Rendiconti
Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL
*Memorie di Matematica*
112° (1994), Vol. XVIII, fasc. 1, pagg. 103-115

GUIDO CORTESANI (*)

# Un nuovo risultato di biforcazione globale per le soluzioni di una disequazione variazionale (**)

SUNTO. — Viene generalizzato al caso non-lineare un risultato di C. Saccon riguardante la biforcazione delle soluzioni di una disequazione variazionale dagli autovalori di molteplicità dispari del problema asintotico ad essa associato.

## A New Global Bifurcation Result for the Solutions of a Variational Inequality

SUMMARY. — In the present Note we generalize to the non-linear case a previous result by C. Saccon regarding the bifurcation of solutions of a variational inequality from the odd-multiplicity eigenvalues of the related asymptotic problem.

### 1. - INTRODUZIONE

Sia V uno spazio di Hilbert con norma $\|\cdot\|_V$, $J\colon V \to V'$ il corrispondente operatore di Riesz; assegnati un sottoinsieme chiuso e convesso C di V, tale che $0 \in C$, ed un operatore $A\colon V \to V'$ tale da aversi

$$A - \alpha J \geqslant 0\,(^1)$$

(*) Indirizzo dell'Autore: SISSA/ISAS, Via Beirut n. 2/4, 34014 Trieste.
(**) Memoria presentata il 19 settembre 1994 da Claudio Baiocchi, Socio dell'Accademia.
(1) Con una scrittura del tipo «$M \geqslant 0$» intendiamo dire che l'operatore $M$ è monotòno.

per qualche $\alpha > 0$, ci interessa considerare il problema

$$(1) \qquad \begin{cases} {}_{V}\langle Au, u - v\rangle_{V} \leq {}_{V}\langle \lambda Lu + P(u, \lambda), u - v\rangle_{V}, & \forall v \in C, \\ (u, \lambda) \in C \times \mathbf{R}, \end{cases}$$

dove $P: V \times \mathbf{R} \to V'$ ed $L \in \mathcal{L}(V, V')$. Se ci poniamo nelle ipotesi

$$A0 = 0; \qquad P(0, \lambda) = 0, \quad \forall \lambda \in \mathbf{R},$$

le coppie del tipo $(0, \lambda)$ sono soluzioni di (1) («soluzioni banali»). Ciò rende significativa la seguente:

Definizione 1: $\lambda \in \mathbf{R}$ si dice essere un «valore di biforcazione» per il problema (1) se $\exists \{(u_n, \lambda_n)\}_{n \in N} \subseteq C \times \mathbf{R}$ tale che $(u_n, \lambda_n)$ risolve (1), $u_n \neq 0$ e $(u_n, \lambda_n) \to \to (0, \lambda)$.

In altre parole, sono valori di biforcazione per (1) quei $\lambda \in \mathbf{R}$ per i quali $(0, \lambda)$ è punto di accumulazione di soluzioni non-banali del problema in esame.

La ricerca dei valori di biforcazione di (1) è questione piuttosto delicata, tanto che, se supponiamo l'operatore $A$ differenziabile secondo Fréchet nel punto $0 \in V$, essa si può eseguire più agevolmente passando attraverso un nuovo problema, il cosiddetto «problema asintotico». Per illustrare in che modo tale problema si costruisca a partire da (1) abbiamo bisogno di introdurre alcune notazioni: definiamo, $\forall \sigma \in (0, 1]$,

$$C_\sigma := \frac{1}{\sigma} C = \{u \in V \mid \sigma u \in C\},$$

e, per $\sigma = 0$:

$$C_0 := \overline{\bigcup_{\sigma \in (0, 1]} C_\sigma}.$$

Si verifica immediatamente la validità delle seguenti affermazioni:

1) $C_\sigma$ è chiuso e convesso $\forall \sigma \in [0, 1]$;

2) $C_0$ è un cono;

3) $\forall \sigma_1, \sigma_2 \in [0, 1]$ si ha

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \Rightarrow C_{\sigma_1} \subseteq C_{\sigma_2};$$

4) $\forall \sigma \in [0, 1)$ si ha

$$C_\sigma := \overline{\bigcup_{\rho \in (\sigma, 1]} C_\rho};$$

5) se $\sigma_n \to \sigma$ [2] allora gli insiemi $C_{\sigma_n}$ convergono verso $C_\sigma$ nel senso di Kuratowsky per la topologia forte di V, e cioè:

*a)* $u_n \in C_{\sigma_n}\ \forall n \in N,\ u_n \to u \Rightarrow u \in C_\sigma$;
*b)* $(\forall u \in C_\sigma)(\exists \{u_n\}_{n\in N}) | u_n \in C_{\sigma_n}\ \forall n \in N,\ u_n \to u$.

