Rendiconti
Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL
Memorie di Matematica e Applicazioni
116° (1998), Vol. XXII, fasc. 1, pagg. 71-75

GIORGIO LETTA - LUCA PRATELLI (*)

Démonstration simplifiée d'un résultat de K. L. Chung (**)

Résumé. — On donne une démonstration simplifiée d'un résultat arithmétique utilisé par K. L. Chung dans l'étude des promenades aléatoires sur les entiers.

Dimostrazione semplificata di un risultato di K. L. Chung

Sunto. — Si dà una dimostrazione semplificata di un risultato aritmetico impiegato da K. L. Chung nello studio delle passeggiate aleatorie sugli interi.

1. - Énoncé du résultat

Dans toute la suite on appelle simplement *groupe* un sous-groupe du groupe additif $\mathbb{Z}$ des entiers. De même, on appelle *semigroupe* une partie H de $\mathbb{Z}$ avec

$$0 \in H, \qquad H + H \subset H.$$

Pour toute partie A de $\mathbb{Z}$, on note $\Gamma(A)$ le groupe engendré par A, et $\Sigma(A)$ le semigroupe engendré par A. En outre, on désigne par $(\Sigma_n(A))_{n \geq 0}$ la suite d'ensembles définie, par récurrence, de la manière suivante:

$$\Sigma_0(A) = \{0\}, \qquad \Sigma_{n+1}(A) = A + \Sigma_n(A).$$

De manière équivalente, on peut dire que $\Sigma_n(A)$ est l'ensemble des entiers qui peuvent être représentés comme somme d'un n–uple d'éléments de A. On voit aisément

(*) Indirizzo delgli Autori: G. Letta, Dipartimento di Matematica, via Buonarroti 2, I-56127 Pisa; L. Pratelli, Gruppo Insegnamento Matematiche, Accademia Navale di Livorno, Viale Italia 72, I-57100 Livorno.

(**) Memoria presentata il 3 novembre 1998 da Giorgio Letta, uno dei XL.

que l'on a

$$\bigcup_{n \geqslant 0} \Sigma_n(A) = \Sigma(A) \subset \Gamma(A)\,. \tag{1.1}$$

En utilisant ces notations, nous nous proposons de démontrer le résultat suivant, dû à K. L. Chung:

(1.2) Théorème: *Soit A une partie de $\mathbb{Z}$. Pour que l'on ait*

$$\liminf_n \Sigma_n(A) = \mathbb{Z}\,, \tag{1.3}$$

il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient remplies:

(*a*) *L'ensemble A contient au moins un entier strictement positif et au moins un entier strictement négatif.*

(*b*) $\Gamma(A - A) = \mathbb{Z}$.

L'histoire de ce théorème, considéré autrefois par P. Erdös, et par Chung lui même, comme «évident» (et énoncé sans démonstration dans les mémoires très anciens [1] et [2]), est racontée avec beaucoup d'*humour* par Chung dans un article tout récent, publié en mémoire de Paul Erdös. Dans cet article le théorème est démontré, pour la première fois, de manière explicite (voir [3], Th. 1). En renvoyant le lecteur, pour les détails de l'histoire, au brillant récit de Chung, nous nous bornerons ici, avant de donner notre démonstration du Théorème (1.2), à rappeler brièvement le rôle que ce théorème joue dans la théorie des promenades aléatoires sur les entiers.

Étant donnée une loi de probabilité μ sur $\mathbb{Z}$, construisons sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ une suite $(X_n)_{n \geqslant 1}$ de variables aléatoires indépendantes, à valeurs dans $\mathbb{Z}$, admettant μ comme loi commune, et considérons la promenade aléatoire $(S_n)_{n \geqslant 0}$ définie par

$$S_n = X_1 + \ldots + X_n \qquad (S_0 = 0)\,.$$

Désignons en outre par A le support de la loi μ, c'est-à-dire la partie de $\mathbb{Z}$ définie par

$$A = \{x \in \mathbb{Z} : P\{X_1 = x\} \neq 0\}\,.$$

Les éléments de A sont les états que la promenade aléatoire peut visiter, avec une probabilité non nulle, à l'instant 1. On voit alors que, pour tout entier positif n, l'ensemble $\Sigma_n(A)$ est le support de la loi de S_n:

$$\Sigma_n(A) = \{x \in \mathbb{Z} : P\{S_n = x\} \neq 0\}\,.$$

En d'autres termes: les éléments de $\Sigma_n(A)$ sont les états que la promenade aléatoire peut visiter, avec une probabilité non nulle, à l'instant n. La relation (1.1) montre que l'ensemble $\Sigma(A)$ est constitué par les états qui sont *accessibles* à la promenade aléatoire, au sens qu'ils peuvent être visités avec une probabilité non nulle. Par contre, l'ensemble $\liminf_n \Sigma_n(A)$ est constitué par les états *fortement accessibles*, c'est-à-dire par les états x qui possèdent la propriété suivante: il existe un instant k (dépendant de x) tel que, pour tout instant $n \geqslant k$, la probabilité pour que la promenade visite x à l'instant n ne soit pas nulle.

