure de Radon positive μ_n sur Ω, portée par $\overline{A}$ et telle que $0 < (G^{\mu_n})_U < \widehat{R}^A_{\min(s,\, n p)} \leq G^{\mu_n}$. On a donc $|\mu_n| \leq (1/c)\, s(x_0)$ pour tout n, et par suite on peut alors extraire de la suite des mesures μ_n une sous-suite $(\mu_{n'})$ qui converge vaguement vers une mesure de Radon positive μ portée par $\overline{A}$, et l'on a ${}^U\widehat{R}^A_s \leq G_\mu$. Le reste découle encore de ([6], th. 3).

Corollaire: *Soit x_0 un point de U et soit A une partie de U, relativement compacte dans Ω, telle que $\overline{A} \subset U$ et $\inf\{G_U(x_0, y);\, y \in \overline{A}\} = c > 0$. Alors, pour tout $s \in \mathcal{S}(U)$ tel que $s(x_0) < +\infty$, il existe une mesure de Radon positive μ sur Ω, portée par $\overline{A}$ et telle que ${}^U\widehat{R}^A_s = G^\mu_U$.*

Démonstration: Soit $\mathcal{M} = \{\nu;\, \nu \text{ mesure } \geq 0 \text{ portée par } \overline{A},\ G^\nu_U \prec {}^U\widehat{R}^A_s\}$. Alors, d'après le lemme précédent, la mesure représentant le potentiel p de ce même lemme appartient à $\mathcal{M}$, donc $\mathcal{M} \neq \emptyset$. Soit $\mathcal{C}$ une chaîne sur $\mathcal{M}$ pour l'ordre usuel des mesures. Les mesures $\nu \in \mathcal{M}$ ont chacune un total majoré par $s(x_0)/c$, donc le filtre $\mathcal{F}$ des sections de $\mathcal{C}$ converge vaguement vers une mesure $\nu_0 \geq 0$ portée par $\overline{A}$ et l'on a $\sup G^\nu = G^{\nu_0}$. Pour tout $\nu \in \mathcal{M}$, il existe une fonction $s_\nu \in \mathcal{S}(U)$ telle que $G^\nu + s_\nu = {}^U\widehat{R}^A_s + \widehat{R}^{\complement U}_{G^\nu}$. On en déduit que $G^{\nu_0} + \lim \widehat{\inf_{\mathcal{F}}} s_\nu = {}^U\widehat{R}^A_s + \widehat{R}^{\complement U}_{G^{\nu_0}}$, où l'on a posé $\lim \widehat{\inf_{\mathcal{F}}} s_\nu = \sup_{M \in \mathcal{F}} \widehat{\inf_{\nu \in M}} s_\nu$. Donc ν_0 est un majorant de $\mathcal{C}$ qui appartient à $\mathcal{M}$. D'après le lemme de Zorn, $\mathcal{M}$ admet un élément maximal μ. Il résulte alors de ([6], th. 3) que l'on a nécessairement $G^\mu_U = {}^U\widehat{R}^A_s$, ce qui achève la démonstration.

Rappelons maintenant qu'une fonction $s \in \mathcal{S}(U)$ est dite invariante si elle est orhtogonale, pour l'ordre spécifique, à la bande des potentiels fins dans U.

Les lemmes 2.2 et 2.3 permettent d'obtenir rapidement la caractérisation suivante de ([7], th. 4.4) des fonctions invariantes:

Théorème 2.4: *Soient $h \in \mathcal{S}(U)$, x_0 un point de U tel que $h(x_0) < +\infty$. Alors h est invariante si et seulement si on a ${}^U\widehat{R}^{U-V_n}_h = h$ pour tout $n \geq 1$, où $V_n = \{x \in U;\, G_U(x, x_0) > 1/n\}$.*

Démonstration: Supposons d'abord que ${}^U\widehat{R}^{U-V_n}_h = h$ pour tout n. Si h n'est pas invariante, il existe un potentiel fin p tel que $0 < p \prec h$. Pour tout n, posons $e_n = \{x \in U;\, p(x) = +\infty\} \cap V_n$ et $p_n = \widehat{\inf}\{{}^U\widehat{R}^V_p;\, V \text{ ouvert fin}, e_n \subset V \subset V_n\}$. Pour tout n, la fonction p_n est finement harmonique dans $\{x \in U;\, p(x) < +\infty\}$ ([4], cor. du th. 11.13) et par suite on a $p_n \prec {}^U R^{V_n}_p$ et $p_n \prec h$. On distingue deux cas:

1) Il existe un entier n tel que p_n soit non nul: Comme $p_n \prec {}^U\widehat{R}^{V_n}_p$, alors ${}^U\widehat{R}^{V_n}_{p_n} = p_n$, donc d'après le lemme 2.3 il existe un potentiel $r > 0$ dans Ω, harmonique dans $\complement \overline{V}_n$ et tel que $0 < r_U \prec p_n$, donc $0 < r_U \prec h$ et par suite ${}^U\widehat{R}^{U-V_m}_{r_U} = r_U$ pour tout m, ce qui est absurde d'après le lemme 2.2.

