Rendiconti
Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL
Memorie di Matematica e Applicazioni
114° (1996), Vol. XX, fasc. 1, pagg. 205-213

GIORGIO LETTA - LUCA PRATELLI (*)

Convergence stable vers un noyau gaussien (**)

Résumé. — Dans le cadre d'une famille triangulaire de variables aléatoires réelles, on démontre un résultat de convergence stable vers un noyau gaussien.

Convergenza stabile verso un nucleo gaussiano

Riassunto. — Nel quadro di una famiglia triangolare di variabili aleatorie reali, si prova un criterio di convergenza stabile verso un nucleo gaussiano.

1. - Notations et rappels

Nous commencerons par rappeler la définition de convergence stable d'une suite de variables aléatoires réelles.

On se donne un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et une sous-tribu $\mathcal{U}$ de $\mathcal{A}$, que l'on suppose *complète* dans $\mathcal{A}$ (c'est-à-dire contenant la classe des éléments de $\mathcal{A}$ négligeables pour la mesure P). Pour tout élément H de $\mathcal{A}$, avec $P(H) \neq 0$, on désigne par P_H la mesure de probabilité conditionnelle $H \mapsto P(A \cap H)/P(H)$. On appelle simplement *noyau* tout noyau markovien relatif au couple d'espaces mesurables $(\Omega, \mathcal{A}), (\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$. Si N est un noyau, et si Q est une mesure de probabilité sur $\mathcal{A}$, on désigne par QN la transformée de Q par N, c'est-à-dire la loi sur $\mathbf{R}$ définie par

$$(QN)(B) = \int Q(d\omega)\, N(\omega, B).$$

De manière duale, pour toute fonction f borélienne positive (ou bornée) sur $\mathbf{R}$, on désigne par Nf la transformée de f par N, c'est-à-dire la variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A})$ définie

(*) Indirizzi degli autori: G. Letta, Dipartimento di Matematica, via Buonarroti 2, I-56127 Pisa; L. Pratelli, Accademia Navale di Livorno, Gruppo Insegnamento Matematiche, viale Italia 72, I-57100 Livorno.

(**) Memoria presentata il 24 ottobre 1996 da Giorgio Letta, uno dei XL.

par

$$(Nf)(\omega) = \int N(\omega, dx) f(x).$$

(1.1) Définition: On dira que le noyau N est *$\mathcal{U}$-mesurable* si, pour toute fonction f borélienne positive sur R, la variable aléatoire Nf est mesurable par rapport à $\mathcal{U}$.

(1.2) Définition: Étant donnés un noyau N et une suite (X_n) de variables aléatoires réelles, on dira que la suite (X_n) *converge de façon $\mathcal{U}$-stable* vers N si N est $\mathcal{U}$–mesurable et si, pour toute fonction bornée f, mesurable sur l'espace $(\Omega \times \mathrm{R}, \mathcal{U} \otimes \mathcal{B}(\mathrm{R}))$ et continue par rapport au deuxième argument, on a

$$\lim_n \int P(d\omega) f(\omega, X_n(\omega)) = \int P(d\omega) \int N(\omega, dx) f(\omega, x).$$

Lorsque $\mathcal{U}$ coïncide avec la tribu $\mathcal{A}$ toute entière, on emploiera une terminologie spéciale: au lieu de dire que la suite (X_n) converge de façon $\mathcal{A}$-stable vers le noyau N, on dira qu'elle converge vers N de façon stable *au sens strict*.

La proposition suivante (cf. [6, (4.7)]) permet de ramener la notion de convergence stable à celle de convergence en loi.

(1.3) Proposition: *Soient N un noyau, (X_n) une suite de variables aléatoires réelles, $\mathcal{H}$ une partie de $\mathcal{U}$, stable pour l'intersection finie et admettant Ω comme élément, telle que $\mathcal{U}$ coïncide avec la complétée (dans $\mathcal{A}$) de la tribu engendrée par $\mathcal{H}$. Les conditions suivantes sont équivalentes*:

(*a*) *La suite (X_n) converge de façon $\mathcal{U}$-stable vers N.*

(*b*) *Le noyau N est $\mathcal{U}$-mesurable et, pour tout élément H de $\mathcal{H}$ avec $P(H) \neq 0$, la suite (X_n) converge en loi, selon P_H, vers la loi $P_H N$ (transformée de P_H par le noyau N).*

La proposition suivante (cf. [6, (4.5)]) nous sera utile dans la suite.

