Rendiconti
Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL
Memorie di Matematica
110° (1992), Vol. XVI, fasc. 6, pagg. 77-98

DONATO PASSASEO (*)

Esistenza e molteplicità di soluzioni positive per equazioni ellittiche con nonlinearità supercritica in aperti contrattili (**)

Existence and Multiplicity of Positive Solutions for Elliptic Equations with Supercritical Nonlinearity in Contractible Domains

SUMMARY. — We present some existence and multiplicity results of positive solutions of the problem

$$\Delta u + u^{p-1} = 0 \quad \text{in } \Omega, \ u = 0 \text{ on } \partial\Omega$$

where Ω is a bounded domain of $\mathbb{R}^n$ with $n \geq 3$ and $p \geq 2n/(n-2)$. In particular, we show that for each positive integer h and for all $p \geq 2n/(n-2)$ there exists a bounded contractible domain Ω, such that the above problem has at least h different positive solutions.

§ 0. - INTRODUZIONE

In questo lavoro si considera il seguente problema

$$P(\Omega, p)\begin{cases} \Delta u + u^{p-1} = 0 & \text{in } \Omega, \\ u > 0 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega, \end{cases}$$

dove Ω è un aperto limitato regolare di $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 3$ e $p \geq 2n/(n-2)$ ($2n/(n-2)$ è l'esponente critico per l'immersione di Sobolev $H_0^{1,2}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$).

È ben noto che per $p \geq 2n/(n-2)$ l'esistenza di soluzioni del Problema $P(\Omega, p)$ è strettamente legata alla forma di Ω: se per esempio Ω è stellato, $P(\Omega, p)$ non ha soluzioni, come è stato provato da Pohozaev (1965) in [29]; d'altra parte, se Ω è, per esempio, una corona sferica, si trovano soluzioni di $P(\Omega, p)$ per ogni $p \geq 2n/(n-2)$.

Se $p = 2n/(n-2)$, un notevole risultato di Bahri e Coron (vedi [1]) assicura

(*) Indirizzo dell'Autore: Dipartimento di Matematica dell'Università, via Buonarroti 2, 56127 Pisa.

(**) Memoria presentata il 5 febbraio 1992 da Ennio De Giorgi, uno dei XL.

ISSN 0392-4106

l'esistenza di almeno una soluzione, nell'ipotesi che l'aperto Ω abbia topologia non banale (in un senso opportuno).

Il caso $p = 2n/(n-2)$ è stato studiato da vari autori e sono noti diversi risultati che collegano l'esistenza e la molteplicità di soluzioni di $P(\Omega, 2n/(n-2))$ alla forma dell'aperto Ω (vedi [11], [1], [13], [12], [32], [10], [21], [22], [25]).

In [21] si mostra in particolare che per ogni intero positivo h esiste un aperto Ω_h limitato e contrattile (quindi topologicamente banale nel senso di Bahri-Coron [1]) tale che il problema $P(\Omega_h, 2n/(n-2))$ abbia almeno h soluzioni distinte.

Nel caso $p > 2n/(n-2)$ molti problemi sono ancora aperti; alcuni sono discussi in [30], [4], [6]; altri problemi con nonlinearità supercritica sono trattati in [17], [18], [19] e [20].

In particolare, nel caso $p > 2n/(n-2)$ si pone la questione (Rabinowitz) di stabilire quali ipotesi sull'aperto Ω garantiscano l'esistenza di soluzioni di $P(\Omega, p)$, consentendo di ottenere risultati analoghi a quello di Bahri-Coron.

In [27] e [28] provo che l'ipotesi che Ω sia topologicamente non banale nel senso di Bahri-Coron [1] non garantisce l'esistenza di soluzioni di $P(\Omega, p)$ se $p > 2n/(n-2)$: in [27] e [28] si forniscono infatti esempi di aperti Ω omotopi a sfere (e quindi non banali nel senso di Bahri-Coron) tali che $P(\Omega, p)$ non ha soluzione per p abbastanza grande.

Nel presente lavoro mostro, per contro, che per ogni $p > 2n/(n-2)$ esistono aperti limitati contrattili Ω in cui il problema $P(\Omega, p)$ ha soluzione; anzi per ogni intero positivo h si trova un aperto Ω_h limitato e contrattile (lo stesso aperto considerato in [21] per $p = 2n/(n-2)$) in cui $P(\Omega_h, p)$ ha almeno h soluzioni distinte.

Si noti che, nonostante l'evidente analogia tra i risultati ottenuti nel presente lavoro e quelli provati in [21], la natura delle soluzioni è profondamente diversa e i metodi utilizzati completamente differenti (nelle Osservazioni (2.13) e (3.12) si fa un confronto più dettagliato dei risultati e delle tecniche usate nei due lavori).

Il procedimento seguito nel presente lavoro è il seguente: si introducono nel problema $P(\Omega, p)$ degli ostacoli ausiliari, in modo da recuperare le consuete proprietà di compattezza, mancanti per la presenza dell'esponente $p > 2n/(n-2)$; ottenute le soluzioni dei problemi con ostacoli, si prova che queste «si distaccano» dagli ostacoli e risultano quindi soluzioni del problema $P(\Omega, p)$.

I risultati principali presentati in questo lavoro sono i Teoremi (2.2) e (3.2); alcune proprietà qualitative delle soluzioni trovate sono descritte nelle Proposizioni (2.11) e (3.11). Nel paragrafo 1 si richiamano alcune nozioni utilizzate per lo studio dei problemi con ostacolo.

§ 1. - Punti critici vincolati, sottodifferenziale, condizione di non tangenza

In questo paragrafo caratterizziamo le soluzioni del Problema $P(\Omega, p)$ come punti critici di un opportuno funzionale, riportiamo la definizione di sottodifferenziale e ne richiamiamo alcune proprietà che saranno utilizzate nei paragrafi successivi.

Le soluzioni del Problema $P(\Omega, p)$ sono i punti critici u (con $u(x) > 0$ in Ω) del funzionale $F\colon H_0^{1,2}(\Omega)\cap L^p(\Omega)\to R$ così definito:

$$F(u)=\frac{1}{2}\int_\Omega |Du|^2dx-\frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p dx\,.$$

Lo spazio vettoriale $H_0^{1,2}(\Omega)\cap L^p(\Omega)$ si considera munito della norma

$$\|u\|=\left(\int_\Omega |Du|^2dx\right)^{1/2}+\left(\int_\Omega |u|^p dx\right)^{1/p}$$

in modo che il funzionale F risulti di classe C^2 in $H_0^{1,2}(\Omega)\cap L^p(\Omega)$.

È ben noto che i punti critici non banali di F sono, a meno di una costante moltiplicativa, i punti critici del funzionale

$$f(u)=\int_\Omega |Du|^2dx$$

vincolato sulla varietà

$$V=\left\{u\in H_0^{1,2}(\Omega)\colon \int_\Omega |u|^p dx=1\right\}$$

(si noti che V è una variante di classe C^2).

Tuttavia la mancanza di compattezza, dovuta alla presenza dell'esponente $p>$ $>2n/(n-2)$, rende complicata la ricerca dei punti critici di f su V: ad esempio, risulta $\inf_V f=0$ e quindi non esiste il minimo di f su V.

(1.1). Definizione (Sottodifferenziale): Sia X uno spazio vettoriale normato e $\Phi\colon X\to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ una assegnata funzione.

Diciamo dominio di Φ l'insieme

$$D(\Phi)=\{x\in X\colon \Phi(u)<+\infty\}.$$

Per ogni $u\in D(\Phi)$ definiamo differenziale di Φ in u l'insieme $\partial^-\Phi(u)$ degli α di X' (duale di X) tali che

$$\liminf_{v\to u}\frac{\Phi(v)-\Phi(u)-\alpha(v-u)}{\|v-u\|}\geq 0\,.$$

Diciamo che Φ è sottodifferenziabile in u se $\partial^-\Phi(u)\neq\emptyset$.

Diciamo che u è un punto inferiormente stazionario per Φ se $o\in\partial^-\Phi(u)$.

(1.2). Esempi: Si verifica facilmente che, se $X=H_0^{1,2}(\Omega)\cap L^p(\Omega)$ con la norma

$$\|u\|=\left(\int_\Omega |Du|^2dx\right)^{1/2}+\left(\int_\Omega |u|^p dx\right)^{1/p},$$

allora risulta

$$\partial^- F(u) = \{F'(u)\} \quad \text{e} \quad \partial^- f(u) = \{f'(u)\}$$

dove

$$F'(u)[v] = \int_\Omega Du\, Dv\, dx - \int_\Omega |u|^{p-2} uv\, dx \quad \text{e} \quad f'(u)[v] = \int_\Omega Du\, Dv\, dx$$

per ogni $v \in H_0^{1,2}(\Omega) \cap L^p(\Omega)$.

Per ogni sottoinsieme E di X diciamo funzione indicatrice di E la funzione I_E così definita:

$$I_E(u) = 0 \quad \text{se } u \in E, \qquad I_E(u) = +\infty \quad \text{se } u \in X \setminus E.$$

Se $u \in V = \left\{u \in H_0^{1,2}(\Omega): \int_\Omega |u|^p dx = 1\right\}$, allora si può verificare che $\alpha \in \partial^- I_V(u)$ se e solo se esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ per il quale risulti

$$\alpha(v) = \lambda \int_\Omega |u|^{p-2} uv\, dx, \qquad \text{per ogni } v \in H_0^{1,2}(\Omega) \cap L^p(\Omega).$$

Se K è un sottoinsieme convesso di X e $u \in K$, allora $\alpha \in \partial^- I_K(u)$ se e solo se risulta

$$\alpha(v-u) \leq 0, \qquad \text{per ogni } v \in K.$$

(1.3). Osservazione: Si noti che, se Φ e Γ sono due funzioni da X in $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ e se $u \in D(\Phi + \Gamma)$, allora risulta:

$$\partial^- \Phi(u) + \partial^- \Gamma(u) \subseteq \partial^- (\Phi + \Gamma)(u).$$

Semplici esempi mostrano che in generale non vale l'inclusione inversa. Se però la funzione Φ è differenziabile in u, allora si ha

$$\{\Phi'(u)\} + \partial^- \Gamma(u) = \partial^- (\Phi + \Gamma)(u).$$

Se ne deduce in particolare che una funzione $u \in H_0^{1,2}(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ è un punto critico per il funzionale f vincolato sulla varietà V se e solo se $0 \in \partial^- (f + I_V)(u)$.