Ciò premesso, il problema asintotico associato ad (1) è il seguente:

$$(2)\qquad \begin{cases} {}_{V'}(A'(0)u, u - v)_V \leq {}_{V'}(\lambda L u, u - v)_V \qquad \forall v \in C_0\,, \\ (u, \lambda) \in C_0 \times R\,. \end{cases}$$

Definizione 2: Diremo che $\lambda \in R$ è un autovalore di (2) se tra le soluzioni di tale problema ne esiste una del tipo $(u, \lambda)$ con $u \neq 0$.

Scopo del presente scritto è dunque quello di fornire, attraverso l'indagine dei legami intercorrenti tra i problemi (1) e (2), e sotto ipotesi il più possibile generali su $A$ e C, un teorema di esistenza di valori di biforcazione per (1), ottenendo, in pari tempo, informazioni sull'andamento dei corrispondenti rami di biforcazione uscenti dalla linea delle soluzioni banali.

La dimostrazione del teorema di esistenza che otterremo è basata essenzialmente sulla nozione di grado di Leray-Schauder di un operatore [3], di cui si è già servito C. Saccon (cfr. [7]) in un caso particolare di quello trattato in questa sede; in effetti, ciò che faremo qui è dimostrare che alcuni lemmi usati da Saccon restano validi anche partendo da ipotesi più deboli, dopodiché, procedendo esattamente come in [7], si arriva al teorema di esistenza. Per questo motivo, eviteremo, nel seguito, di ripetere qui quelle dimostrazioni che restano invariate nel compiere questa generalizzazione (con l'eccezione di quella del Teor. 8), rimandando direttamente il lettore all'articolo di Saccon per maggiori dettagli.

Concludiamo questa introduzione con un esempio concreto al quale si possono ap-

[2] Per evitare noiose ripetizioni, conveniamo di utilizzare, in tutto il presente scritto, le seguenti notazioni:

$\{\sigma_n\}_{n\in N}$ = successione di numeri reali contenuta in $[0, 1]$;

$\{\lambda_n\}_{n\in N}$ = successione di numeri reali qualsiasi;

$\{u_n\}_{n\in N}, \{v_n\}_{n\in N}$ = successioni di vettori in V;

$\{f_n\}_{n\in N}$ = successione di funzionali in V'.

L'eventuale convergenza, forte (denotata con il simbolo $\to$) o debole (denotata con il simbolo $\rightharpoonup$) secondo il caso, delle successioni indicate si intende quindi riferita alla corrispondente topologia dei relativi spazi di appartenenza.

[3] In proposito, cfr. [1], [4], [5], [6].

plicare i risultati contenuti in questo scritto: si tratta della ricerca dei valori di biforcazione per il «problema dei due ostacoli» in $H_0^1$:

$$\begin{cases} {}_{V'}\langle Au, u - v\rangle_V \leq \displaystyle\int_\Omega (\lambda u + g(x, u, \lambda))(u - v)\,dx\,, & \forall v \in K\,, \\ (u, \lambda) \in K \times R\,, \end{cases}$$

dove $\Omega$ è un sottoinsieme aperto limitato di $R^N$ $(N \geq 2)$, $V := H_0^1(\Omega)$, $A$ è un operatore verificante le ipotesi già dette e $g : \Omega \times R^2 \to R$ è un'opportuna funzione di Carathéodory, verificante le ipotesi presenti nel lavoro di Saccon. Il convesso $K$ è definito dalle relazioni

$$\{u \in V \,|\, \varphi_1 \leq u \leq \varphi_2 \text{ su E nel senso di } H^1\}\,,$$

essendo E un sottoinsieme chiuso di $\bar{\Omega}$ e $\varphi_1 : \Omega \to [-\infty, 0]$, $\varphi_2 : \Omega \to [0, +\infty]$ funzioni misurabili tali da aversi

$$\varphi_1 \geq 0 \quad \text{su E}\,, \quad \varphi_1(x) < 0\,, \quad \forall x \in \Omega \backslash E\,,$$

$$\varphi_2 \leq 0 \quad \text{su E}\,, \quad \varphi_2(x) > 0\,, \quad \forall x \in \Omega \backslash E\,,$$

nel senso di $H^1$.

