Rendiconti
Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL
Memorie di Matematica e Applicazioni
115° (1997), Vol. XXI, fasc. 1, pagg. 157-162

GIORGIO LETTA - LUCA PRATELLI (*)

Le théorème de Skorohod pour des lois de Radon sur un espace métrisable (**)

RÉSUMÉ. — On donne une démonstration élémentaire du théorème de représentation de Skorohod dans le cas d'une suite de lois de Radon sur un espace métrisable quelconque.

Il teorema di Skorohod per leggi di Radon su uno spazio metrizzabile

SUNTO. — Si espone una dimostrazione elementare del teorema di rappresentazione di Skorohod per una successione di leggi di Radon su un arbitrario spazio metrizzabile.

0. - INTRODUCTION

Le théorème de représentation de Skorohod [9] peut être énoncé de la manière suivante:

(0.1) THÉORÈME: *Sur un espace polonais E soient μ une loi de Radon et (μ_n) une suite de lois de Radon, convergeant étroitement vers μ.*

On peut alors définir, sur un espace probabilisé convenable, des variables aléatoires X, X_n, à valeurs dans E et de lois μ, μ_n, de telle manière que la suite (X_n) converge presque sûrement vers X.

Rappelons aussi que, dans le cas où l'espace E coïncide avec $\mathbf{R}$, la démonstration du théorème de Skorohod peut s'obtenir de manière tout à fait élémentaire en utilisant les

(*) Indirizzo degli Autori: G. LETTA, Dipartimento di Matematica, via Buonarroti 2, I-56127 Pisa; L. PRATELLI, Gruppo Insegnamento Matematiche, Accademia Navale di Livorno, Viale Italia 72, I-57100 Livorno.

(**) Memoria presentata il 3 settembre 1997 da Giorgio Letta, uno dei XL.

inverses généralisées (au sens de Paul Lévy) des fonctions de répartition des lois μ et μ_n (voir, par ex., [1], [6]).

Le théorème de Skorohod a été généralisé et perfectionné par plusieurs auteurs ([3], [10], [4], [5], [8]). Ces généralisations entraînent notamment le résultat suivant: l'énoncé (0.1) demeure valable si on y remplace l'hypothèse que E est un espace polonais par l'hypothèse, plus générale, que E est un espace métrisable quelconque. Dans la présente Note, nous proposons, pour ce dernier résultat, une démonstration très simple, qui consiste à se ramener, à l'aide d'un petit lemme topologique, au cas élémentaire de la droite réelle.

1. - Définitions et rappels

Si E est un espace topologique séparé, une *loi de Radon* sur E est une mesure de probabilité μ, sur la tribu borélienne de E, telle que tout ensemble borélien B contienne un ensemble H σ-compact (i.e. réunion dénombrable d'ensembles compacts) avec $\mu(B \backslash H) = 0$.

Étant données une loi de Radon μ sur E et une suite (μ_n) de lois de Radon sur E, on dit que (μ_n) converge *étroitement* vers μ si la relation

$$\mu(U) \leq \liminf_n \mu_n(U)$$

a lieu pour tout ensemble ouvert U de E.

Dans toute la suite, nous désignerons par $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ l'espace probabilisé obtenu en munissant l'intervalle ouvert $]0, 1[$ de sa tribu borélienne et de la restriction, à cette tribu, de la mesure de Lebesgue sur R.

Afin d'abréger les énoncés et les démonstrations, il nous sera utile la locution suivante:

(1.1) Définition: On dit que l'espace topologique séparé E possède la *propriété de Skorohod* si, pour toute loi de Radon μ sur E et toute suite (μ_n) de lois de Radon sur E, convergeant étroitement vers μ, on peut définir, sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ introduit ci-dessus, des variables aléatoires X, X_n, à valeurs dans E et de lois μ, μ_n, de telle manière que la suite (X_n) converge presque sûrement vers X.

À l'aide de cette locution, le résultat à démontrer peut être énoncé sous la forme suivante:

(1.2) Théorème: *Tout espace métrisable possède la propriété de Skorohod.*

Avant de démontrer ce résultat, nous expliciterons tout d'abord quelques conséquences immédiates de la définition (1.1), à savoir:

(1.3) Proposition: *Soit E un espace topologique séparé.*

(*a*) *Si E possède la propriété de Skorohod, il en est de même de tout espace homéomorphe à E.*

(*b*) *Si E possède la propriété de Skorohod, il en est de même de tout sous-espace borélien de E.*

(*c*) *Pour que E possède la propriété de Skorohod, il suffit que toute loi de Radon sur E soit portée par un sous-espace borélien de E possédant la propriété de Skorohod.*

Démonstration: L'assertion (*a*) est évidente.