(1.4). Definizione (Condizione di non tangenza): Sia K un sottoinsieme di $H_0^{1,2}(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ e sia $u \in K \cap V$.

Diciamo che K e V sono non tangenti in u se

$$\partial^- I_K(u) \cap \partial^- I_V(u) = \{0\}.$$

(1.5). Proposizione: *Sia K un sottoinsieme di $H_0^{1,2}(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ e sia $u \in K \cap V$. Se K e V sono non tangenti in u (Def. (1.4)), allora si ha:*

$$\partial^- (I_K + I_V)(u) = \partial^- I_K(u) + \partial^- I_V(u).$$

La dimostrazione è simile a quella di analoghi risultati, riportati per esempio in [8] e [9].

§ 2. - Esistenza di soluzioni in aperti contrattili

In questo paragrafo diamo l'esempio di un aperto Ω limitato e contrattile in cui il problema $P(\Omega, p)$, con $p > 2n/(n-2)$, ha almeno una soluzione (vedi Teorema (2.2)).

Gli aperti $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ considerati in questo lavoro hanno tutti simmetria radiale rispetto all'asse x_n, per cui è naturale cercare soluzioni del problema $P(\Omega, p)$ nello spazio delle funzioni aventi la stessa simmetria del dominio. Diciamo che Ω ha simmetria radiale rispetto all'asse x_n se vale la seguente proprietà:

$$x \in \Omega \text{ se e solo se } (0, \ldots, 0, \rho(x), x_n) \in \Omega, \quad \text{dove } \rho(x) = \left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2\right)^{1/2}.$$

Analogamente diciamo che una funzione u definita in un dominio Ω con simmetria radiale rispetto a x_n ha la stessa simmetria se per ogni $x \in \Omega$ risulta

$$u(x) = u(0, \ldots, 0, \rho(x), x_n).$$

Se Ω ha simmetria radiale, indicheremo con $H_{0,r}^{1,2}(\Omega)$, $H_r^{1,2}(\Omega)$, $L_r^p(\Omega)$, ecc. i sottospazi di $H_0^{1,2}(\Omega)$, $H^{1,2}(\Omega)$, $L^p(\Omega)$ costituiti dalle funzioni radiali.

È ben noto che ogni punto critico del funzionale F ristretto allo spazio $H_{0,r}^{1,2}(\Omega) \cap L_r^p(\Omega)$ è soluzione del Problema $P(\Omega, p)$.

È importante osservare che, se Ω è un aperto limitato con simmetria radiale rispetto all'asse x_n e inoltre risulta

$$\inf\left\{\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 : x \in \Omega\right\} > 0,$$

allora gli spazi $H_{0,r}^{1,2}(\Omega)$, $H_r^{1,2}(\Omega)$, $L_r^p(\Omega)$ risultano rispettivamente isomorfi agli spazi $H_0^{1,2}(\tilde{\Omega})$, $H^{1,2}(\tilde{\Omega})$, $L^p(\tilde{\Omega})$ dove

$$\tilde{\Omega} = \{(\rho, t) \in \mathbb{R}^2 : (0, \ldots, 0, \rho, t) \in \Omega\}$$

($\tilde{\Omega}$ è un aperto di $\mathbb{R}^2$).

Di conseguenza $H_r^{1,2}(\Omega)$ è immerso con compattezza in $L_r^q(\Omega)$ per ogni $q \geq 1$.

(2.1). Notazioni: Siano $n \geq 3$, $\tau \in]0, 1[$, $\varepsilon > 0$.

Poniamo:

$$A_\tau = \{x \in \mathbb{R}^n : \tau < |x| < 1\};$$

$$C_\varepsilon = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 \leq \varepsilon^2,\ x_n \geq 0\right\};$$

$$\Omega_\varepsilon = A_\tau \setminus C_\varepsilon;$$

(si noti che, per ogni $\varepsilon > 0$, Ω_ε è un aperto di $\mathbb{R}^n$, limitato e contrattile, avente simmetria radiale rispetto all'asse x_n).

Per un fissato $\eta > 0$ poniamo

$$Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 \leq \eta^2 ;\ x_n \leq 0 \right\},$$

$$K_\varepsilon = \{ u \in H_{0,r}^{1,2}(\Omega_\varepsilon) : |u(x)| \leq 1 \ \forall x \in \Omega_\varepsilon \cap Q \},$$

$$V_\varepsilon = \left\{ u \in H_{0,r}^{1,2}(\Omega_\varepsilon) : \int_{\Omega_\varepsilon} |u(x)|^p \, dx = 1 \right\}.$$

Se $u \in H_0^{1,2}(\Omega)$, per ogni aperto Ω' contenente Ω indicheremo nel seguito con u anche la funzione di $H_0^{1,2}(\Omega')$ ottenuta prolungando la u col valore 0 in $\Omega' \setminus \Omega$.

(2.2). TEOREMA: *Sia $p > 2n/(n-2)$ e per ogni $\varepsilon > 0$ sia Ω_ε l'aperto definito sopra (Notazioni (2.1)). Allora esiste $\bar{\varepsilon} > 0$ tale che per ogni $\varepsilon \in]0, \bar{\varepsilon}[$ il problema $P(\Omega_\varepsilon, p)$ ha almeno una soluzione u_ε in $H_{0,r}^{1,2}(\Omega_\varepsilon)$. Inoltre $u_\varepsilon \in K_\varepsilon$ e risulta $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Omega_\varepsilon} |Du_\varepsilon|^2 dx = 0$.*

(Si veda la Proposizione (2.11) per ulteriori precisazioni sul comportamento di u_ε per $\varepsilon \to 0$).

La dimostrazione, riportata al punto (2.10), si basa sui seguenti lemmi.

(2.3). LEMMA: *Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una funzione non negativa $\bar{u}_\varepsilon \in H_{0,r}^{1,2}(\Omega_\varepsilon)$, punto di minimo del funzionale $f_\varepsilon(u) = \int_{\Omega_\varepsilon} |Du|^2 dx$ sul vincolo $K_\varepsilon \cap V_\varepsilon$ (vedi Notazioni* (2.1)).

Inoltre risulta $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Omega_\varepsilon} |D\bar{u}_\varepsilon|^2 dx = 0$.

DIMOSTRAZIONE: Sia $(u_i)_i$ una successione minimizzante per f_ε in $K_\varepsilon \cap V_\varepsilon$, cioè:

$$\lim_{i \to +\infty} f_\varepsilon(u_i) = \inf \{ f_\varepsilon(u) : u \in K_\varepsilon \cap V_\varepsilon \}.$$

A meno di sostituire u_i con $|u_i|$, possiamo evidentemente assumere che le u_i siano non negative. Quindi la successione $(u_i)_i$ (o una sua estratta) convergerà quasi ovunque in Ω_ε e debolmente in $H_0^{1,2}(\Omega_\varepsilon)$ ad una funzione non negativa $\bar{u}_\varepsilon \in K_\varepsilon$.

Siccome $f_\varepsilon(\bar{u}_\varepsilon) \leq \inf \{ f_\varepsilon(u) : u \in K_\varepsilon \cap V_\varepsilon \}$, basterà far vedere che $\int_{\Omega_\varepsilon} (\bar{u}_\varepsilon)^p dx = 1$.

Infatti, si ha per ogni $i \in \mathbb{N}$:

$$1 = \int_{\Omega_\varepsilon} u_i^p \, dx = \int_{\Omega_\varepsilon \setminus Q} u_i^p \, dx + \int_{\Omega_\varepsilon \cap Q} u_i^p \, dx,$$

con

$$\lim_{i \to \infty} \int_{\Omega_\varepsilon \cap Q} u_i^p \, dx = \int_{\Omega_\varepsilon \cap Q} \bar{u}_\varepsilon^p \, dx$$

in quanto

$$|u_\varepsilon(x)| \leq 1 \quad \forall x \in \Omega_\varepsilon \cap Q \qquad \text{e} \qquad u_\varepsilon \to \bar{u}_\varepsilon \text{ quasi ovunque in } \Omega_\varepsilon \cap Q.$$

Resta da provare che risulta anche

$$\lim_{i\to\infty} \int_{\Omega_\varepsilon \setminus Q} u_i^p \, dx = \int_{\Omega_\varepsilon \setminus Q} \bar{u}_\varepsilon^p \, dx;$$

ma questo si deduce dal fatto che, siccome $\inf\left\{\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 : x \in \Omega_\varepsilon \setminus Q\right\} > 0$, allora il sottospazio di $H_*^{1,2}(\Omega_\varepsilon \setminus Q)$ costituito dalle funzioni che si annullano (nel senso di $H^{1,2}$) sul bordo di Ω_ε, munito della norma equivalente

$$\|u\| = \left(\int_{\Omega_\varepsilon \setminus Q} |Du|^2 dx\right)^{1/2},$$

è immerso con compattezza in $L^p(\Omega_\varepsilon \setminus Q)$ per ogni $p \geq 1$.