(1.4) Proposition: *Soient N un noyau et (X_n) une suite de variables aléatoires réelles. On suppose que (X_n) converge de façon $\mathcal{U}$-stable vers N et que chacune des X_n soit mesurable par rapport à $\mathcal{U}$.*

La suite (X_n) converge alors vers N de façon stable au sens strict.

Si U est une variable aléatoire réelle positive sur l'espace $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, on peut considérer le noyau N défini par

$$N(\omega, \cdot) = \mathcal{N}(0, U(\omega)),$$

où $\mathcal{N}(0, U(\omega))$ désigne la loi normale centrée de variance $U(\omega)$. Nous désignerons ce noyau par $\mathcal{N}(0, U)$, et nous l'appellerons le *noyau gaussien* associé à U. Il est clair que si la variable aléatoire U est mesurable par rapport à $\mathcal{U}$, le noyau $\mathcal{N}(0, U)$ est $\mathcal{U}$-mesurable (au sens de (1.1)).

La proposition suivante (qui correspond au Théorème 3.1 de [4]) fournit une caractérisation de la convergence stable vers un noyau gaussien.

(1.5) PROPOSITION: *On se donne une suite* (X_n) *de variables aléatoires réelles et une variable aléatoire réelle positive* U, *mesurable par rapport à* $\mathcal{U}$. *Les conditions suivantes sont équivalentes*:

(*a*) (X_n) *converge de façon* $\mathcal{U}$*-stable vers le noyau gaussien* $\mathcal{N}(0, U)$.

(*b*) *Pour tout nombre réel* t *et tout élément* H *de* $\mathcal{U}$, *avec* $P(H) \neq 0$, *on a*

$$\lim_n \int \exp(itX_n)\,dP_H = \int \exp\left(-\tfrac{1}{2}t^2 U\right) dP_H .$$

(*c*) *Pour tout nombre réel* t, *la suite* $(E[\exp(itX_n)|\mathcal{U}])$ *converge vers la variable aléatoire* $\exp\left(-\frac{1}{2}t^2 U\right)$ *pour la topologie faible* $\sigma(L^1(\mathcal{U}), L^\infty(\mathcal{U}))$.

On remarquera que la condition (b) ci-dessus revient à dire que, pour tout élément non négligeable H de $\mathcal{U}$, la suite des fonctions caractéristiques des X_n, calculées selon P_H, converge simplement vers la fonction caractéristique de la loi $P_H\mathcal{N}(0, U)$ (transformée de P_H par le noyau $\mathcal{N}(0, U)$). Son équivalence avec la condition (*a*) résulte donc de (1.3), grâce au théorème classique de Paul Lévy.

2. - Position du problème et démonstration d'un résultat préliminaire

Étant donnée, sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, une famille triangulaire $(X_{n,j})_{n \geq 1,\, 1 \leq j \leq k_n}$ de variables aléatoires réelles, nous nous proposons de chercher des conditions suffisantes à assurer que la suite des sommes $\sum_j X_{n,j}$ converge de façon stable vers un noyau gaussien.

Nous commencerons par prouver le résultat suivant, qui étend légèrement un critère dû à McLeish (cf. [4, p. 57, Lemma 3.1]):

(2.1) THÉORÈME: *Étant données une famille triangulaire* $(X_{n,j})_{n \geq 1,\, 1 \leq j \leq k_n}$ *de variables aléatoires réelles et une sous-tribu* $\mathcal{U}$ *de* $\mathcal{A}$ *(complète dans* $\mathcal{A}$*), posons*

$$S_n = \sum_j X_{n,j}, \qquad X_n^* = \sup_j |X_{n,j}|, \qquad U_n = \sum_j X_{n,j}^2 .$$