Démontrons l'assertion (*b*). Soit donc E_0 un sous-espace borélien de E (c'est-à-dire un sous-espace de E appartenant à la tribu borélienne de E). Étant données, sur E_0, une loi de Radon λ et une suite (λ_n) de lois de Radon, convergeant étroitement vers λ, désignons par μ (resp. μ_n) l'image de λ (resp. λ_n) par l'injection canonique de E_0 dans E. On voit alors aisément que (μ_n) est une suite de lois de Radon sur E, convergeant étroitement vers μ. Il existe donc des variables aléatoires X, X_n avec les propriétés décrites dans (1.1). Fixons un élément x de E_0 et désignons par X' la variable aléatoire, à valeurs dans E_0 et de loi λ, qui coïncide avec X sur l'ensemble $\{X \in E_0\}$ et avec la constante x ailleurs. Définissons de manière analogue la variable aléatoire X'_n, de loi λ_n. La suite (X'_n) converge alors presque sûrement vers X'. Cela prouve que l'espace E_0 possède la propriété de Skorohod.

Démontrons maintenant l'assertion (*c*). Supposons donc que l'espace E vérifie la condition énoncée dans (*c*). Considérons une loi de Radon μ sur E et une suite (μ_n) de lois de Radon sur E, convergeant étroitement vers μ. Soit ν une loi de Radon sur E telle que la loi μ, ainsi que chacune des lois μ_n, soit absolument continue par rapport à ν. Il existe, d'après l'hypothèse, un sous-espace borélien E_0 de E, qui porte la loi ν et qui possède la propriété de Skorohod. Les lois μ, μ_n sont alors portées par E_0. Elles induisent, par restriction à la tribu borélienne de E_0, des lois de Radon λ, λ_n sur E_0. En outre, la suite (λ_n) converge étroitement vers λ. Il en résulte (puisque E_0 possède la propriété de Skorohod) qu'on peut définir, sur l'espace $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, des variables aléatoires X, X_n, à valeurs dans E_0 et de lois λ, λ_n, de telle manière que la suite (X_n) converge presque sûrement vers X. Il est clair que X et X_n peuvent être considérées aussi comme des variables aléatoires à valeurs dans E: elles admettent alors comme lois μ et μ_n respectivement. On voit donc que l'espace E possède la propriété de Skorohod.

(1.4) Remarque: Pour que l'espace E possède la propriété de Skorohod, il est évidemment nécessaire qu'il possède la propriété suivante:

(1.5) *Pour toute loi de Radon μ sur E, il existe, sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, une variable aléatoire X à valeurs dans E et de loi μ.*

Or, le fait que la tribu $\mathcal{A}$ possède un système dénombrable de générateurs entraîne que, si l'espace E n'est pas métrisable, la propriété (1.5) n'est pas forcément vérifiée. On peut même exhiber un exemple d'espace *compact* E (non métrisable) pour lequel la propriété en question n'a pas lieu. Il suffit pour cela de prendre comme espace E un cube de la forme $[0, 1]^I$, où I est un ensemble non dénombrable: si λ est une loi de Radon sur $[0, 1]$, qui ne soit pas dégénérée, et si μ désigne l'unique loi de Radon sur E rendant les projections canoniques ξ_i indépendantes et de même loi λ, alors il n'existe aucune variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ admettant μ comme loi. En effet, si X était une telle variable aléatoire, alors les variables aléatoires réelles $X_i = \xi_i \circ X$ seraient indépendantes et de même loi λ, de sorte que, dans l'espace normé $L^1(P)$, tous les couples (X_i, X_j) avec $i \neq j$ auraient une même distance strictement positive, ce qui serait en contradiction avec la séparabilité de $L^1(P)$.

2. - Un lemme élémentaire

(2.1) Lemme: *Soit ν une loi de Radon sur un espace compact métrisable E. On peut alors construire une bijection borélienne f de E sur un sous-espace de* $\mathbb{R}$, *telle que l'ensemble des points de discontinuité de f soit négligeable pour la loi ν et que la bijection réciproque de f soit continue.*

Démonstration: L'application de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}$ qui à tout élément $(\xi_j)_{j\geq 0}$ de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ associe le nombre réel $\sum_{j\geq 0} 3^{-j}\xi_j$ est injective et continue. Par conséquent, l'espace compact $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ est homéomorphe à un sous-espace de $\mathbb{R}$. Il suffit donc de démontrer l'énoncé que l'on obtient de (2.1) en y remplaçant $\mathbb{R}$ par $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.