Le Théorème (1.2) peut donc se traduire ainsi: pour que *tous* les états soient fortement accessibles, il faut et il suffit que les deux conditions (a) et (b) soient remplies.

En ce qui concerne la démonstration simplifiée que nous proposons ci-dessous pour ce théorème, il faut préciser que c'est K.L. Chung qui nous a aimablement *défiés* de trouver une telle démonstration. Ce n'est qu'en cédant à ses pressantes sollicitations et à ses généreux encouragements que nous nous décidons enfin à la publier ici.

2. - Quelques lemmes arithmétiques

Nous ferons précéder la démonstration du Théorème (1.2) de trois petits lemmes arithmétiques (dont le premier est bien connu).

(2.1) Lemme: *Soit H un semigroupe, contenu dans l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers positifs, tel que l'on ait $\Gamma(H) = \mathbb{Z}$.*
L'ensemble $\mathbb{N} \backslash H$ est alors fini.

Démonstration: Puisque H est un semigroupe, on a

$$H - H = \Gamma(H) = \mathbb{Z}\,.$$

Il existe donc un couple (a, b) d'éléments de H avec $a - b = 1$. Nous prouverons que H contient tout entier supérieur ou égal à $(a+b)^2$. Soit n un tel entier. En le divisant par $a+b$, on trouve deux entiers q, r avec

$$n = q(a+b) + r\,, \qquad 0 \leqslant r < a+b \leqslant q\,.$$

On peut alors écrire $n = q(a+b) + r(a-b) = a(q+r) + b(q-r)$. Il en résulte (les deux entiers $q+r$ et $q-r$ étant positifs) que n appartient à H.

(2.2) Lemme: *Pour toute partie A de $\mathbb{Z}$, les conditions suivantes sont équivalentes:*

(a) *L'ensemble A contient au moins un entier strictement positif et au moins un entier strictement négatif.*

(a') $\Sigma(A) = \Gamma(A) \neq \{0\}$.

Démonstration: Puisque l'implication $(a') \Rightarrow (a)$ est immédiate, il suffira de prouver l'implication $(a) \Rightarrow (a')$. Supposons donc que la condition (a) soit remplie. Il suffit alors de prouver que $\Sigma(A)$ est un groupe. À cet effet, désignons par a le plus grand des éléments de $\Sigma(A)$ strictement négatifs, et par b le plus petit des éléments de $\Sigma(A)$ strictement positifs. On voit alors que $a+b$, qui est un élément de $\Sigma(A)$ strictement compris entre a et b, est forcément nul. Les deux entiers b et $-b$ appartiennent donc à $\Sigma(A)$, ce qui entraîne l'inclusion $b.\mathbb{Z} \subset \Sigma(A)$. Il suffit de prouver l'inclusion opposée. À cet effet, étant donné un élément h de $\Sigma(A)$, désignons par q le quotient de la division euclidienne de h par b: il suffit alors de remarquer que le reste $h-qb$, qui est un élément de $\Sigma(A)$ strictement compris entre $-b$ et b, est forcément nul.

(2.3) Lemme: *Soit A une partie de $\mathbb{Z}$. On a alors*

$$\Gamma(A-A) \subset \Gamma(A). \tag{2.4}$$

En outre, cette inclusion se réduit à une égalité lorsqu'il existe un entier positif n tel que l'on ait

$$\Sigma_n(A) \cap \Sigma_{n+1}(A) \neq \emptyset. \tag{2.5}$$

Démonstration: L'inclusion (2.4) est évidente, car tout groupe contenat A contient $A-A$. Supposons maintenant que la relation (2.5) ait lieu pour un entier n, et prouvons l'inclusion opposée de (2.4). Soit s un élément de $\Sigma_n(A) \cap \Sigma_{n+1}(A)$. Puisqu'il appartient à $\Sigma_{n+1}(A)$, on pourra l'écrire sous la forme $s = a + s'$, avec $a \in A$ et $s' \in \Sigma_n(A)$. On a alors

$$a = s - s' \in \Sigma_n(A) - \Sigma_n(A) = \Sigma_n(A-A) \subset \Gamma(A-A).$$

Il en résulte que tout élément b de A, en tant que somme de l'élément $b-a$ de $A-A$ et de l'élément a de $\Gamma(A-A)$, appartient à $\Gamma(A-A)$. On a donc $A \subset \Gamma(A-A)$, c'est-à-dire $\Gamma(A) \subset \Gamma(A-A)$.