En outre, pour tout nombre réel t, *posons*

$$L_n(t) = \prod_j (1 + itX_{n,j}), \qquad r(t) = \log(1 + it) - it - \frac{1}{2}t^2$$

(où log *désigne le logarithme principal), de manière à avoir*

$$\exp(itS_n) = L_n(t) \exp\left[-\frac{1}{2}t^2 U_n - \sum_j r(tX_{n,j})\right]. \tag{2.2}$$

Supposons que les suites (X_n^*), (U_n) *convergent en probabilité, respectivement, vers la constante* 0 *et vers une variable aléatoire réelle positive* U, *mesurable par rapport à* $\mathcal{U}$. *Supposons enfin que, pour tout nombre réel* t, *les variables aléatoires* $|L_n(t)|$ *soient uniformément intégrables et la suite* $(E[L_n(t)|\mathcal{U}])$ *converge vers* 1 *pour la topologie faible* $\sigma(L^1(\mathcal{U}), L^\infty(\mathcal{U}))$.

Alors (S_n) *converge de façon* $\mathcal{U}$*-stable vers le noyau gaussien* $\mathcal{N}(0, U)$.

Démonstration: D'après (1.5), il suffit de prouver que, pour tout nombre réel t, l'espérance conditionnelle du premier membre de (2.2) par rapport à $\mathcal{U}$ converge vers $\exp(-(1/2)t^2U)$ pour la topologie faible $\sigma(L^1(\mathcal{U}), L^\infty(\mathcal{U}))$. À cet effet, commençons par remarquer que la fonction r, en tant que reste de la formule de Taylor relative à la fonction $\log(1+it)$, vérifie la relation

$$|r(t)| \leq |t|^3 \quad \text{pour} \quad |t| < 1 .$$

Par conséquent, sur l'ensemble $\{|t|X_n^* < 1\}$ (qui est un évènement dont la probabilité converge vers 1 lorsque n tend vers l'infini) on a

$$\left| \sum_j r(tX_{n,j}) \right| \leq |t|^3 \sum_j |X_{n,j}|^3 \leq |t|^3 X_n^* U_n .$$

En outre, puisque le dernier membre de cette relation converge en probabilité vers 0, l'exponentielle qui figure au deuxième membre de (2.2) converge en probabilité vers $\exp(-(1/2)t^2U)$. La conclusion résulte donc du lemme suivant:

(2.3) Lemme: *Dans un espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *on se donne une sous-tribu* $\mathcal{U}$ *de* $\mathcal{A}$, *une variable aléatoire réelle* X *intégrable et une suite* (X_n) *de variables aléatoires réelles uniformément intégrables, telles que la suite* $(E[X_n|\mathcal{U}])$ *converge vers* $E[X|\mathcal{U}]$ *pour la topologie faible* $\sigma(L^1(\mathcal{U}), L^\infty(\mathcal{U}))$. *En outre, on se donne une suite* (Y_n) *de variables aléatoires réelles, convergeant en probabilité vers une variable aléatoire* Y *bornée et mesurable par rapport à* $\mathcal{U}$. *On suppose que les produits* $X_n Y_n$ *soient uniformément intégrables.*

La suite $(E[X_n Y_n|\mathcal{U}])$ *converge alors vers* $E[XY|\mathcal{U}]$ *pour la topologie faible* $\sigma(L^1(\mathcal{U}), L^\infty(\mathcal{U}))$.

Démonstration: On a

$$E[X_n Y_n|\mathcal{U}] - E[XY|\mathcal{U}] = E[X_n(Y_n - Y)|\mathcal{U}] + YE[X_n - X|\mathcal{U}].$$

Il suffit de démontrer que chacun des deux termes qui figurent au second membre de cette égalité converge vers 0 pour la topologie faible $\sigma(L^1(\mathcal{U}), L^\infty(\mathcal{U}))$. Ceci est évident pour le deuxième terme (Y étant un élément de $L^\infty(\mathcal{U})$). En ce qui concerne le premier terme, nous démontrerons, en fait, un résultat un peu plus fort, c'est-à-dire la convergence en moyenne de la suite $(X_n(Y_n - Y))$ vers 0. Remarquons, à cet effet, que la suite en question est uniformément intégrable: on peut donc trouver, pour tout