Soit d une distance compatible avec la topologie de E. On peut alors choisir, pour la topologie de E, une base constituée par une suite $(B_j)_{j\geq 0}$ de boules ouvertes de (E, d) dont chacune ait une frontière négligeable pour la loi ν. Désignons par f_j la fonction indicatrice de B_j et posons, pour tout élement x de E,

$$f(x) = (f_j(x))_{j\geq 0}\,.$$

On définit ainsi une application borélienne f de E dans $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, dont l'ensemble des points de discontinuité est la réunion des frontières des boules B_j. Puisque ces boules séparent les points de E, l'application f est injective, de sorte qu'elle peut être considérée comme une bijection de E sur le sous-espace $f(E)$ de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Il reste à prouver que la bijection réciproque est continue. À cet effet, étant donnée une suite $(f(x_n))$ d'éléments de $f(E)$, convergeant vers un élément $f(x)$ de $f(E)$, prouvons que la suite (x_n) n'admet aucune valeur d'adhérence distincte de x. Soit y une valeur d'adhérence de (x_n). On a alors, pour tout indice j,

$$f_j(x) = \lim_n f_j(x_n) \geq f_j(y)$$

(où la dernière inégalité est due au fait que la fonction f_j est semicontinue inférieurement). D'autre part, puisque l'espace E est séparé, la relation

$$f_j(x) \geqslant f_j(y) \quad \text{pour tout } j$$

entraîne $y = x$. L'assertion est donc démontrée.

3. - Démonstration de la propriété de Skorohod pour un espace métrisable quelconque

Nous nous proposons maintenant de démontrer le théorème de Skorohod, pour des lois de Radon sur un espace métrisable E quelconque, en le ramenant au cas élémentaire où l'espace E coïncide avec R. En d'autres termes, nous nous proposons de déduire le fait que la propriété de Skorohod est valable pour tout espace métrisable du fait qu'elle est valable pour R. Grâce à (1.3), il suffira pour cela de démontrer le résultat suivant:

(3.1) Théorème: *Soit ν une loi de Radon sur un espace métrisable E.*
Alors ν est portée par un sous-espace de E homéomorphe à un sous-espace σ-compact de R.

Démonstration: La loi ν est portée par un sous-espace fermé de E possédant une base dénombrable. On pourra donc supposer que l'espace E lui même possède une base dénombrable. Sans diminuer la généralité, nous supposerons que E est un sous-espace (non nécessairement borélien) d'un espace métrisable compact $\bar{E}$ (voir [2], p. 40). En outre, nous désignerons par $\bar{\nu}$ l'image de ν par l'injection canonique de E dans $\bar{E}$. En appliquant le lemme (2.1) à $\bar{\nu}$, on voit qu'il existe une bijection f de $\bar{E}$ sur un sous-espace de R, telle que la réciproque de f soit continue et que l'ensemble D constitué par les points de discontinuité de f soit négligeable pour $\bar{\nu}$. La loi ν est alors portée par l'ensemble borélien $E \cap D^c$ de E, donc aussi par un ensemble σ-compact H contenu dans cet ensemble. Puisque la restriction de f à D^c est un homéomorphisme de D^c sur un sous-espace de R, on voit que H est homéomorphe à un sous-espace σ-compact de R.

Le théorème est ainsi démontré.

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. Billingsley, *Probability and Measure*, Wiley, New York (1979).
[2] N. Bourbaki, *Topologie générale*, Chap. IX, Hermann, Paris (1958).
[3] R. M. Dudley, *Distances of probability measures and random variables*, Ann. Math. Stat., 39 (1968) 1563-1572.
[4] P. J. Fernandez, *Almost surely convergent versions of sequences which converge weakly*, Bol. Soc. Bras. Mat., 5 (1974), 51-61.

[5] X. Fernique, *Un modèle presque sûr pour la convergence en loi*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 306, Série I (1988), 335–338.
[6] D. Foata - A. Fuchs, *Calcul des probabilités*, Masson, Paris (1996).
[7] Hoffmann-Jørgensen, *The general marginal problem*, in: *Lect. Notes Math.*, Vol. 1242, pp. 77-367, Springer, Berlin, Heidelberg, New York (1987).
[8] A. Schief, *Almost surely convergent random variables with given laws*, Probab. Th. Rel. Fields, 81 (1989), 559-567.
[9] A. V. Skorohod, *Limit theorems for stochastic processes*. Theory Probab. Appl., 1 (1956), 261-290.
[10] M. Wichura, *On the construction of almost uniformly convergent random variables with given weakly convergent image laws*, Ann. Math. Stat., 41 (1970), 284-291.

Direttore responsabile: Prof. A. Ballio - Autorizz. Trib. di Roma n. 7269 dell'8-12-1959
«Monograf» - Via Collamarini, 5/L - Bologna