Segnaliamo che, se $A$ è un operatore differenziale lineare del secondo ordine fortemente ellittico, si tratta dello stesso problema risolto da Saccon nel già citato articolo [7].

## 2. - Le ipotesi su $A$, $P$ ed $L$

Enunciamo ora le ipotesi sugli operatori $A$, $P$ ed $L$ sotto le quali lavoreremo da adesso in poi.

Supporremo verificate dall'operatore $A$ le quattro ipotesi seguenti:

i) $A$ è continuo tra V e V' (per le relative topologie forti);

ii) $A0 = 0$;

iii) $A$ è differenziabile secondo Fréchet nel punto $0 \in V$;

iv) $A$ è «fortemente monotòno», cioè

$$(\exists \alpha > 0)(\forall u, v \in V)\ {}_{V'}\langle Au - Av, u - v\rangle_V \geq \alpha \|u - v\|_V^2\,.$$

La condizione iv) equivale, come è noto, all'essere

$$A - \alpha J \geq 0$$

per qualche $\alpha > 0$, dove $J$ indica l'operatore di Riesz relativo allo spazio V.

È opportuno ricordare che, se $B\colon V \to V'$ è un operatore verificante le ipotesi i) e iv), vale per esso il seguente teorema di esistenza ed unicità:

TEOREMA 4: Se $K \subseteq V$ è convesso, chiuso e non vuoto, e se $f \in V'$, il problema

$$\left\{\begin{array}{ll} {}_{V'}\langle Bu, u - v\rangle_V \leq {}_{V'}\langle f, u - v\rangle_V & \forall v \in K\,, \\ u \in K \end{array}\right. \tag{3}$$

ammette una ed una sola soluzione; inoltre, (3) equivale al problema

$$\left\{\begin{array}{ll} {}_{V'}\langle Bv, v - u\rangle_V \geq {}_{V'}\langle f, v - u\rangle_V & \forall v \in K\,, \\ u \in K\,, \end{array}\right. \tag{4}$$

detto «formulazione alla Minty» di (3).

DIM.: Fissato $v_0 \in K$, la condizione iv) implica che (se K è illimitato)

$$\lim_{\substack{\|u\|_V \to +\infty \\ u \in K}} \frac{{}_{V'}\langle Bu - Bv_0, u - v_0\rangle_V}{\|u - v_0\|_V} \geq \alpha \lim_{\substack{\|u\|_V \to +\infty \\ u \in K}} \|u - v_0\|_V = +\infty\,,$$

per cui l'esistenza di soluzioni, la loro unicità e l'equivalenza tra (3) e (4) si conseguono mediante risultati di tipo classico (cfr. ad es. [2]).

Poniamo ora, $\forall \sigma \in [0, 1]$ e $\forall u \in V$:

$$A_\sigma u := \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{1}{\sigma} A(\sigma u) & \text{se } \sigma \neq 0\,; \\ A'(0)u & \text{se } \sigma = 0\,; \end{array}\right. \tag{5}$$

è immediato constatare che, per $\sigma > 0$, ciascuno degli operatori $A_\sigma$ verifica le ipotesi i), ii), iii) e iv) (quest'ultima è verificata da tutti gli $A_\sigma$ con la stessa costante $\alpha$); usando il prossimo Lemma 5, poi, si verifica facilmente che le stesse ipotesi sono soddisfatte anche da $A_0$.

LEMMA 5: Supponiamo che $\sigma_n \to \sigma$, $u_n \to u$; allora:

$$A_{\sigma_n} u_n \to A_\sigma u\,. \tag{6}$$

DIM.: Se $\sigma > 0$, la cosa è ovvia, perché

$$A_{\sigma_n} u_n = \frac{1}{\sigma_n} A(\sigma_n u_n) \to \frac{1}{\sigma} A(\sigma u) = A_\sigma u\,,$$

visto che $A$ è continuo. Se invece $\sigma = 0$, abbiamo $A_\sigma u = A'(0)u$, e quindi

$$(7) \qquad \|A_{\sigma_n} u_n - A'(0)u\|_{V'} \leq \|A_{\sigma_n} u_n - A'(0)u_n\|_{V'} + \|A'(0)u_n - A'(0)u\|_{V'} ,$$

con $\|A'(0)u_n - A'(0)u\|_{V'} \to 0$ perché $A'(0) \in \mathcal{L}(V, V')$. Scegliamo ora ad arbitrio $\varepsilon > 0$; dato n in modo che $\sigma_n \neq 0$, $u_n \neq 0$, si ha