Proviamo che $\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\Omega_\varepsilon} |D\bar{u}_\varepsilon|^2 dx = 0$: sia $\bar{\varphi} \in H_0^{1,2}(\Omega')$ dove

$$\Omega' = \left\{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 2, \ \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 > 1\right\};$$

sia $\bar{x} = (0, \ldots, \bar{x}_n)$ con $\sigma < \bar{x}_n < 1$; per ε abbastanza piccolo, sia $\bar{\varphi}_\varepsilon \in K_\varepsilon \cap V_\varepsilon$ così definita:

$$\bar{\varphi}_\varepsilon = \frac{\varphi_\varepsilon}{\|\varphi_\varepsilon\|_{L^p}},$$

dove $\varphi_\varepsilon(x) = \bar{\varphi}((x - \bar{x})/\varepsilon)$ ($\bar{\varphi}$ si intende prolungata col valore 0 in $\mathbb{R}^n \setminus \Omega'$, quindi $\varphi_\varepsilon \in H_0^{1,2}(\Omega_\varepsilon)$ per ε abbastanza piccolo). Allora, per $p > 2n/(n-2)$, risulta

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\Omega_\varepsilon} |D\bar{\varphi}_\varepsilon|^2 dx = 0.$$

Basta quindi osservare che $f_\varepsilon(\bar{u}_\varepsilon) \leq \int_{\Omega_\varepsilon} |D\bar{\varphi}_\varepsilon|^2 dx$ per concludere che

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\Omega_\varepsilon} |D\bar{u}_\varepsilon|^2 dx = 0.$$

(2.4). Lemma: *Per ogni $\varepsilon > 0$ sia u_ε una funzione di $H_0^{1,2}(\Omega_\varepsilon)$ tale che $u_\varepsilon \in K_\varepsilon$ e risulti $\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\Omega_\varepsilon} |Du_\varepsilon|^2 dx = 0$.*

Allora si ha

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\Omega_{\varepsilon_0}} |u_\varepsilon|^q dx = 0 \quad \forall q \geq 1 \ \text{e} \ \forall \varepsilon_0 > 0.$$

DIMOSTRAZIONE: Si ha che $u_\varepsilon \to 0$ in $H_0^{1,2}(A_\varepsilon)$ (le u_ε si intendono prolungate col valore o all'esterno di Ω_ε).

Ne segue che $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\Omega_{\varepsilon_0} \cap Q} |u_\varepsilon|^q dx = 0$ $\forall q \geq 1$, in quanto $|u_\varepsilon(x)| \leq 1$ $\forall x \in \Omega_{\varepsilon_0} \cap Q$ e $\forall \varepsilon > 0$. Per provare che risulta anche $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\Omega_{\varepsilon_0} \setminus Q} |u_\varepsilon|^q dx = 0$, basta osservare che, siccome

$$\inf \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 : x \in \Omega_{\varepsilon_0} \setminus Q \right\} > 0,$$

allora il sottospazio di $H_\varepsilon^{1,2}(\Omega_{\varepsilon_0} \setminus Q)$ costituito dalle funzioni che si annullano (nel senso di $H^{1,2}$) sul bordo di A_ε, munito della norma equivalente

$$\|u\| = \left(\int\limits_{\Omega_{\varepsilon_0} \setminus Q} |Du|^2 dx \right)^{1/2},$$

è immerso (con compattezza) in $L^q(\Omega_{\varepsilon_0} \setminus Q)$ per ogni $q \geq 1$.

(2.5). LEMMA: *Per ogni $\varepsilon > 0$ sia $\bar{u}_\varepsilon \in K_\varepsilon \cap V_\varepsilon$ una funzione non negativa tale che*

$$f_\varepsilon(\bar{u}_\varepsilon) = \min \{ f_\varepsilon(u) : u \in K_\varepsilon \cap V_\varepsilon \}$$

(vedi Lemma (2.3)). Allora esiste $\bar{\varepsilon}_1 > 0$ tale che il convesso K_ε e la varietà V_ε sono non tangenti in $\bar{u}_\varepsilon$ per $0 < \varepsilon < \bar{\varepsilon}_1$ (vedi Def. (1.4)).

DIMOSTRAZIONE: Per ogni $\varepsilon > 0$ sia γ_ε una funzione di $H_{0,\varepsilon}^{1,2}(\Omega_\varepsilon) \cap L^p(\Omega_\varepsilon)$ tale che

$$\gamma_\varepsilon(x) = 0 \quad \forall x \in \Omega_\varepsilon \cap Q \qquad \text{e} \qquad \gamma_\varepsilon(x) > 0 \quad \forall x \in \Omega_\varepsilon \setminus Q.$$

Quindi si ha che $\bar{u}_\varepsilon + t\gamma_\varepsilon \in K_\varepsilon$ $\forall t \in \mathbb{R}$. Siccome (per il Lemma (2.4)) risulta

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_{\varepsilon_0}} \bar{u}_\varepsilon^p dx = 1 \quad \forall \varepsilon_0 > 0,$$

si ha che esiste $\bar{\varepsilon}_1 > 0$ tale che

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} \bar{u}_\varepsilon^{p-1} \gamma_\varepsilon dx > 0 \quad \text{per ogni } \varepsilon \in]0, \bar{\varepsilon}_1[.$$

Proviamo che per tali ε risulta

$$\partial^- I_{K_\varepsilon}(\bar{u}_\varepsilon) \cap \partial^- I_{V_\varepsilon}(\bar{u}_\varepsilon) = \{0\},$$

cioè K_ε e V_ε sono non tangenti in $\bar{u}_\varepsilon$.

È ovvio che $0 \in \partial^- I_{K_\varepsilon}(\bar{u}_\varepsilon) \cap \partial^- I_{V_\varepsilon}(\bar{u}_\varepsilon)$.

Resta da provare che $\partial^- I_{K_\varepsilon}(\bar{u}_\varepsilon) \cap \partial^- I_{V_\varepsilon}(\bar{u}_\varepsilon) \subseteq \{0\}$. A tale scopo osserviamo che, se

$\alpha \in \partial^- I_{V_\varepsilon}$, esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ (vedi esempi (1.2)) tale che

$$\alpha(v - \bar{u}_\varepsilon) = \lambda \int_{\Omega_\varepsilon} \bar{u}_\varepsilon^{p-1}(v - \bar{u}_\varepsilon)\, dx \qquad \forall v \in H_0^{1,2}(\Omega_\varepsilon) \cap L^p(\Omega_\varepsilon).$$

D'altra parte, se $\alpha \in \partial^- I_{K_\varepsilon}(\bar{u}_\varepsilon)$, risulta $\alpha(v - \bar{u}_\varepsilon) \leq 0$ per ogni $v \in K_\varepsilon$ (vedi es. (1.2)); in particolare si ha $\alpha(v - \bar{u}_\varepsilon) \leq 0$ per $v = \bar{u}_\varepsilon + \gamma_\varepsilon$ e per $v = \bar{u}_\varepsilon - \gamma_\varepsilon$, per cui $\alpha(\gamma_\varepsilon) = 0$; ma $\alpha(\gamma_\varepsilon) = \lambda \int_{\Omega_\varepsilon} \bar{u}_\varepsilon^{p-1} \gamma_\varepsilon\, dx$ con $\int_{\Omega_\varepsilon} \bar{u}_\varepsilon^{p-1} \gamma_\varepsilon\, dx \neq 0$, per cui $\lambda = 0$ e quindi $\alpha = 0$.

(2.6). Lemma: *Per ogni $\varepsilon \in]0, \bar{\varepsilon}_1[$ (vedi Lemma (2.5)) sia $\bar{u}_\varepsilon$ una funzione non negativa, punto di minimo del funzionale f_ε sul vincolo $K_\varepsilon \cap V_\varepsilon$ (vedi Lemma (2.3)). Allora valgono le seguenti proprietà:*

a) $0 \in \partial^- f_\varepsilon(\bar{u}_\varepsilon) + \partial^- I_{K_\varepsilon}(\bar{u}_\varepsilon) + \partial^- I_{V_\varepsilon}(\bar{u}_\varepsilon)$.

b) Esiste $\lambda_\varepsilon \in \mathbb{R}$ tale che

$$\int_{\Omega_\varepsilon} D\bar{u}_\varepsilon D(v - \bar{u}_\varepsilon)\, dx - \lambda_\varepsilon \int_{\Omega_\varepsilon} \bar{u}_\varepsilon^{p-1}(v - \bar{u}_\varepsilon)\, dx \geq 0 \qquad \forall v \in K_\varepsilon\,;$$

inoltre risulta $\lim_{\varepsilon \to 0} \lambda_\varepsilon = 0$.

c) Per ogni funzione $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_\varepsilon)$, che sia non negativa ed abbia simmetria radiale rispetto a x_n, risulta:

$$\int_{\Omega_\varepsilon} D\bar{u}_\varepsilon D\varphi\, dx - \lambda_\varepsilon \int_{\Omega_\varepsilon} \bar{u}_\varepsilon^{p-1} \varphi\, dx \leq 0\,.$$

Dimostrazione: *a)* Osserviamo che $0 \in \partial^-(f_\varepsilon + I_{V_\varepsilon} + I_{K_\varepsilon})(\bar{u}_\varepsilon)$, in quanto $\bar{u}_\varepsilon$ è un punto di minimo per f_ε su $V_\varepsilon \cap K_\varepsilon$.

Siccome il funzionale f_ε è differenziabile e in $\bar{u}_\varepsilon$ la varietà V_ε e il convesso K_ε sono non tangenti, risulta

$$0 \in \partial^- f_\varepsilon(\bar{u}_\varepsilon) + \partial^-(I_{K_\varepsilon} + I_{V_\varepsilon})(\bar{u}_\varepsilon) = \partial^- f_\varepsilon(\bar{u}_\varepsilon) + \partial^- I_{K_\varepsilon}(\bar{u}_\varepsilon) + \partial^- I_{V_\varepsilon}(\bar{u}_\varepsilon).$$

b) L'esistenza di un moltiplicatore $\lambda_\varepsilon \in \mathbb{R}$, per il quale sia verificata la disequazione variazionale, segue dalla caratterizzazione dei sottodifferenziali della funzione differenziabile f_ε e delle funzioni indicatrici I_{V_ε} e I_{K_ε} della varietà differenziabile V_ε e del convesso K_ε (vedi Esempi (1.2)). Resta da provare che $\lim_{\varepsilon \to 0} \lambda_\varepsilon = 0$.

A tale scopo, sia z una fissata funzione in $C^\infty(\bar{A}_\varepsilon)$, avente simmetria radiale rispetto all'asse x_n e verificante le seguenti proprietà:

$$0 \leq z(x) \leq 1 \quad \forall x \in \bar{A}_\varepsilon,$$

$$z(x) = 0 \quad \forall x \in A_\varepsilon \cap Q,$$

esiste $\varepsilon_0 > 0$ tale che $z(x) = 1$ $\forall x \in A_\varepsilon \setminus \Omega_{\varepsilon_0}$.