Le lemme est ainsi démontré.

3. - Démonstration du résultat

Démontrons maintenant le Théorème (1.2). La nécessité est immédiate. En effet, en supposant que l'égalité (1.3) ait lieu, on voit que la relation

$$\liminf_n \Sigma_n(A) \subset \bigcup_{n \geq 0} \Sigma_n(A) = \Sigma(A) \subset \Gamma(A) \subset \mathbb{Z}$$

se réduit à une chaîne d'égalités. On a donc notamment $\Sigma(A) = \Gamma(A) = \mathbb{Z}$, de sorte que la condition (a) est remplie en vertu du Lemme (2.2). En outre, puisque l'hypothèse (1.3) entraîne que la relation (2.5) a lieu pour un n au moins, le Lemme (2.3) fournit $\Gamma(A-A) = \Gamma(A) = \mathbb{Z}$.

Prouvons maintenant la suffisance. Supposons donc que les conditions (*a*) et (*b*) soient vérifiées. L'hypothèse (*a*) entraîne alors, grâce au Lemme (2.2), la relation

$$\Gamma(A-A) \subset \Gamma(A) = \Sigma(A) \subset \mathbb{Z}\,,$$

qui, à cause de l'hypothèse (*b*), se réduit à une chaîne d'égalités. Il en résulte notamment

$$\mathbb{Z} = \Sigma(A) = \bigcup_{n \geqslant 0} \Sigma_n(A)\,. \tag{3.1}$$

Posons $D = \{b - a\colon a,\, b \in A,\, a \leqslant 0 \leqslant b\}$, $H = \{h \in \mathbb{N}\colon 0 \in \Sigma_h(A)\}$. On vérifie aisément que H est un semigroupe. En outre, on a $D \subset H$: en effet, si a, b sont deux éléments de A avec $a \leqslant 0 \leqslant b$, on peut écrire 0 comme somme d'un $(b-a)$–uple d'éléments de $\{a, b\}$, de sorte que l'on a $0 \in \Sigma_{b-a}(A)$, c'est-à-dire $b - a \in H$. D'autre part, si un élément de $A - A$ n'appartient ni à D ni à $-D$, il est de la forme $b - a$, où a, b sont deux éléments de A ayant un même signe: par conséquent, il appartient à $D - D$, car il peut se mettre sous la forme $b - a = (b - c) - (a - c) = (c - a) - (c - b)$, où c est un élément de A de signe contraire à celui de a et de b. On a donc les inclusions $A - A \subset D \cup (-D) \cup (D - D) \subset \Gamma(H)$, d'où l'on tire, grâce à l'hypothèse (*b*), $\Gamma(H) = \mathbb{Z}$. Le Lemme (2.1) montre alors que l'ensemble $\mathbb{N} \backslash H$ est fini, c'est-à-dire qu'il existe un entier positif h_0 tel que l'on ait

$$0 \in \Sigma_h(A) \qquad \text{pour} \qquad h \geqslant h_0\,. \tag{3.2}$$

Fixons un élément x de $\mathbb{Z}$. La relation (3.1) montre qu'il existe un entier positif n avec $x \in \Sigma_n(A)$. Il en résulte, grâce à (3.2),

$$x \in \Sigma_{n+h}(A) \qquad \text{pour} \qquad h \geqslant h_0\,.$$

L'entier x étant arbitraire, cela prouve que la relation (1.3) est vérifiée.

REFERENCES

[1] K. L. Chung, *Fluctuations of sums of independent random variables*, Ann. Math., 51 (1950), 697-706.

[2] K. L. Chung - P. Erdös, *Probability limit theorems assuming only first moment I*, Memoirs A.M.S., 6 (1950), 1-19.

[3] K. L. Chung, *Multinomial Ratio [Paul Erdös solves a problem]*, Methods and Applications of Analysis, 5 (2) 1998, 143-156.