$\varepsilon > 0$, un nombre $\delta > 0$ tel que, pour tout élément A de $\mathcal{A}$, la relation $P(A) < \delta$ entraîne

$$\sup_n \int_A |X_n(Y_n - Y)| dP \leq \varepsilon .$$

Posons $c = \sup_n E[|X_n|]$ et supposons n assez grand pour que l'on ait $P\{|Y_n - Y| > \varepsilon\} < \delta$. On a alors

$$\int |X_n(Y_n - Y)| dP \leq \int_{\{|Y_n - Y| \leq \varepsilon\}} |X_n(Y_n - Y)| dP + \varepsilon \leq c\varepsilon + \varepsilon .$$

Puisque ε est arbitraire, cela suffit pour conclure.

3. - Cas des suites centrées: le résultat principal

En nous inspirant de la terminologie de Neveu [9], nous appellerons *suite centrée* (par rapport à une filtration donnée) la suite des accroissements d'une martingale discrète, nulle en 0.

Le théorème suivant, qui concerne une famille triangulaire de suites centrées, étend le Théorème 3.2 de [4] (cf. aussi [2], [3], [10], [1]). Il a été utilisé dans [7] pour démontrer un résultat de convergence stable vers un noyau gaussien pour des sommes (empiriquement centrées) de variables aléatoires échangeables.

(3.1) Théorème: *Sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ on se donne une famille triangulaire $(X_{n,j})_{n \geq 1,\, 1 \leq j \leq k_n}$ de variables aléatoires réelles, telle que, pour tout n, la suite finie $(X_{n,j})_{1 \leq j \leq k_n}$ soit une suite centrée par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_{n,j})_{0 \leq j \leq k_n}$ (que l'on suppose avoir prolongée en posant $\mathcal{F}_{n,j} = \mathcal{F}_{n,k_n}$ pour tout entier j supérieur à k_n). On pose*

$$S_n = \sum_j X_{n,j}, \qquad X_n^* = \sup_j |X_{n,j}|, \qquad U_n = \sum_j X_{n,j}^2 .$$

En outre, on désigne par $\mathcal{H}_j$ l'algèbre $\liminf_n \mathcal{F}_{n,j}$ et par $\mathcal{U}$ la complétée (dans $\mathcal{A}$) de la tribu engendrée par l'algèbre $\bigcup_j \mathcal{H}_j$.

On suppose que (X_n^*) converge vers 0 dans L^1 et que (U_n) converge en probabilité vers une variable aléatoire réelle positive U, mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{U}$.

Alors (S_n) converge de façon $\mathcal{U}$-stable vers le noyau gaussien $\mathcal{N}(0, U)$.

Démonstration: Sans restreindre la généralité, nous supposerons que la suite (k_n) soit croissante et que l'on ait $\sup_n k_n = \infty$.

En utilisant les notations de (2.1), supposons d'abord que la condition suivante soit remplie:

(3.2) *Pour tout t, les variables aléatoires $|L_n(t)|$ sont uniformément intégrables.*

Grâce à (2.1), il suffira alors de prouver que, pour tout nombre réel t, la suite $(E[L_n(t) \mid \mathcal{U}])$ converge vers 1 pour la topologie faible $\sigma(L^1(\mathcal{U}), L^\infty(\mathcal{U}))$. À cet effet, considérons, pour tout $n \geqslant 1$, le processus $(L_{n,j}(t))_{1 \leqslant j \leqslant k_n}$ défini par

$$L_{n,j}(t) = \prod_{h=1}^{j} (1 + itX_{n,h}).$$

Ce processus est une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_{n,j})_{1 \leqslant j \leqslant k_n}$, et l'on a $L_n(t) = L_{n,k_n}(t)$. Par conséquent, étant donnés un entier $j \geqslant 1$ et un élément H de $\mathcal{K}_j$, on peut écrire

$$\int_H L_n(t)\, dP = \int_H L_{n,j}(t)\, dP$$

dès que l'entier n est assez grand pour que l'on ait $j \leqslant k_n$ et $H \in \mathcal{F}_{n,j}$. D'autre part, on a $|L_{n,j}(t)| \leqslant |L_n(t)|$ et, lorsque n tend vers l'infini, $L_{n,j}(t)$ converge en probabilité vers 1. L'égalité précédente entraîne donc

$$\lim_n \int_H L_n(t)\, dP = P(H),$$

ce qui prouve l'assertion. Le théorème est ainsi démontré dans le cas particulier envisagé.