Posto $\bar{\gamma}_\varepsilon = z\bar{u}_\varepsilon$, si ha $\bar{u}_\varepsilon + t\bar{\gamma}_\varepsilon \in K_\varepsilon$ $\forall t \in \mathrm{R}$; di conseguenza risulta

$$t\left[\int_{\Omega_\varepsilon} D\bar{u}_\varepsilon D\bar{\gamma}_\varepsilon dx - \lambda_\varepsilon \int_{\Omega_\varepsilon} \bar{u}_\varepsilon^{p-1}\bar{\gamma}_\varepsilon dx\right] \geqslant 0 \quad \forall t \in \mathrm{R}$$

e quindi

$$\int_{\Omega_\varepsilon} D\bar{u}_\varepsilon D\bar{\gamma}_\varepsilon dx - \lambda_\varepsilon \int_{\Omega_\varepsilon} \bar{u}_\varepsilon^{p-1}\bar{\gamma}_\varepsilon dx = 0.$$

Basta allora provare che

1) $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Omega_\varepsilon} \bar{u}_\varepsilon^{p-1}\bar{\gamma}_\varepsilon dx = \int_{\Omega_\varepsilon} \bar{u}_\varepsilon^p dx = 1$ e

2) $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Omega_\varepsilon} D\bar{u}_\varepsilon D\bar{\gamma}_\varepsilon dx = 0.$

Risulta

$$\left|\int_{\Omega_\varepsilon} \bar{u}_\varepsilon^{p-1}\bar{\gamma}_\varepsilon dx - \int_{\Omega_\varepsilon} \bar{u}_\varepsilon^p dx\right| = \int_{\Omega_\varepsilon} \bar{u}_\varepsilon^p (1-z) dx = \int_{\Omega_{\varepsilon_0}} \bar{u}_\varepsilon^p (1-z) dx \leqslant \int_{\Omega_{\varepsilon_0}} \bar{u}_\varepsilon^p dx,$$

per cui la 1) segue dal Lemma (2.4).

La 2) si deduce dal fatto che $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Omega_\varepsilon} |D\bar{u}_\varepsilon|^2 dx = 0$, essendo

$$\int_{\Omega_\varepsilon} D\bar{u}_\varepsilon D\bar{\gamma}_\varepsilon dx = \int_{\Omega_\varepsilon} z|D\bar{u}_\varepsilon|^2 dx + \int_{\Omega_\varepsilon} \bar{u}_\varepsilon D\bar{u}_\varepsilon \cdot Dz\, dx.$$

c) Si noti che $\bar{u}_\varepsilon \geqslant 0$ in Ω_ε per cui esiste $\bar{t} > 0$ tale che $\bar{u}_\varepsilon - \bar{t}\varphi \in K_\varepsilon$.

Quindi la *c*) segue dalla *b*) per $v = \bar{u}_\varepsilon - \bar{t}\varphi$.

(2.7). Definizione: Sia $\bar{u}_\varepsilon \geqslant 0$ un punto di minimo per f_ε su $K_\varepsilon \cap V_\varepsilon$ (vedi Lemma (2.3)). Poniamo

$$w_\varepsilon(x) = \frac{|\lambda_\varepsilon|}{n(n-2)\omega_n} \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{\bar{u}_\varepsilon^{p-1}(y)}{|x-y|^{(n-2)}} dy$$

dove λ_ε è il moltiplicatore che compare al punto *b*) del Lemma (2.6) e ω_n è la misura della sfera unitaria di R^n.

Si noti che w_ε ha simmetria radiale rispetto all'asse x_n in quanto $\bar{u}_\varepsilon$ ha tale simmetria.

Vale il seguente lemma:

(2.8). LEMMA: *Sia* w_ε *la funzione definita sopra* (*Def.* (2.7)). *Allora risulta*:

a) $w_\varepsilon \geq \bar{u}_\varepsilon$ *in* Ω_ε;

b) $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \sup \{w_\varepsilon(x) : x \in \Omega_{\varepsilon_0}\} = 0 \ \forall \varepsilon_0 > 0$.

DIMOSTRAZIONE: *a*) È ben noto che per la funzione w_ε vale la seguente proprietà:

$$\int_{\Omega_\varepsilon} Dw_\varepsilon D\varphi \, dx - |\lambda_\varepsilon| \int_{\Omega_\varepsilon} \bar{u}_\varepsilon^{p-1} \varphi \, dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega_\varepsilon).$$

Quindi, per ogni funzione $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_\varepsilon)$, che sia non negativa ed abbia simmetria radiale rispetto ad x_ε, si ha per il punto *c*) del Lemma (2.6)

$$\int_{\Omega_\varepsilon} D(w_\varepsilon - \bar{u}_\varepsilon) D\varphi \, dx - (|\lambda_\varepsilon| - \lambda_\varepsilon) \int_{\Omega_\varepsilon} \bar{u}_\varepsilon^{p-1} \varphi \, dx \geq 0$$

e di conseguenza $\int\limits_{\Omega_\varepsilon} D(w_\varepsilon - \bar{u}_\varepsilon) D\varphi \, dx \geq 0$.

Tenendo conto del fatto che $w_\varepsilon - \bar{u}_\varepsilon \geq 0$ su $\partial\Omega_\varepsilon$, per il principio di massimo si ha quindi $w_\varepsilon - \bar{u}_\varepsilon \geq 0$ in Ω_ε.

b) Sia ε_0 abbastanza piccolo, in modo che risulti

$$A_\varepsilon \cap B\left(x, \frac{\varepsilon_0}{2}\right) \subset \Omega_{\varepsilon_0/2} \quad \forall x \in \Omega_{\varepsilon_0}.$$

Basterà evidentemente provare la tesi solo per tali ε_0 in quanto si ha $\Omega_{\bar{\varepsilon}_0} \subsetneq \Omega_{\varepsilon_0}$ per $\bar{\varepsilon}_0 \geq \varepsilon_0$ e quindi $\sup\limits_{\Omega_{\bar{\varepsilon}_0}} w_\varepsilon \leq \sup\limits_{\Omega_{\varepsilon_0}} w_\varepsilon$. Posto $\varepsilon_1 = \varepsilon_0/2$, si ha per ogni $x \in \Omega_{\varepsilon_0}$:

$$w_\varepsilon(x) = \frac{|\lambda_\varepsilon|}{n(n-2)\omega_n} \left[\int\limits_{\Omega_\varepsilon \cap B(x,\varepsilon_1)} \frac{\bar{u}_\varepsilon^{p-1}(y)}{|x-y|^{(n-2)}} dy + \int\limits_{\Omega_\varepsilon \setminus B(x,\varepsilon_1)} \frac{\bar{u}_\varepsilon^{p-1}(y)}{|x-y|^{(n-2)}} dy \right].$$

Stimiamo separatamente i due termini:

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon \setminus B(x,\varepsilon_1)} \frac{\bar{u}_\varepsilon^{p-1}(y)}{|x-y|^{(n-2)}} dy \leq \frac{1}{\varepsilon_1^{(n-2)}} \int_{\Omega_\varepsilon} \bar{u}_\varepsilon^{p-1} dy \leq \frac{c(\sigma,p)}{\varepsilon_1^{(n-2)}} \left(\int_{\Omega_\varepsilon} \bar{u}_\varepsilon^p(y) \, dy \right)^{(p-1)/p} = \frac{c(\sigma,p)}{\varepsilon_1^{(n-2)}},$$

dove $c(\sigma,p)$ è una costante dipendente dalla misura di A_ε e da p.

Per stimare anche l'altro termine uniformemente rispetto a $x \in \Omega_{\varepsilon_0}$, fissiamo $q > (n/2)(p-1)$. Allora risulta:

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon \cap B(x,\varepsilon_1)} \frac{\bar{u}_\varepsilon^{p-1}(y)}{|x-y|^{(n-2)}} dy \leq c(\varepsilon_1,q) \left(\int\limits_{\Omega_\varepsilon \cap B(x,\varepsilon_1)} \bar{u}_\varepsilon^q(y) \, dy \right)^{(p-1)/q} \leq c(\varepsilon_1,q) \left(\int_{\Omega_{\varepsilon_1}} \bar{u}_\varepsilon^q(y) \, dy \right)^{(p-1)/q}$$

per una opportuna costante $c(\varepsilon_1, q)$ (si noti che nell'ultima maggiorazione abbiamo usato il fatto che $\Omega_\varepsilon \cap B(x, \varepsilon_1) \subset A_\varepsilon \cap B(x, \varepsilon_1) \subset \Omega_{\varepsilon_1}$). Ricordando che risulta $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \lambda_\varepsilon = 0$ (Lemma (2.6)) e $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\Omega_{\varepsilon_1}} \bar{u}_\varepsilon^q \, dx = 0$ (Lemma (2.4)), si ottiene quindi la tesi.

(2.9). COROLLARIO: *Per ogni $\varepsilon > 0$ sia $\bar{u}_\varepsilon$ una funzione non negativa, punto di minimo per il funzionale f_ε vincolato su $V_\varepsilon \cap K_\varepsilon$ (vedi Lemma (2.3)). Allora esiste $\bar{\varepsilon} > 0$ tale che per ogni $\varepsilon \in]0, \bar{\varepsilon}[$ risulta:*

$$\int_{\Omega_\varepsilon} D\bar{u}_\varepsilon D\varphi \, dx - \lambda_\varepsilon \int_{\Omega_\varepsilon} \bar{u}_\varepsilon^{p-1} \varphi \, dx = 0$$

per ogni $\varphi \in H_{0,r}^{1,2}(\Omega_\varepsilon) \cap L^p(\Omega_\varepsilon)$ con $\lambda_\varepsilon = \int_{\Omega_\varepsilon} |D\bar{u}_\varepsilon|^2 dx$.

DIMOSTRAZIONE: Per il Lemma (2.8) esiste $\bar{\varepsilon} > 0$ tale che $\sup\{\bar{u}_\varepsilon(x) \colon x \in \Omega_{\varepsilon/2}\} < 1$ per ogni $\varepsilon \in]0, \bar{\varepsilon}[$.

Allora, per ogni $\varepsilon \in]0, \bar{\varepsilon}[$ e per ogni $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_\varepsilon)$ esiste $\bar{t} > 0$ tale che $\bar{u}_\varepsilon + \bar{t}\varphi \in \in K_\varepsilon$.