$$\|A_{\sigma_n} u_n - A'(0)u_n\|_{V'} = \left\| \frac{A(\sigma_n u_n) - A'(0)(\sigma_n u_n)}{\sigma_n} \right\|_{V'} =$$

$$= \frac{\|A(\sigma_n u_n) - A'(0)(\sigma_n u_n)\|_{V'}}{\|\sigma_n u_n\|_V} \cdot \|u_n\|_V \leq \frac{\|A(\sigma_n u_n) - A'(0)(\sigma_n u_n)\|_{V'}}{\|\sigma_n u_n\|_V} \cdot c ,$$

visto che la successione $\{u_n\}_{n \in N}$, convergendo, è limitata. Poiché $\sigma_n u_n \to 0$ ed $A$ è differenziabile in 0, ne segue che

$$(\exists n_\varepsilon \in N)(\forall n > n_\varepsilon \mid \sigma_n \neq 0, u_n \neq 0) \|A_{\sigma_n} u_n - A'(0)u_n\|_{V'} < \varepsilon .$$

D'altra parte, se $n > n_\varepsilon$ è tale che $\sigma_n = 0$ oppure $\sigma_n \neq 0$, $u_n = 0$, si ha addirittura $\|A_{\sigma_n} u_n - A'(0)u_n\|_{V'} = 0$, e quindi questa quantità è comunque minore di $\varepsilon$. In conclusione, $\|A_{\sigma_n} u_n - A'(0)u_n\|_{V'} \to 0$, e ciò, in virtù della (7), implica la (6), c.d.d.

Per quanto riguarda $P$, poniamo, $\forall \sigma \in [0, 1]$, $\forall u \in V$ e $\forall \lambda \in R$:

$$P_\sigma(u, \lambda) := \begin{cases} \dfrac{1}{\sigma} P(\sigma u, \lambda) & \text{se } \sigma \neq 0 ; \\ 0 & \text{se } \sigma = 0 ; \end{cases}$$

chiederemo allora che si abbia:

$$(8) \qquad \left.\begin{array}{r} \sigma_n \to \sigma \\ u_n \xrightarrow{w} u \\ \lambda_n \to \lambda \end{array}\right\} \Rightarrow P_{\sigma_{n_k}}(u_{n_k}, \lambda_{n_k}) \to P_\sigma(u, \lambda)$$

con scelta opportuna della successione crescente di indici $\{n_k\}_{k \in N}$ [4]. In particolare, per $\sigma_n := 1/n$, $u_n \equiv 0$, $\lambda_n \equiv \lambda$, la (8) implica che

$$P(0, \lambda) = 0 , \qquad \forall \lambda \in R .$$

Infine, chiederemo che l'operatore $L \in \mathcal{L}(V, V')$ sia compatto.

[4] Questa condizione è soddisfatta, ad esempio, se l'operatore P è completamente continuo, ed inoltre

$$\lim_{\|u\|_V \to 0} \frac{P(u, \lambda)}{\|u\|_V} = 0$$

uniformemente per $\lambda$ limitato.

## 3. - Un risultato di compattezza

Indichiamo con $S_0$ l'insieme di tutte le soluzioni $(u, \lambda)$ del problema (1); allora $S_0$ è localmente compatto, cioè da ogni successione limitata $\{(u_n, \lambda_n)\}_{n\in N} \subseteq S_0$ se ne può estrarre una convergente verso un elemento di $S_0$. In effetti, le ipotesi da noi formulate nel paragrafo precedente assicurano che dalla successione assegnata se ne può estrarre una con le proprietà seguenti:

$$\lambda_{n_k} \to \lambda \in R ; \qquad u_{n_k} \overset{w}{\to} u \in C ; \qquad \lambda_{n_k} L u_{n_k} + P(u_{n_k}, \lambda_{n_k}) \to \lambda L u + P(u, \lambda) .$$

Se poniamo

$$f_k := \lambda_{n_k} L u_{n_k} + P(u_{n_k}, \lambda_{n_k}) ; \qquad f := \lambda L u + P(u, \lambda) ,$$

abbiamo che

$${}_{V'}\langle Av - f_k, v - u_{n_k} \rangle_V \geq 0 , \qquad \forall v \in C ,$$