Plaçons nous maintenant dans le cas général. Pour tout couple n, j d'entiers, avec $n \geqslant 1$, $1 \leqslant j \leqslant k_n$, posons

$$S_{n,j} = \sum_{h=1}^{j} X_{n,h}, \qquad U_{n,j} = \sum_{h=1}^{j} X_{n,h}^2.$$

On a alors $S_n = S_{n,k_n}$, $U_n = U_{n,k_n}$. Étant donné un nombre réel positif c, considérons le temps d'arrêt J_n défini par

$$J_n = \inf\{ j \in \mathrm{N} : 1 \leqslant j \leqslant k_n, U_{n,j} > c \},$$

et désignons par $(\bar{S}_{n,j})_{1 \leqslant j \leqslant k_n}$, $(\bar{U}_{n,j})_{1 \leqslant j \leqslant k_n}$, $(\bar{L}_{n,j}(t))_{1 \leqslant j \leqslant k_n}$ les processus obtenus en arrêtant à l'instant J_n les processus

$$(S_{n,j})_{1 \leqslant j \leqslant k_n}, \qquad (U_{n,j})_{1 \leqslant j \leqslant k_n}, \qquad (L_{n,j}(t))_{1 \leqslant j \leqslant k_n}.$$

Posons enfin

$$\bar{X}_{n,j} = \bar{S}_{n,j} - \bar{S}_{n,j-1} = X_{n,j} I_{\{j \leqslant J_n\}},$$

$$\bar{X}_n^* = \sup_j |\bar{X}_{n,j}|, \qquad \bar{S}_n = \bar{S}_{n,k_n}, \qquad \bar{U}_n = \bar{U}_{n,k_n}, \qquad \bar{L}_n(t) = \bar{L}_{n,k_n}(t).$$

Alors, pour tout n, la suite finie $(\bar{X}_{n,j})_{1 \leqslant j \leqslant k_n}$ est encore une suite centrée par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_{n,j})_{0 \leqslant j \leqslant k_n}$, et l'on a $\bar{X}_n^* \leqslant X_n^*$. En outre, on a

$$U_n \wedge c \leqslant \bar{U}_n \leqslant \Big(\sum_{j < J_n} X_{n,j}^2 \Big) + (X_n^*)^2 \leqslant (U_n \wedge c) + (X_n^*)^2,$$

de sorte que la suite $(\bar{U}_n)$ converge en probabilité vers $U \wedge c$. De façon analogue, en utilisant l'inégalité élémentaire $1+x \leqslant e^x$, on trouve

$$\begin{aligned} |\tilde{L}_n(t)| &\leqslant \Big(\prod_{j<J_n}(1+|tX_{n,j}|)\Big)(1+|t|X_n^*) \\ &\leqslant \Big(\exp\Big[t^2\sum_{j<J_n}X_{n,j}^2\Big]\Big)^{1/2}(1+|t|X_n^*) \\ &\leqslant (\exp(t^2c))^{1/2}(1+|t|X_n^*). \end{aligned}$$

On voit donc que les variables aléatoires $|\tilde{L}_n(t)|$ sont uniformément intégrables. Il en résulte, grâce à la partie du théorème déjà démontrée, que la suite $(\tilde{S}_n)$ converge de façon $\mathcal{U}$-stable vers le noyau gaussien $\mathcal{N}(0, U \wedge c)$.

D'autre part, l'inclusion $\{\tilde{S}_n \neq S_n\} \subset \{U_n > c\}$ entraîne

$$\limsup_n P\{\tilde{S}_n \neq S_n\} \leqslant \limsup_n P\{U_n \geqslant c\} \leqslant P\{U \geqslant c\}$$

(où la dernière inégalité est due au fait que (U_n) converge en loi vers U). Pour achever la démonstration, il ne reste plus qu'à faire tendre c vers l'infini.