Di conseguenza, detto $C_{0,r}^\infty(\Omega_\varepsilon)$ il sottospazio di $C_0^\infty(\Omega_\varepsilon)$ costituito dalle funzioni radiali rispetto all'asse x_n, si ha per il Lemma (2.6)

$$\int_{\Omega_\varepsilon} D\bar{u}_\varepsilon D\varphi \, dx - \lambda_\varepsilon \int_{\Omega_\varepsilon} \bar{u}_\varepsilon^{p-1} \varphi \, dx \geqslant 0 \quad \forall \varphi \in C_{0,r}^\infty(\Omega_\varepsilon).$$

Perciò risulta

$$\int_{\Omega_\varepsilon} D\bar{u}_\varepsilon D\varphi \, dx - \lambda_\varepsilon \int_{\Omega_\varepsilon} \bar{u}_\varepsilon^{p-1} \varphi \, dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_{0,r}^\infty(\Omega_\varepsilon)$$

e quindi per ogni $\varphi \in H_{0,r}^{1,2}(\Omega_\varepsilon) \cap L^p(\Omega_\varepsilon)$. In particolare, per $\varphi = \bar{u}_\varepsilon$ si ottiene $\lambda_\varepsilon = \int_{\Omega_\varepsilon} |D\bar{u}_\varepsilon|^2 dx$.

(2.10). DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA (2.2): Dal Corollario (2.9) si deduce che per ogni $\varepsilon \in]0, \bar{\varepsilon}[$ la funzione $u_\varepsilon = \bar{u}_\varepsilon \lambda_\varepsilon^{1/(p-2)}$ è soluzione (debole) del problema $P(\Omega_\varepsilon, p)$. Dal Lemma (2.3) e dal Corollario (2.9) si ottiene inoltre che $u_\varepsilon \in K_\varepsilon$ per ε abbastanza piccolo e risulta

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Omega_\varepsilon} |Du_\varepsilon|^2 dx = 0.$$

La Proposizione seguente descrive il comportamento delle soluzioni u_ε per $\varepsilon \to 0$.

(2.11). PROPOSIZIONE: *Per ogni $\varepsilon \in]0, \bar{\varepsilon}[$ sia $u_\varepsilon \in H_{0,r}^{1,2}(\Omega_\varepsilon) \cap L^p(\Omega_\varepsilon)$ una soluzione del Problema $P(\Omega_\varepsilon, p)$ tale che $u_\varepsilon \in K_\varepsilon$ e $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Omega_\varepsilon} |Du_\varepsilon|^2 dx = 0$ (vedi Teorema (2.2)). Allora risulta:*

a) $\lim_{\varepsilon \to 0} \sup\{u_\varepsilon(x) \colon x \in \Omega_{\varepsilon_0}\} = 0 \ \forall \varepsilon_0 > 0$.

b) $\lim_{\varepsilon \to 0} \sup\{u_\varepsilon(x) \colon x \in \Omega_\varepsilon \setminus \Omega_{\varepsilon_0}\} = +\infty \ \forall \varepsilon_0 > 0$.

c) $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\Omega_\varepsilon} u_\varepsilon^q \, dx = 0 \quad \forall q \leq p$.

d) $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_{\varepsilon_0}} u_\varepsilon^q \, dx = +\infty \quad \forall q > \frac{n}{2}(p-1) \ e \ \forall \varepsilon_0 > 0$.

Dimostrazione: Conviene dimostrare nell'ordine *c*), *a*), *d*), *b*).
La *c*) segue ovviamente dal fatto che

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} u_\varepsilon^p \, dx = \int\limits_{\Omega_\varepsilon} |Du_\varepsilon|^2 dx \to 0 .$$

a) Con procedimento analogo a quello seguito nella dimostrazione del Lemma (2.8) si prova che (per ε abbastanza piccolo) risulta

$$\sup\{u_\varepsilon(x) \colon x \in \Omega_{\varepsilon_0}\} \leq \frac{c(\sigma, p)}{\varepsilon_0^{(n-2)}} \left(\int\limits_{\Omega_\varepsilon} u_\varepsilon^p \, dx \right)^{(p-1)/p} +$$

$$+ c(\varepsilon_0, q) \left(\int\limits_{\Omega_{\varepsilon_0/2}} u_\varepsilon^q \right)^{(p-1)/q} \qquad \text{per ogni } q > \frac{n}{2}(p-1)$$

e quindi il punto *a*) segue da *c*) e dal Lemma (2.4).

d) Supponiamo per assurdo che esistano $q' > (n/2)(p-1)$, $\varepsilon_0 > 0$ ed una successione $(\varepsilon_i)_i \to 0$ tale che $\lim\limits_{i \to \infty} \int\limits_{\Omega_{\varepsilon_i} \setminus \Omega_{\varepsilon_0}} u_{\varepsilon_i}^{q'} < +\infty$. Da questa e dal punto *a*) si deduce che

$$\lim_{i \to \infty} \int\limits_{\Omega_{\varepsilon_i}} u_{\varepsilon_i}^q \, dx = 0 \qquad \text{per ogni } q < q' .$$

Sia $q \in](n/2)(p-1), q'[$; procedendo come nella dimostrazione del Lemma (2.8) si dimostra che per ogni $x \in \Omega_{\varepsilon_i}$ risulta:

$$u_{\varepsilon_i}(x) \leq \frac{1}{n(n-2)\,\omega_n} \int\limits_{\Omega_{\varepsilon_i}} \frac{u_{\varepsilon_i}^{p-1}(y)}{|x-y|^{(n-2)}} dy .$$

Per ciò si ha

$$u_{\varepsilon_i}(x) \leq \frac{1}{n(n-2)\,\omega_n} \left(\int\limits_{\Omega_i} u_{\varepsilon_i}^q(y) \, dy \right)^{(p-1)/q} \left(\int\limits_{B(x,2)} |x-y|^{((2-n)q)/(q-p+1)} dy \right)^{(q-p+1)/q}$$

e quindi $\sup\limits_{\Omega_{\varepsilon_i}} u_{\varepsilon_i} \to 0$.

Per ogni aperto limitato Ω poniamo

$$\lambda_1(\Omega) = \min\left\{\int_\Omega |Du|^2\,dx\colon\ u \in H_0^{1,2}(\Omega),\ \int_\Omega u^2\,dx = 1\right\}$$

($\lambda_1(\Omega)$ è il primo autovalore dell'operatore $-\Delta$ in $H_0^{1,2}(\Omega)$).

Si noti che $\lambda_1(A_\varrho) \leq \lambda_1(\Omega_{\varepsilon_i})$ $\forall \varepsilon_i > 0$ per cui risulta per ε_i abbastanza piccolo:

$$\sup_{\Omega_{\varepsilon_i}} u_{\varepsilon_i} < [\lambda_1(\Omega_{\varepsilon_i})]^{1/(p-2)}.$$

Ma questo è in contraddizione con la Proposizione (2.12) e quindi il punto *d*) è provato.

b) Se per assurdo esistesse $\varepsilon_0 > 0$ ed una successione $(\varepsilon_i)_i \to 0$ tale che

$$\lim_{i\to\infty}\left(\sup_{\Omega_{\varepsilon_i}\setminus\Omega_{\varepsilon_0}} u_{\varepsilon_i}\right) < +\infty,$$

dal punto *a*) e dal Teorema di Lebesgue si dedurrebbe che

$$\lim_{i\to\infty}\int_{\Omega_{\varepsilon_i}\setminus\Omega_{\varepsilon_0}} u_{\varepsilon_i}^q\,dx = 0$$

anche per $q > (n/2)(p-1)$, in contraddizione col punto *d*).

(2.12). Proposizione: *Sia u una soluzione del problema $P(\Omega, p)$ con $p > 2$. Denotiamo con $\lambda_1(\Omega)$ il primo autovalore dell'operatore $-\Delta$ in $H_0^{1,2}(\Omega)$, cioè*

$$\lambda_1(\Omega) = \min\left\{\int_\Omega |Du|^2\,dx\colon\ u \in H_0^{1,2}(\Omega),\ \int_\Omega u^2\,dx = 1\right\}.$$

Allora risulta $\sup_\Omega u \geq [\lambda_1(\Omega)]^{1/(p-2)}$.

Dimostrazione: Sia $e_1 \in H_0^{1,2}(\Omega)$ tale che $\Delta e_1 + \lambda_1(\Omega) e_1 = 0$ e $e_1 > 0$ in Ω.

Se per assurdo fosse $\sup_\Omega u < [\lambda_1(\Omega)]^{1/(p-2)}$, si avrebbe

$$0 = \int_\Omega u\,\Delta e_1\,dx + \int_\Omega u^{p-1} e_1\,dx = \int_\Omega e_1 (u^{p-1} - \lambda_1(\Omega) u)\,dx < 0,$$

in quanto $u^{p-1} - \lambda_1(\Omega) u < 0$ per $0 < u < [\lambda_1(\Omega)]^{1/(p-2)}$.

(2.13). Osservazione: Mentre nel caso $p = 2n/(n-2)$ la soluzione u_ε trovata in [21] è tale che $\bar{u}_\varepsilon = u/\|u_\varepsilon\|_{L^p}$ è un punto di minimo locale in $H_0^{1,2}$ e in L^p per f_ε su V_ε $\left(\text{precisamente } f_\varepsilon(\bar{u}_\varepsilon) = \min\left\{f_\varepsilon(u)\colon\ u \in V_\varepsilon,\ \int_{\Omega_\varepsilon} \chi_\varepsilon u^p(x)\,dx > 0\right\}\right)$, questo non accade per la soluzione u_ε fornita dal Teorema (2.2) nel caso $p > 2n/(n-2)$.

Infatti possiamo costruire una successione $(\bar{u}_{\varepsilon,i})_i$ in V_ε tale che $\bar{u}_{\varepsilon,i} \to \bar{u}_\varepsilon$ in $H_{0,r}^{1,2}(\Omega_\varepsilon)$ e in $L^p(\Omega_\varepsilon)$, mentre $f_\varepsilon(\bar{u}_{\varepsilon,i}) < f_\varepsilon(\bar{u}_\varepsilon)$ per ogni $i \in N$.

Per costruire tale successione, fissiamo una funzione $\bar{\varphi} \in C_0^\infty(B(0,1))$, non negativa, avente simmetria radiale rispetto all'asse x_n, con $\int_{B(0,1)} \bar{\varphi}^p \, dx = 1$.