(formulazione alla Minty di (1)) e quindi, passando al limite per $k \to +\infty$, otteniamo che $(u, \lambda)$ risolve il problema

$${}_{V'}\langle Av - f, u - v \rangle_V \leq 0 , \qquad \forall v \in C$$

nella sua formulazione alla Minty. Ma allora, si ha

$${}_{V'}\langle Au, u - u_{n_k} \rangle_V \leq {}_{V'}\langle f, u - u_{n_k} \rangle_V ;$$

$${}_{V'}\langle Au_{n_k}, u_{n_k} - u \rangle_V \leq {}_{V'}\langle f_k, u_{n_k} - u \rangle_V ,$$

da cui, sfruttando la forte monotonia di $A$,

$$\alpha \| u_{n_k} - u \|_V^2 \leq {}_{V'}\langle f - f_k, u - u_{n_k} \rangle_V \leq c \| f - f_k \|_{V'} \to 0 .$$

Dunque $u_{n_k} \to u$, c.d.d.

## 4. - Un lemma preliminare

In questo paragrafo studiamo il comportamento delle soluzioni del problema

$$(9_{\sigma,f}) \qquad \begin{cases} {}_{V'}\langle A_\sigma u, u - v \rangle_V \leq {}_{V'}\langle f, u - v \rangle_V & \forall v \in C_\sigma , \\ u \in C_\sigma , \end{cases}$$

al variare di $\sigma \in [0, 1]$ ed $f \in V'$.

Lemma 6: $\forall \sigma \in [0, 1]$, $\forall f \in V'$, il problema $(9_{\sigma,f})$ possiede una ed una sola soluzione; inoltre, se $\sigma_n \to \sigma$, $f_n \to f$, allora la successione delle soluzioni di $(9_{\sigma_n, f_n})$ converge fortemente verso la soluzione di $(9_{\sigma,f})$.

Dim.: Esistenza ed unicità della soluzione per $(9_{\sigma,f})$ seguono immediatamente dal Teor. 4. Dette poi $u_n$ la soluzione di $(9_{\sigma_n,f_n})$ ed $u$ la soluzione di $(9_{\sigma,f})$, dimostriamo che $u_n \to u$ procedendo in quattro passi.

1° Passo: La $\{u_n\}_{n \in N}$ è limitata.

Sappiamo che

$$ {}_{V'}\langle A_{\sigma_n} u_n, u_n - v\rangle_V \leq {}_{V'}\langle f_n, u_n - v\rangle_V, \qquad \forall v \in C_{\sigma_n}; $$

prendendo $v = 0$, tenendo presente che $A0 = 0$, e sfruttando la forte monotonia di $A$, ne segue che

$$ \alpha \|u_n\|_V^2 \leq {}_{V'}\langle A_{\sigma_n} u_n, u_n\rangle_V \leq {}_{V'}\langle f_n, u_n\rangle_V \leq \|f_n\|_{V'} \cdot \|u_n\|_V, $$

da cui

$$ \|u_n\|_V \leq \frac{1}{\alpha} \|f_n\|_{V'} \leq c, $$

perché la successione $\{f_n\}_{n \in N}$, convergendo, è limitata.

2° Passo: $\{u_n\}_{n \in N}$ ammette un'estratta debolmente convergente verso $u$.

Dalla successione limitata $\{u_n\}_{n \in N}$ estraiamo una sottosuccessione $\{u_{n_k}\}_{k \in N}$ debolmente convergente verso un elemento $w \in C_\sigma$ (5), e facciamo vedere che $w = u$. Per questo, scriviamo la formulazione alla Minty del problema $(9_{\sigma_{n_k}, f_{n_k}})$:

$$ {}_{V'}\langle A_{\sigma_{n_k}} v, v - u_{n_k}\rangle_V \geq {}_{V'}\langle f_{n_k}, v - u_{n_k}\rangle_V, \qquad \forall v \in C_{\sigma_{n_k}}; $$

ora, sappiamo che $C_\sigma := \overline{\bigcup_{\rho \in (\sigma, 1]} C_\rho}$ (6); se $v \in \bigcup_{\rho \in (\sigma, 1]} C_\rho$, allora si ha

$$ v \in C_{\sigma_{n_k}} \tag{10} $$

per $k$ abbastanza grande, e quindi

$$ {}_{V'}\langle A_\sigma v, v - w\rangle_V = \lim_{k \to +\infty} {}_{V'}\langle A_{\sigma_{n_k}} v, v - u_{n_k}\rangle_V \geq $$

$$ \geq \lim_{k \to +\infty} {}_{V'}\langle f_{n_k}, v - u_{n_k}\rangle_V = {}_{V'}\langle f, v - w\rangle_V; $$

(5) Che $w \in C_\sigma$ lo si deduce, con semplici ragionamenti, dal fatto che $\sigma_{n_k} \to \sigma$ e dalle proprietà degli insiemi $C_\rho$.