Le corollaire suivant concerne le cas particulier où les tribus $\mathcal{F}_{n,j}$ sont «emboîtées» (*nested*, en anglais).

(3.3) Corollaire: *Avec les mêmes hypothèses que dans le théorème précédent, on suppose que la suite double $(\mathcal{F}_{n,j})$ soit croissante aussi par rapport au premier indice.*

La suite (S_n) converge alors vers le noyau $\mathcal{N}(0, U)$ de façon stable au sens strict.

Démonstration: Pour tout j, l'algèbre $\mathcal{H}_j$ coïncide avec $\bigcup_n \mathcal{F}_{n,j}$. Par conséquent, la tribu $\mathcal{U}$ contient chacune des tribus $\mathcal{F}_{n,j}$, de sorte qu'elle rend mesurable chacune des variables aléatoires S_n. La conclusion résulte donc du théorème précédent et de (1.4).

Le corollaire précédent contient comme cas particulier le Théorème 3.2 de [4], dont l'énoncé comporte l'hypothèse supplémentaire

$$\sup_n E[(X_n^*)^2] < \infty.$$

L'exemple suivant montre que, dans l'énoncé de (3.1), la convergence de (X_n^*) vers 0 dans L^1 ne peut pas être remplacée par la convergence en probabilité de (X_n^*) vers 0, même si on ajoute la condition

$$\sup_n E\Big[\sum_j |X_{n,j}|\Big] < \infty \tag{3.4}$$

et l'indépendance, pour tout n, de la suite finie $(X_{n,j})_{1 \leqslant j \leqslant k_n}$.

(3.5) Exemple: Considérons, pour tout entier $n \geqslant 1$, une suite finie $(X_{n,j})_{1\leqslant j\leqslant n}$ (de longueur n) de variables aléatoires réelles indépendantes, ayant une même loi centrée, avec

$$P\{X_{n,1} \geqslant 0\} = P\{X_{n,1} = 1/n\} = (1 - 1/n)^{1/n},$$

et désignons par $(\mathcal{F}_{n,j})_{1 \leqslant j \leqslant n}$ la filtration naturelle correspondante.

La condition (3.4) est alors remplie, grâce à la relation

$$E\left[\sum_{j=1}^{n} |X_{n,j}|\right] = 2nE[X_{n,1}^{+}] = 2(1 - 1/n)^{1/n}.$$

En outre, si l'on pose $A_n = \bigcap_{j=1}^{n} \{X_{n,j} = 1/n\}$, on a

$$P(A_n) = 1 - 1/n, \qquad A_n \subset \{X_n^* = 1/n, U_n = 1/n, S_n = 1\}.$$

Par conséquent, les suites (X_n^*), (U_n) convergent en probabilité vers 0, tandis que la suite (S_n) converge en probabilité vers 1.

L'exemple suivant montre que si l'on supprime dans (3.1) l'hypothèse de mesurabilité de U par rapport à $\mathcal{U}$, on ne peut plus assurer que la suite (S_n) converge en loi vers $P\mathcal{N}(0, U)$ (transformée de P par le noyau $\mathcal{N}(0, U)$).

(3.6) Exemple (cf. [4, p. 69]): Étant donné, sur l'espace $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, un processus de Wiener W, désignons par $\mathcal{G}$ sa filtration naturelle et par V la martingale de carré intégrable obtenue en arrêtant W au temps d'arrêt U qui vaut $1/2$ sur $\{W_{1/2} > 0\}$ et 1 ailleurs. Posons

$$\mathcal{F}_{n,j} = \mathcal{G}_{j/n} \text{ pour } 0 \leqslant j \leqslant n, \qquad X_{n,j} = V_{j/n} - V_{(j-1)/n} \text{ pour } 1 \leqslant j \leqslant n,$$

et adoptons les notations de (3.1). La suite finie $(X_{n,j})_{1 \leqslant j \leqslant n}$ est alors une suite centrée par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_{n,j})_{0 \leqslant j \leqslant n}$. Puisque les trajectoires du processus V sont continues, la suite (X_n^*) converge partout vers 0. En outre, elle est dominée dans L^2, grâce à la majoration

$$X_n^* \leqslant 2 \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} |V_t|.$$