Poniamo $\varphi_\rho(x) = \varphi((x + \bar{x})/\rho)$, dove $\bar{x} = (0, \ldots, 0, \bar{x}_n)$ con $\varepsilon < \bar{x}_n < 1$, e $\bar{\varphi}_\rho = \varphi_\rho / \|\varphi_\rho\|_{L^p}$.

Per ρ abbastanza piccolo, sia $u_{\rho,\varepsilon,i} \in H_{0,r}^{1,2}(\Omega_\varepsilon)$ così definita:

$$u_{\rho,\varepsilon,i} = \left(1 - \frac{1}{i}\right)^{1/p} \bar{u}_\varepsilon + \left(\frac{1}{i}\right)^{1/p} \bar{\varphi}_\rho .$$

Siccome $p > 2n/(n-2)$, si ha che $u_{\rho,\varepsilon,i}$ converge $(1 - 1/i)^{1/p} \bar{u}_\varepsilon$ in $H_0^{1,2}(\Omega_\varepsilon)$ per $\rho \to 0$. Inoltre $\lim_{\rho \to 0} \int_{\Omega_\varepsilon} (u_{\rho,\varepsilon,i})^p \, dx = 1$.

Infatti si ha (per ρ piccolo)

$$\int_{\Omega_\varepsilon} (u_{\rho,\varepsilon,i})^p \, dx = \int_{\Omega_\varepsilon \setminus B(\bar{x},\rho)} \bar{u}_\varepsilon^p \left(1 - \frac{1}{i}\right) dx + \int_{B(\bar{x},\rho)} \left[\left(1 - \frac{1}{i}\right)^{1/p} \bar{u}_\varepsilon + \left(\frac{1}{i}\right)^{1/p} \bar{\varphi}_\rho\right]^p dx$$

con

$$\int_{\Omega_\varepsilon \setminus B(\bar{x},\rho)} \bar{u}_\varepsilon^p \left(1 - \frac{1}{i}\right) \to \int_{\Omega_\varepsilon} \bar{u}_\varepsilon^p \left(1 - \frac{1}{i}\right) = \left(1 - \frac{1}{i}\right)$$

e

$$\int_{B(\bar{x},\rho)} \left[\left(1 - \frac{1}{i}\right)^{1/p} \bar{u}_\varepsilon + \left(\frac{1}{i}\right)^{1/p} \bar{\varphi}_\rho\right]^p dx \to \frac{1}{i}$$

(per quest'ultimo limite conviene effettuare il cambiamento di variabile $y = (x - \bar{x})/\rho$ e poi passare al limite col teorema di Lebesgue). Di conseguenza, posto $\bar{u}_{\rho,\varepsilon,i} = u_{\rho,\varepsilon,i} / \|u_{\rho,\varepsilon,i}\|_{L^p}$, risulta

$$\lim_{\rho \to 0} \int_{\Omega_\varepsilon} |D\bar{u}_{\rho,\varepsilon,i}|^2 \, dx = \left(1 - \frac{1}{i}\right)^{2/p} \int_{\Omega_\varepsilon} |D\bar{u}_\varepsilon|^2 \, dx < \int_{\Omega_\varepsilon} |D\bar{u}_\varepsilon|^2 \, dx .$$

Quindi esiste una successione $(\rho_i)_i \to 0$ tale che

$$f_\varepsilon(\bar{u}_{\rho_i,\varepsilon,i}) < f_\varepsilon(\bar{u}_\varepsilon) \quad \text{e} \quad \int_{\Omega_\varepsilon} (u_{\rho_i,\varepsilon,i})^p \, dx \to 1 .$$

Poniamo $\bar{u}_{\varepsilon,i} = \bar{u}_{\rho_i,\varepsilon,i}$. Allora la successione $(\bar{u}_{\varepsilon,i})_i$ ha le proprietà volute. Proviamo infatti che $\bar{u}_{\varepsilon,i} \to \bar{u}_\varepsilon$ in $H_0^{1,2}(\Omega_\varepsilon)$ e in $L^p(\Omega_\varepsilon)$: risulta

$$\bar{u}_{\varepsilon,i} - \bar{u}_\varepsilon = \bar{u}_\varepsilon \left[\frac{1}{\|u_{\rho_i,\varepsilon,i}\|_{L^p}} \left(1 - \frac{1}{i}\right)^{1/p} - 1\right] + \frac{1}{\|u_{\rho_i,\varepsilon,i}\|_{L^p}} \left(\frac{1}{i}\right)^{1/p} \bar{\varphi}_{\rho_i}$$

per cui basta ricordare che $\bar{\varphi}_{h}$ è limitata in $L^p(\Omega_\varepsilon)$ e infinitesima in $H_0^{1,2}(\Omega_\varepsilon)$ e che $\|u_{h,\varepsilon,\varepsilon}\|_{L^p} \to 1$.

Notiamo infine che con tecniche simili a quelle usate per costruire la successione $(\bar{u}_{h,\varepsilon})$, si può anche dimostrare che, a differenza di quanto accade nel caso $p = 2n/(n-2)$ (vedi [21]), non esiste per $p > 2n/(n-2)$ il seguente minimo:

$$\min\left\{f_\varepsilon(u)\colon\ u \in V_\varepsilon,\ \int_{\Omega_\varepsilon} x_n |u(x)|^p\,dx > 0\right\}$$

(qualunque sia $\varepsilon > 0$).

§ 3. - Molteplicità di soluzioni positive in aperti contrattili

In questo paragrafo diamo per ogni intero positivo b un esempio di aperto Ω limitato e contrattile (a simmetria radiale) in cui il problema $P(\Omega, p)$ (con $p > 2n/(n-2)$) ha almeno b distinte soluzioni (vedi Teorema (3.2)).

(3.1). Notazioni: Poniamo

$$B(x, \sigma) = \{y \in \mathbb{R}^n\colon |y - x| < \sigma\} \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}^n \text{ e } \sigma > 0.$$

Per ogni intero positivo b sia

$$T_b = \left\{x \in \mathbb{R}^n\colon \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 < 1;\ 0 < x_n < b + 1\right\}$$

e per ogni $i = 1 \dots b$ poniamo $c_i = (0, \dots, 0, i) \in \mathbb{R}^n$. Dati b numeri $\sigma_1 \dots \sigma_n$ con $0 < \sigma_i < 1/2$ $\forall i = 1 \dots b$, poniamo

$$D_b = T_b \setminus \bigcup_{i=1}^{b} \overline{B(c_i, \sigma_i)}, \qquad \chi_\varepsilon = \left\{x \in \mathbb{R}^n\colon \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 \leq \varepsilon^2,\ x_n \geq 1\right\},$$

$$\Omega_\varepsilon^b = D_b \setminus \chi_\varepsilon .$$

Si noti che Ω_ε^b è contrattile per ogni $\varepsilon > 0$ ed ha simmetria radiale rispetto all'asse x_n. Per ogni $\mu > 0$ siano $Q_\mu^0 \dots Q_\mu^b$ così definiti:

$$Q_\mu^i = \left\{x \in \mathbb{R}^n\colon \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 \leq \mu^2,\ i \leq x_n \leq i + 1\right\} \qquad \forall i = 0, 1 \dots b.$$

Per un fissato $\eta > 0$, poniamo per ogni $i = 1 \dots b$ e per ogni $\varepsilon > 0$

$$K_{i,\varepsilon} = \left\{u \in H_{0,r}^{1,2}(\Omega_\varepsilon^b)\colon |u(x)| \leq 1\ \forall x \in \left[\bigcup_{j=0}^{b} Q_\eta^j \setminus Q_\eta^i\right]\right\};$$

in questo paragrafo il funzionale energia $f_\varepsilon(u) = \int_{\Omega_\varepsilon^b} |Du|^2 dx$ si intenderà definito in

$H_{0,\tau}^{1,2}(\Omega_\varepsilon^h) \cap L^p(\Omega_\varepsilon^h)$; inoltre poniamo

$$V_\varepsilon = \left\{ u \in H_{0,\tau}^{1,2}(\Omega_\varepsilon^h) : \int_{\Omega_\varepsilon^h} |u|^p dx = 1 \right\}.$$

(3.2). TEOREMA: *Sia $p > 2n/(n-2)$; per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni intero positivo h sia Ω_ε^h l'aperto definito sopra (Notazioni (3.1)).*

Allora esiste $\bar{\varepsilon} > 0$ tale che per ogni $\varepsilon \in]0, \bar{\varepsilon}[$ il Problema $P(\Omega_\varepsilon^h, p)$ ha almeno h distinte soluzioni $u_{1,\varepsilon} \dots u_{h,\varepsilon}$.

Inoltre si ha $u_{i,\varepsilon} \in K_{i,\varepsilon}$ e

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Omega_\varepsilon^i} |Du_{i,\varepsilon}|^2 dx = 0 \quad \textit{per ogni } i = 1 \dots h.$$

(Si veda la Proposizione (3.11) per ulteriori precisazioni sul comportamento delle soluzioni $u_{i,\varepsilon}$ per $\varepsilon \to 0$).

La dimostrazione (vedi punto (3.10)) si basa sui Lemmi seguenti.

(3.3). LEMMA: *Per ogni $i = 1 \dots h$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una funzione non negativa $\bar{u}_{i,\varepsilon}$, punto di minimo del funzionale $f_\varepsilon(u) = \int_{\Omega_\varepsilon^h} |Du|^2 dx$ sul vincolo $V_\varepsilon \cap K_{i,\varepsilon}$.*

Inoltre risulta per ogni $i = 1 \dots h$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Omega_\varepsilon^i} |D\bar{u}_{i,\varepsilon}|^2 dx = 0.$$

La dimostrazione è analoga a quella del Lemma (2.3).

(3.4). LEMMA: *Per ogni $i = 1 \dots h$ si ha che, se $u_{i,\varepsilon} \in K_{i,\varepsilon}$ per ogni $\varepsilon > 0$ e $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Omega_\varepsilon^i} |Du_{i,\varepsilon}|^2 dx = 0$, allora risulta*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Omega_\varepsilon^h \setminus \Omega_\varepsilon^i} |u_{i,\varepsilon}|^q dx = 0 \quad \forall q \geq 1 \text{ e } \forall \mu > 0.$$

La dimostrazione è simile a quella del Lemma (2.4).