(6) Ciò è vero per $\sigma \neq 1$; ma se $\sigma = 1$, la successiva formula (10) è comunque vera $\forall k \in N$ e $\forall v \in C_1 = C$.

dato dunque il generico $v \in C_\varepsilon$, approssimiamolo fortemente con una successione $\{v_n\}_{n\in N} \subseteq \bigcup_{\rho\in(\varepsilon,1]} C_\rho$; otteniamo in tal modo che

$$_{V'}\langle A_\varepsilon v, v - w\rangle_V = \lim_{n\to+\infty} {_{V'}\langle A_\varepsilon v_n, v_n - w\rangle_V} \geq \lim_{k\to+\infty} {_{V'}\langle f, v_n - w\rangle_V} = {_{V'}\langle f, v - w\rangle_V},$$

e quindi w verifica la formulazione alla Minty di $(9_{\varepsilon,f})$; pertanto $w = u$, c.d.d.

3° Passo: si ha $u_n \xrightarrow{w} u$.

Se, per assurdo, non fosse così, esisterebbero un'estratta $\{u_{n_k}\}_{k\in N}$ della $\{u_n\}_{n\in N}$ ed un intorno debole $\mathfrak{I}$ di $u$ tali che

$$u_{n_k} \notin \mathfrak{I}, \quad \forall k \in N. \tag{11}$$

D'altra parte, procedendo esattamente come nel 2° passo, è facile verificare che la $\{u_{n_k}\}_{k\in N}$ possiede a sua volta un'estratta debolmente convergente verso $u$, e ciò, in considerazione della (11), è assurdo.

4° Passo: si ha $u_n \to u$.

Approssimiamo fortemente u con una successione $\{v_n\}_{n\in N}$ tale che $v_n \in C_{\varepsilon_n}$; si ha allora

$$_{V'}\langle A_{\varepsilon_n} u_n, u_n - v_n\rangle_V \leq {_{V'}\langle f_n, u_n - v_n\rangle_V},$$

ed ancora, aggiungendo $_{V'}\langle A_{\varepsilon_n} v_n, v_n - u_n\rangle_V$ ad ambo i membri, e sfruttando la forte monotonia di $A_{\varepsilon_n}$:

$$\alpha\|u_n - v_n\|_V^2 \leq {_{V'}\langle f_n, u_n - v_n\rangle_V} + {_{V'}\langle A_{\varepsilon_n} v_n, v_n - u_n\rangle_V}. \tag{12}$$

Ora,

$$\left.\begin{array}{l} f_n \to f \\ u_n - v_n \xrightarrow{w} 0 \end{array}\right\} \Rightarrow {_{V'}\langle f_n, u_n - v_n\rangle_V} \to 0,$$

e, per il Lemma 5,

$$_{V'}\langle A_{\varepsilon_n} v_n, v_n - u_n\rangle_V \to {_{V'}\langle A_\varepsilon u, 0\rangle_V} = 0;$$

ma allora la (12) implica che

$$\|u_n - v_n\|_V \to 0,$$

ovvero, essendo $v_n \to u$, che

$$u_n \to u,$$

c.d.d.

## 5. - Un primo teorema sui valori di biforcazione

Dato $\sigma \in [0, 1]$, indichiamo con $(13_\sigma)$ il seguente problema:

$$(13_\sigma) \qquad \begin{cases} {}_{V'}\langle A_\sigma u, u - v\rangle_V \leq {}_{V'}\langle \lambda Lu + P_\sigma(u, \lambda), u - v\rangle_V \quad \forall v \in C_\sigma\,; \\ (u, \lambda) \in C_\sigma \times \boldsymbol{R}\,; \end{cases}$$

costruiamo inoltre l'operatore $T_\sigma \colon V' \to C_\sigma$ al modo seguente:

$$T_\sigma f := u_{\sigma, f} \qquad \forall f \in V',$$

dove $u_{\sigma, f}$ è l'unica soluzione di $(9_{\sigma, f})$. Poniamo infine, $\forall \lambda \in \boldsymbol{R}$,

$$M_{\sigma, \lambda} := T_\sigma \circ (\lambda L + P_\sigma(\cdot, \lambda)) \colon V \to V_\sigma\,.$$

È ovvio che $(u, \lambda)$ risolve $(13_\sigma)$ se e soltanto se $u = M_{\sigma, \lambda} u$; in altre parole, risolvere $(13_\sigma)$ equivale a ricercare i punti fissi degli operatori $M_{\sigma, \lambda}$.