2) p_n est nul pour tout n. Alors il existe $x_1 \in U$ tel que, pour tout n, il existe un ouvert fin V'_n tel que $e_n \subset V'_n \subset V_n$ et ${}^U\widehat{R}^{V'_n}_p(x_1) < 2^{-n}$. Soit $q = \sum_{n \geq 0} {}^U R^{V'_n}_p$; alors on a

$p \leq q$ d'après le principe du minimum fin. Il résulte alors de la propriété de décomposition de Riesz ([4], p.129), qu'il existe un entier $n \geq 0$ et et un potentiel fin $q_n < p$ tel que $0 < q_n \leq {}^U\widehat{R}_p^{V_n}$. En vertu du théorème 3 de [6], on peut trouver un potentiel r_n dans Ω, harmonique dans $C\overline{V}_n$ tel que $0 < (r_n)_U < q_n$ et donc $0 < (r_n)_U < h$. On conclut alors comme dans le premier cas.

La réciproque résulte de l'inégalité $h \leq {}^U\widehat{R}_h^{V_n} + {}^U\widehat{R}_h^{U - V_n}$ pour tout n, de la propriété de décomposition de Riesz et du lemme 2.3.

Démonstration du théorème de Fuglede.

Existence de la mesure μ. Soient $p \in S(U)$ et $x_0 \in U$ tel que $p(x_0) < +\infty$ et (V_n) comme dans le théorème 2.5; alors on a, d'après le théorème de partition 2.1, $p = \sum_n p_n + k$, où p_1 est autoréduite sur $\overline{V}_1$, et p_{n+1} autoréduite sur $\overline{V}_{n+1}$ et ${}^U\widehat{R}_k^{U - V_n} = k$ pour tout n. Comme p est un potentiel fin, on a $k = 0$ d'après le théorème 2.5, et la mesure cherchée est la somme des restrictions à U des mesures correspondantes aux fonctions p_n dans le corollaire du lemme 2.2.

Unicité de la mesure μ. Soient μ et ν deux mesures de Borel ≥ 0 sur U telles que $p = G_U^\mu = G_U^\nu$; posons $\mu_1 = 1_{\overline{V}_1} \cdot \mu$ (resp. $\nu_1 = 1_{\overline{V}_1} \cdot \nu$) et, pour tout $n \geq 1$, $\mu_{n+1} = 1_{\overline{V}_{n+1}} \cdot \left(\mu - \sum_{i=1}^{i=n} \mu_i\right)\left(\text{resp. } \nu_{n+1} = 1_{\overline{V}_{n+1}} \cdot \left(\nu - \sum_{i=1}^{i=n} \nu_i\right)\right)$. Alors on a $p = \sum_n G_U^{\mu_n} = \sum_n G_U^{\nu_n}$. Il résulte facilement du principe de domination ([1], p. 120) que $G_U^{\mu_n} = G_U^{\nu_n} = p_n$ et par suite $G^{\tilde{\mu}_n + \tilde{\nu}_n^{CU}} = G^{\tilde{\nu}_n + \tilde{\mu}_n^{CU}}$, pour tout n. On en déduit que $\tilde{\mu}_n + \tilde{\nu}_n^{CU} = \tilde{\nu}_n + \tilde{\mu}_n^{CU}$, et donc $\mu_n = \nu_n$ puisque $\tilde{\mu}_n^{CU}$ et $\tilde{\nu}_n^{CU}$ sont portées par la frontière fine de U, d'où le résultat.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] M. Brelot, *Éléments de la théorie classique du potentiel*, C.D.U, 1969.

[2] M. El Kadiri, *Sur la décomposition de Riesz et la représentation intégrale des fonctions finement surharmoniques*, à paraître dans Positivity.

[3] D. Feyel, *Sur le théorème de partition de M. Brelot*, Bulletin de la classe des Sciences de l'Académie Royale de Belgique, 5è Série, Tome LXVIII (1982), 424-430.

[4] B. Fuglede, *Finely harmonic functions*, Lecture Notes in Math., 289, Springer-Verlag, 1972.

[5] B. Fuglede, *Sur la fonction de Green dans un domaine fin*, Ann. Inst. Fourier, 25 (1975), 201-206.

[6] B. Fuglede, *Localization in Fine Potential Theory and Uniform Approximation by Subharmonic Functions*, J. Funct. Anal., 49 (1982), 52-72.

[7] B. Fuglede, *Integral Representation of Fine Potential*, Math. Annalen, 262 (1983), 191-214.

[8] B. Fuglede, *Représentation intégrale des potentiels fins*, Comptes Rendus, 300, Série I (1985), 129-132.