(3.5). LEMMA: *Per ogni $i = 1 \dots h$ e per ogni $\varepsilon > 0$ sia $\bar{u}_{i,\varepsilon}$ una funzione non negativa, punto di minimo del funzionale f_ε sul vincolo $K_{i,\varepsilon} \cap V_\varepsilon$ (vedi Lemma (3.3)). Allora si ha:*

a) $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Omega_\varepsilon^j \cap \Omega_\varepsilon^h} (\bar{u}_{i,\varepsilon})^p dx = \delta_{i,j}$ $\forall i, j = 1 \dots h$ *e* $\forall \mu > 0$ *(δ_{ij} vale 1 per $i = j$ e 0 per $i \neq j$).*

b) Esiste $\bar{\varepsilon}_1 > 0$ tale che $K_{i,\varepsilon}$ e V_ε sono non tangenti in $\bar{u}_{i,\varepsilon}$ $\forall \varepsilon \in]0, \bar{\varepsilon}_1[$ e $\forall i = 1 \dots h$ (vedi Def. (1.4)).

DIMOSTRAZIONE: *a)* segue dal Lemma (3.4) osservando che gli insiemi $\Omega_\mu^1 \dots \Omega_\mu^h$ hanno parti interne tra loro disgiunte e inoltre $\int_{\Omega_\varepsilon^h} (\bar{u}_{i,\varepsilon})^p dx = 1$ per ogni ε.

b) Per un fissato $\mu < 1$, sia $\gamma_{i,\varepsilon} \in H^{1,2}_{0,r}(\Omega^b_\varepsilon) \cap L^p_r(\Omega^b_\varepsilon)$ tale che $\gamma_{i,\varepsilon}(x) > 0$ per x interno a Q^i_μ e $\gamma_{i,\varepsilon}(x) = 0$ per $x \in \Omega^b_\varepsilon \setminus Q^i_\mu$.

Si ha quindi $\bar{u}_{i,\varepsilon} + t\gamma_{i,\varepsilon} \in K_{i,\varepsilon}$ $\forall t \in \mathbb{R}$. Inoltre dal punto a) segue che esiste $\bar{\varepsilon}_1 > 0$ tale che

$$\int_{\Omega^b_\varepsilon \cap Q^i_\mu} \bar{u}^{p-1}_{i,\varepsilon} \gamma_{i,\varepsilon} dx > 0 \qquad \forall \varepsilon \in]0, \bar{\varepsilon}_1[.$$

Basta quindi procedere come nella dimostrazione del Lemma (2.5) per ottenere la tesi:

(3.6). Lemma: *Per ogni* $\varepsilon \in]0, \bar{\varepsilon}_1[$ *(vedi Lemma (3.5)) e per ogni* $i = 1 \dots b$, *sia* $\bar{u}_{i,\varepsilon}$ *una funzione non negativa, punto di minimo di* f_ε *sul vincolo* $K_{i,\varepsilon} \cap V_\varepsilon$ *(vedi Lemma (3.3)).*

Allora valgono le seguenti proprietà:

a) $0 \in \partial^- f_\varepsilon(\bar{u}_{i,\varepsilon}) + \partial^- I_{K_{i,\varepsilon}}(\bar{u}_{i,\varepsilon}) + \partial^- I_{V_\varepsilon}(\bar{u}_{i,\varepsilon})$.

b) *Esiste* $\lambda_{i,\varepsilon} \in \mathbb{R}$ *tale che*

$$\int_{\Omega^b_\varepsilon} D\bar{u}_{i,\varepsilon} D(v - \bar{u}_{i,\varepsilon}) dx - \lambda_{i,\varepsilon} \int_{\Omega^b_\varepsilon} \bar{u}^{p-1}_{i,\varepsilon}(v - \bar{u}_{i,\varepsilon}) dx \geq 0 \qquad \forall v \in K_{i,\varepsilon}.$$

Inoltre risulta $\lim_{\varepsilon \to 0} \lambda_{i,\varepsilon} = 0$.

c) *Per ogni* $\varphi \in C^\infty_{0,r}(\Omega^b_\varepsilon)$, *con* $\varphi \geq 0$, *risulta*

$$\int_{\Omega^b_\varepsilon} D\bar{u}_{i,\varepsilon} D\varphi\, dx - \lambda_{i,\varepsilon} \int_{\Omega^b_\varepsilon} \bar{u}_{i,\varepsilon} \varphi\, dx \leq 0.$$

Dimostrazione: Si procede come nella dimostrazione del Lemma (2.6) utilizzando la proprietà di non tangenza fornita dal Lemma (3.5). In questo caso, per provare che $\lim_{\varepsilon \to 0} \lambda_{i,\varepsilon} = 0$ basta scegliere $z_i \in C^\infty_r(\overline{D}_b)$ in modo che siano verificate le seguenti proprietà: $0 \leq z_i(x) \leq 1$ $\forall x \in \overline{D}_b$; esista $\mu > 0$ tale che $z(x) = 1$ $\forall x \in Q^i_\mu \cap \Omega^b_\varepsilon$; $z(x) = 0$ $\forall x \in Q^j_\mu \cap \Omega^b_\varepsilon$ con $0 \leq j \leq b$ e $j \neq i$.

(3.7). Definizione: Per ogni $i = 1 \dots b$ e per ogni $\varepsilon > 0$ sia $\bar{u}_{i,\varepsilon} \geq 0$ un punto di minimo per f_ε su $K_{i,\varepsilon} \cap V_\varepsilon$ (Lemma (3.3)). Poniamo

$$w_{i,\varepsilon}(x) = \frac{|\lambda_{i,\varepsilon}|}{n(n-2)\omega_n} \int_{\Omega^b_\varepsilon} \frac{\bar{u}^{p-1}_{i,\varepsilon}(y)}{|x-y|^{(n-2)}} dy$$

dove $\lambda_{i,\varepsilon}$ è la costante introdotta al punto b) del Lemma (3.6) e ω_n è la misura della sfera unitaria di $\mathbb{R}^n$.

(3.8). Lemma: *Per ogni* $\varepsilon \in]0, \bar{\varepsilon}_1[$ *(vedi Lemma (3.5)), e per ogni* $i = 1 \dots b$ *sia* $w_{i,\varepsilon}$ *la funzione definita sopra (Def. (3.7)). Allora risulta:*

a) $w_{i,\varepsilon} \geqslant \bar{u}_{i,\varepsilon}$ *in* Ω^b_ε;

b) $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \left(\sup\{w_{i,\varepsilon}(x) \colon x \in \Omega^b_\varepsilon \setminus Q^i_\mu\}\right) = 0 \ \forall \mu > 0.$

La dimostrazione è analoga a quella del Lemma (2.8).

(3.9). Corollario: *Per ogni* $\varepsilon > 0$ *sia* $\bar{u}_{i,\varepsilon}$ *una funzione non negativa, punto di minimo per* f_ε *su* $K_{i,\varepsilon} \cap V_\varepsilon$ (*Lemma* (3.3)).

Allora esiste $\bar{\varepsilon} > 0$ *tale che per ogni* $\varepsilon \in]0, \bar{\varepsilon}[$ *risulta*

$$\int_{\Omega^b_\varepsilon} D\bar{u}_{i,\varepsilon} D\varphi \, dx - \lambda_{i,\varepsilon} \int_{\Omega^b_\varepsilon} \bar{u}^{p-1}_{i,\varepsilon} \varphi \, dx = 0$$

per ogni $\varphi \in H^{1,2}_{0,r}(\Omega^b_\varepsilon) \cap L^p(\Omega^b_\varepsilon)$, *con* $\lambda_{i,\varepsilon} = \int_{\Omega^b_\varepsilon} |D\bar{u}_{i,\varepsilon}|^2 dx.$

La dimostrazione è simile a quella del Corollario (2.9).

(3.10. Dimostrazione del Teorema (3.2): Si prova come al punto (2.10) che per ogni $i = 1 \dots b$ e per ogni $\varepsilon > 0$ le funzioni $u_{i,\varepsilon} = \bar{u}_{i,\varepsilon}(\lambda_{i,\varepsilon})^{1/(p-2)}$ risolvono il Problema $P(\Omega^b_\varepsilon, p)$ ed hanno le proprietà descritte nel teorema.

Si noti inoltre che le soluzioni $u_{1,\varepsilon} \dots u_{b,\varepsilon}$ sono tra loro distinte in quanto

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\int_{\Omega^b_\varepsilon} u^p_{i,\varepsilon} dx} \int_{\Omega^b_\varepsilon \cap Q^j_\mu} u^p_{i,\varepsilon} dx = \delta_{i,j} \qquad \text{per ogni } \mu > 0,$$

come si deduce dal Lemma (3.5).

La seguente proposizione descrive nel comportamento delle soluzioni $u_{1,\varepsilon} \dots u_{b,\varepsilon}$ del Problema $P(\Omega^b_\varepsilon, p)$ quando $\varepsilon \to 0$.

(3.11). Proposizione: *Per ogni* $\varepsilon \in]0, \bar{\varepsilon}[$ *siano* $u_{1,\varepsilon} \dots u_{b,\varepsilon}$ *le soluzioni del Problema* $P(\Omega^b_\varepsilon, p)$ *fornite dal Teorema* (3.2).

Allora risulta per ogni $i = 1 \dots b$:

a) $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \sup\{u_{i,\varepsilon}(x) \colon x \in \Omega^b_\varepsilon \setminus Q^i_\mu\} = 0 \ \forall \mu > 0.$

b) $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \sup\{u_{i,\varepsilon}(x) \colon x \in \Omega^b_\varepsilon \cap Q^i_\mu\} = +\infty \ \forall \mu > 0.$

c) $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int_{\Omega^b_\varepsilon} u^q_{i,\varepsilon} = 0 \ \forall q \leqslant p.$

d) $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int_{\Omega^b_\varepsilon \cap Q^i_\mu} u^q_{i,\varepsilon} = +\infty \ \forall q > \frac{n}{2}(p-1), \ \forall \mu > 0.$

La dimostrazione è analoga a quella della Proposizione (2.11).