Lemma 7: se $\{u_n\}_{n \in N} \subseteq V$ è una successione limitata, $\sigma_n \to \sigma$ e $\lambda_n \to \lambda$, allora esiste una successione crescente di indici $\{n_k\}_{k \in N}$ tale che $u_{n_k} \xrightarrow{w} u \in V$, ed inoltre $M_{\sigma_{n_k}, \lambda_{n_k}} u_{n_k} \to M_{\sigma, \lambda} u$; in particolare, tutti gli operatori $M_{\sigma, \lambda}$ sono compatti.

Dim.: Per le ipotesi nelle quali ci siamo posti, possiamo certamente fare in modo che sia

$$u_{n_k} \xrightarrow{w} u \in V\,;$$

$$f_k := \lambda_{n_k} L u_{n_k} + P(u_{n_k}, \lambda_{n_k}) \to f := \lambda Lu + P(u, \lambda)\,;$$

in virtù del Lemma 6, applicato alle successioni convergenti $\{\sigma_{n_k}\}_{k \in N}$, $\{f_k\}_{k \in N}$, otteniamo dunque che

$$M_{\sigma_{n_k}, \lambda_{n_k}} u_{n_k} \to M_{\sigma, \lambda} u\,,$$

che è la nostra tesi.

Teorema 8: Ogni valore di biforcazione di (1) è un autovalore di (2).

Dim.: La dimostrazione è identica a quella del Teor. 3 di [7], ma la riportiamo per motivi di completezza.

Sia $\{(u_n, \lambda_n)\}_{n \in N}$ una successione di soluzioni non-banali di (1) convergente verso $(0, \lambda)$, e poniamo

$$v_n := \frac{u_n}{\|u_n\|_V}\,, \qquad \forall n \in N\,.$$

Si verifica facilmente che $(v_n, \lambda_n)$ risolve $(13_{\sigma_n})$ con $\sigma_n := \|u_n\|_V \to 0$; poiché $\{v_n\}_{n \in N}$ è una successione limitata, il lemma precedente assicura l'esistenza di una sottosuccessione $\{v_{n_k}\}_{k\in N}$ e di un vettore $v \in V$ tali che

$$v_{n_k} \xrightarrow{w} v\,; \qquad M_{\sigma_{n_k},\lambda_{n_k}} v_{n_k} \to M_{\sigma,\lambda} v\,; \tag{14}$$

ma $M_{\sigma_{n_k},\lambda_{n_k}} v_{n_k} = v_{n_k}$ $\forall k \in N$, per cui le (14) implicano che

$$v_{n_k} \to v\,; \qquad v = M_{\sigma,\lambda} v\,.$$

La prima di queste due relazioni ci dice che $v \neq 0$ (si tenga presente che $\|v_{n_k}\|_V = 1$ $\forall k \in N$), ed allora dalla seconda di esse si deduce immediatamente la tesi.

## 6. - Il teorema di biforcazione globale

In questo paragrafo dimostreremo che, formulando su C un'opportuna ipotesi geometrica, alcuni autovalori di (2) sono effettivamente valori di biforcazione per (1).

Assegnati $\sigma \in [0, 1]$, $\lambda \in R$, sia U un sottoinsieme aperto di V; diremo che U è «$(\sigma, \lambda)$-ammissibile» se $M_{\sigma,\lambda}$ non ha punti fissi su $\partial$U. In queste condizioni, ha senso considerare il grado di Leray-Schauder di $I - M_{\sigma,\lambda}$ [7] su U rispetto a 0, che indicheremo con $\mathfrak{d}(\sigma, \lambda, U)$:

$$\mathfrak{d}(\sigma, \lambda, U) := \deg(I - M_{\sigma,\lambda}, U, 0)\,.$$

Indichiamo ora con $\mathcal{B}_\rho(0)$ la sfera aperta di V di centro 0 e raggio $\rho$, e poniamo $\mathcal{B}_\rho^*(0) := \mathcal{B}_\rho(0)\backslash\{0\}$; vale allora, con dimostrazione identica a quella del Lemma 10 di [7], il seguente:

Lemma 9: Supponiamo che $\lambda$ non sia un autovalore di (2); allora $\exists \rho > 0$ tale che, $\forall \sigma \in [0, 1]$ e $\forall u \in \mathcal{B}_\rho^*(0)$, si ha $u \neq M_{\sigma,\lambda} u$. In particolare, $\mathcal{B}_\rho(0)$ è $(\sigma, \lambda)$-ammissibile.