Enfin, la suite (U_n) converge en probabilité vers la variable aléatoire

$$[V, V]_1 = [W, W]_U = U.$$

D'autre part, chacune des sommes S_n coïncide avec la variable aléatoire $V_1 = W_U$, dont la loi est distincte de $P\mathcal{N}(0, U)$. Il résulte donc de (3.1) que la tribu $\mathcal{U}$ ne rend pas mesurable la variable aléatoire U. On a, en fait, un résultat plus précis: la tribu $\mathcal{U}$ est dégénérée. En effet, chacune des algèbres $\mathcal{H}_j$ coïncide avec la tribu $\mathcal{G}_{0+}$, et celle-ci est dégénérée à cause de la loi 0-1 de Blumenthal.

L'exemple suivant montre enfin que les hypothèses de (3.1) n'entraînent pas forcément la condition (3.2).

(3.7) Exemple: Étant donné un nombre réel α, strictement compris entre 1 et 2, posons $\delta_{n,j} = 2^{-j} n^{-\alpha}$, et considérons, sur l'intervalle $]0, 1]$ (muni de la tribu borélienne et de la restriction de la mesure de Lebesgue), la famille triangulaire $(X_{n,j})_{n \geq 1,\, 1 \leq j \leq 2}$ definie par

$$X_{n,j} = n \sum_{h=1}^{2^j} (-1)^h J_{n,j,h},$$

où $J_{n,j,h}$ désigne la fonction indicatrice de l'intervalle $](h-1)\delta_{n,j}, h\delta_{n,j}]$. Pour tout n, le couple de variables aléatoires $(X_{n,j})_{1 \leq j \leq 2}$ est une suite centrée par rapport à sa propre filtration naturelle, et l'on a

$$X_n^* = nI_{]0,n^{-a}]}, \qquad E[X_n^*] = n^{1-a}.$$

Grâce à ces relations, la suite (X_n^*) converge dans L^1, et presque sûrement, vers 0. En outre, puisque U_n est nulle sur $]n^{-a}, 1]$, la suite (U_n) converge presque sûrement vers 0. Enfin on a

$$|L_n(t)| = (1 + t^2 n^2) I_{]0,n^{-a}]} + I_{]n^{-a},1]}, \qquad E[|L_n(t)|] = t^2 n^{2-a} + 1,$$

donc $\sup_n E[|L_n(t)|] = \infty$ pour $t \neq 0$, de sorte que la condition (3.2) n'est pas remplie.

BIBLIOGRAPHIE

[1] D. J. Aldous - G. K. Eagleson, *On mixing and stability of limit theorems*, Ann. Prob., 6 (1978), 325-331.

[2] S. D. Chatterji, *A subsequence principle in probability theory: the central limit theorem*, Adv. in Math., 13 (1974), 31-54.

[3] P. Hall, *Martingale invariance principles*, Ann. Prob., 5 (1977), 875-887.

[4] P. Hall - C. C. Heyde, *Martingale Limit Theory and its Application*, Academic Press (1980).

[5] J. Jacod - J. Memin, *Sur un type de convergence intermédiaire entre la convergence en loi et la convergence en probabilité*, Sém. de Prob. XV (1981), Lecture Notes in Math., 850, Springer, 529-546.

[6] G. Letta, *Convergence stable et applications*, in *Conferenze in onore di Calogero Vinti*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena (à paraître).

[7] M. Mancino - L. Pratelli, *Convergence stable vers un noyau gaussien pour des sommes centrées de variables aléatoires échangeables*, à paraître.

[8] D. L. McLeish, *Dependent central limit theorems and invariance principles*, Ann. Probab., 2 (1974), 620-628.

[9] J. Neveu, *Bases mathématiques du calcul des probabilités*, Masson (1964).

[10] H. Rootzén, *A note on convergence to mixtures of normal distributions*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete, 38 (1977), 211-216.