(3.12). Osservazione: La Proposizione precedente mostra che le soluzioni $u_{1,\varepsilon} \dots u_{b,\varepsilon}$ del Problema $P(\Omega^b_\varepsilon, p)$ fornite dal Teorema (3.2) per $p > 2n/(n-2)$ hanno le stesse proprietà qualitative di quelle ottenute in [21] nello stesso aperto Ω_ε^h nel caso $p = 2n/(n-2)$. Tuttavia, mentre per $p = 2n/(n-2)$ le soluzioni corrispondevano a minimi locali del funzionale f_ε sulla varietà V_ε, nel senso che

$$f\left(\frac{u_{i,\varepsilon}}{\|u_{i,\varepsilon}\|_{L^p}}\right) = \min\left\{f_\varepsilon(u):\ u \in V_\varepsilon,\ \ i < \int_{\Omega_\varepsilon} x_n |u(x)|^p\,dx < i+1\right\}$$

per ogni $i = 1 \dots h$, questo non accade per $p > 2n/(n-2)$. Infatti possiamo costruire delle successioni $(\bar{u}_{i,\varepsilon,j})_j$ in V_ε che convergono a $\bar{u}_{i,\varepsilon} = u_{i,\varepsilon}/\|u_{i,\varepsilon}\|_{L^p}$ in $H_0^{1,2}(\Omega_\varepsilon^h)$ e in $L^p(\Omega_\varepsilon^h)$ per ogni $i = 1 \dots h$, mentre

$$f_\varepsilon(\bar{u}_{i,\varepsilon,j}) < f_\varepsilon(\bar{u}_{i,\varepsilon}) \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Per costruire tali successioni, consideriamo una funzione $\bar{\varphi}$ come nell'Osservazione (2.13) e poniamo $\varphi_\rho(x) = \varphi((x - x')/\rho)$ dove $x' = (0, \dots, 0, x_n')$ con $0 < x_n' < 1 - \sigma_1$ (vedi Notazioni (3.11)). Posto $\bar{\varphi}_\rho = \varphi_\rho/\|\varphi_\rho\|_{L^p}$, sia $u_{i,\varepsilon,\rho,j} = (1 - 1/j)^{1/p}\bar{u}_{i,\varepsilon} + (1/j)^{1/p}\bar{\varphi}_\rho$.

Come nell'Osservazione (2.13), si può verificare che

$$\lim_{\rho \to 0} \int_{\Omega_\varepsilon} (u_{i,\varepsilon,\rho,j})^p\,dx = 1$$

e

$$\lim_{\rho \to 0} \int_{\Omega_\varepsilon} |Du_{i,\varepsilon,\rho,j}|^2\,dx = \left(1 - \frac{1}{j}\right)^{2/p} \int_{\Omega_\varepsilon} |D\bar{u}_{i,\varepsilon}|^2\,dx,$$

Per cui esiste una successione $(\rho_j)_j$ infinitesima tale che, se poniamo $\bar{u}_{i,\varepsilon,j} = u_{i,\varepsilon,\rho_j,j}/\|u_{i,\varepsilon,\rho_j,j}\|_{L^p}$, le successioni $(\bar{u}_{i,\varepsilon,j})_j$ verificano le proprietà volute. Si noti che con tecniche analoghe si può anche dimostrare che, a differenza di quanto accade nel caso $p = 2n/(n-2)$ (vedi [21]) non esiste per $p > 2n/(n-2)$ il seguente minimo

$$\min\left\{f_\varepsilon(u):\ u \in V_\varepsilon,\ \ i < \int_{\Omega_\varepsilon} x_n |u(x)|^p\,dx < i+1\right\}.$$

BIBLIOGRAFIA

[1] A. Bahri - J. M. Coron, *On a nonlinear elliptic equation involving the Sobolev exponent: the effect of the topology of the domain*, Comm. Pure Appl. Math., 41 (1988), 253-294.

[2] V. Benci - G. Cerami - D. Passaseo, *On the number of the positive solutions of some nonlinear elliptic problems*, in *Nonlinear Analysis. A Tribute in Honour of G. Prodi* (A. Ambrosetti - A. Marino ed.), Quaderni Scuola Norm. Sup. Pisa (1991), 93-107.

[3] H. Brezis, *Opérateurs maximaux monotones et semigroupes de contractions dans les espaces de Hilbert*, North Holland Mathematics Studies n. 5, Notas de Matematica (50), Amsterdam-London (1973).

[4] H. Brezis, *Elliptic equations with limiting Sobolev exponent - The impact of Topology*, in *Proceedings 50th Anniv. Courant Inst.*, Comm. Pure Appl. Math., 39 (1986).

[5] H. Brezis - E. Lieb, *A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals*, Proc. Amer. Math. Soc., 88 (1983), 486-490.

[6] H. Brezis - L. Nirenberg, *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*, Comm. Pure Appl. Math., 36 (1983), 437-477.

[7] G. Cerami - D. Passaseo, *Existence and multiplicity of positive solutions for nonlinear elliptic problems in exterior domains with rich topology*, to appear in J. Nonlinear Anal. T.M.A.

[8] G. Chobanov - A. Marino - D. Scolozzi, *Evolution equation for the eigenvalue problem for the Laplace operator with respect to an obstacle*, Rend. Acc. Naz. Sci. XL, Mem. Mat., 108 (1990), Vol. XIV, 139-162.

[9] G. Chobanov - A. Marino - D. Scolozzi, *Multiplicity of eigenvalue for the Laplace operator with respect to an obstacle, and nontangency conditions*, J. Nonlinear Anal. T.M.A., Vol. 15, n. 3 (1990) 199-215.

[10] M. Conte - R. Levandowski, *A nonexistence result for a nonlinear equation involving critical Sobolev exponent*, to appear.

[11] J. M. Coron, *Topologie et cas limite des injections de Sobolev*, C.R. Acad. Sci. Paris Ser. I, 299 (1984), 209-212.

[12] E. N. Dancer, *A note on an equation with critical exponent*, Bull. London. Math. Soc., 20 (1988), 600-602.

[13] W. Ding, *Positive solutions of* $\Delta u + u^{(n+2)/(n-2)} = 0$ *on contractile domains*, to appear.

[14] B. Gidas - W. M. Ni - L. Nirenberg, *Symmetry of positive solutions of nonlinear elliptic equations in* $\mathbb{R}^N$, in *Mathematical Analysis and Applications* (L. Nachbin, Ed.). Part. A. pp. 370-401, Academic Press, Orlando (1981).

[15] J. Kazdan - F. Warner, *Remarks on some quasilinear elliptic equations*, Comm. Pure Appl. Math., 28 (1975), 567-597.

[16] P. L. Lions, *The concentration-compactness principle in the calculus of variations: the limit case*, Rev. Mat. Iberoamericana, 1 (1985), 45-121, 145-201.

[17] F. Merle - L. A. Peletier, *Asymptotic behaviour of positive solutions of elliptic equations with critical and supercritical growth. I. The radial case*, Arch. Rational Mech. Anal., 112 (1990), 1-19.

[18] F. Merle - L. A. Peletier, *Asymptotic behaviour of positive solutions of elliptic equations with critical and supercritical growth. II. The nonradial case*, to appear.

[19] F. Merle - L. A. Peletier, *Positive solutions of elliptic equations involving supercritical growth*, to appear in Proc. Royal Soc. Edinburgh.

[20] F. Merle - L. A. Peletier, *On supercritical phenomena*, to appear.

[21] D. Passaseo, *Multiplicity of positive solutions of nonlinear elliptic equations with critical Sobolev exponent in some contractile domains*, Manuscripta Math., 65 (1989), 148-166.

[22] D. Passaseo, *Problemi ellittici con esponente critico. Forma del dominio e molteplicità di soluzioni positive*, Preprint n. 564 del Dip. di Matem. di Pisa (1990).

[23] D. Passaseo, *Esistenza e molteplicità di soluzioni positive per l'equazione* $-\Delta u + a(x)u = u^{2^*-1}$ *in domini limitati*, Preprint del Dip. di Mat. di Pisa n. 563 (1990).

[24] D. Passaseo, *Esistenza e molteplicità di soluzioni positive per l'equazione* $-\Delta u + (\alpha(x) + \lambda)u = u^{(N+2)/(N-2)}$ *in* $\mathbb{R}^N$, Preprint n. 565 del Dip. di Matem. di Pisa (1990).

[25] D. Passaseo, *Su alcune successioni di soluzioni positive di problemi ellittici con esponente critico*, to appear on Atti Acc. Naz. Lincei - Rend. Sci. Fis. Mat. Nat.

[26] D. Passaseo, *Molteplicità di soluzioni per certe disequazioni variazionali di tipo ellittico*, Boll. U.M.I. (7) 3-B (1989), 639-667.

[27] D. Passaseo, *Nonexistence results for elliptic problems with supercritical nonlinearity in nontrivial domains*, Preprint Dip. Mat. Pisa (1991) n. 613.

[28] D. Passaseo, *Risultati di non esistenza per equazioni ellittiche con nonlinearità sopra-critica*, Preprint Dip. Mat. Pisa (1992).

[29] S. I. Pohozaev, *Eigenfunctions of the equation* $\Delta u + \lambda f(u) = 0$, Sov. Math. Dokl., 6 (1965), 1408-1411.

[30] P. Rabinowitz, *Some global results for nonlinear eigenvalue problems*, J. Funct. Anal., 7 (1971), 4 87-513.

[31] P. Rabinowitz, *Variational methods for nonlinear elliptic eigenvalue problems*, Indiana Univ. Math., J. 23 (1974), 729-754.

[32] O. Rey, *Sur un problème variationnel non compact: l'effect de petits trous dans le domaine*, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 308, Série I (1989), 349-352.

[33] M. Struwe, *A global compactness result for elliptic boundary value problems involving limiting nonlinearities*, Math. Z., (1984), 511-517.

[34] G. Talenti, *Best constants in Sobolev inequality*, Ann. Mat. Pura Appl., 110 (1976), 353-372.

Direttore responsabile: Prof. A. Ballio - Autorizz. Trib. di Roma n. 7269 dell'8-12-1959
«Monograf» - Via Collamarini, 5 - Bologna