Introduciamo ora su C la seguente ipotesi geometrica:

●) $C_0$ è un sottospazio chiuso di V;

è opportuno osservare che ●) implica che il problema asintotico (2) è equivalente a

$$\begin{cases} {}_{V'}\langle A'(0)u, v\rangle_V = {}_{V'}\langle \lambda L u, v\rangle_V \quad \forall v \in C_0\,; \\ (u, \lambda) \in C_0 \times R\,; \end{cases}$$

è pure ovvio, di conseguenza, che $M_{0,\lambda}$ è un operatore lineare $\forall \lambda \in R$ (del quale ha senso, pertanto, considerare gli autovalori, nel significato usuale del termine), e che

$$M_{0,\lambda} = \lambda M_{0,1}\,, \qquad \forall \lambda \in R\,.$$

[7] Indichiamo con $I$ l'operatore identità su V.

LEMMA 10: 0 non è un autovalore di (2); più in generale, $\mu$ è un autovalore di (2) se e soltanto se $\lambda/\mu$ è un autovalore di $M_{0,\lambda}$ $(\lambda \neq 0)$.

DIM.: Che 0 non sia un autovalore di (2) segue dal fatto che, per la forte monotonia di $A'(0)$, il problema

$$\begin{cases} {}_{V'}\langle A'(0)u, v\rangle_V = 0\,, & \forall v \in C_0\,, \\ u, \lambda \in C_0 \times R\,, \end{cases}$$

non può avere altre soluzioni oltre a quella nulla. La seconda parte della tesi si deduce poi facilmente dalle proprietà degli operatori $M_{0,\lambda}$.

Come conseguenza di questo lemma e del teorema di Leray-Schauder (sulle proprietà omotopiche del grado topologico) si ottiene il seguente :

LEMMA 11: Supponiamo che $\lambda$ non sia un autovalore di (2); allora, per $\rho$ abbastanza piccolo (cfr. lemma 9), si ha

$$\mathfrak{d}(\sigma, \lambda, \mathcal{B}_\rho(0)) = (-1)^k\,, \qquad \forall \sigma \in [0, 1]\,,$$

dove $k$ è la somma delle molteplicità (8) degli autovalori di (2) minori di $\lambda$ se non esistono autovalori siffatti).

DIM.: Identica a quella di [7], Corollario 11.

Infine, si ha l'annunciato teorema di biforcazione globale per le soluzioni del problema (1):

TEOREMA: 12: Sia $\lambda$ un autovalore di (2) con molteplicità dispari; allora l'insieme

$$S := \{(u, \mu) \in C \times R \mid (u, \mu) \text{ risolve } (1), u \neq 0\}$$

formato dalle soluzioni non-banali di (1) contiene una componente connessa, $S'$, tale che $(0, \lambda) \in \overline{S'}$. Inoltre o $S'$ è illimitata, oppure esiste un altro autovalore $\lambda'$ di (2) tale che $(0, \lambda') \in \overline{S'}$.

DIM.: Identica a quella di [7], Teor. 4 (pag. 123).

(8) La molteplicità di un autovalore $\mu$ di (2) è definita come la molteplicità (finita) di $1/\mu$ come autovalore di $M_{0,1}$.

## BIBLIOGRAFIA

[1] H. Amann, *Fixed point equations and nonlinear eigenvalues in ordered Banach spaces*, SIAM Rev., 18 (1986), 620-709.

[2] C. Baiocchi - A. Capelo, *Variational and Quasivariational Inequalities - Their Applications to Free Boundary problems*, Wiley-Interscience, New York (1984) (ed. italiana: Pitagora, Bologna (1978)).

[3] M. Degiovanni, *Bifurcation problems for nonlinear elliptic variational inequalities*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math., 10(2) (1989), 215-258.

[4] K. Geba - P. H. Rabinowitz, *Topological methods in bifurcation theory*, Sém. Math. Sup. (NATO Advanced Study Institute), 91, Montreal (1985).

[5] M. Kucera, *A new method for obtaining eigenvalues of variational inequalities: operators with multiple eigenvalues*, Czechoslovak Math. J., 32 (1982), 197-207.

[6] K. Kucera, *Bifurcation point of variational inequalities*, Czechoslovak Math. J., 32 (1982), 208-226.

[7] C. Saccon, *A global bifurcation result for variational inequalities*, Boll. dell'U.M.I. (1), 7A (1993), 117-124.