Rendiconti
Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL
Memorie di Matematica
110° (1992), Vol. XVI, fasc. 8, pagg. 115-177

ERICH KÄHLER (*)

Raum-Zeit-Individuum (**)

ZUSAMMENFASSUNG. — Die vorliegende Abhandlung verdient schärfste Kritik, weil sie es wagt, der in der Physik des 20. Jahrhunderts bewährten Metrik

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 \cdot dt^2$$

eine neue Metrik

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2 + dt^2}{t^2}$$

aufzudrängen.

Daß $-c^2 \cdot dt^2$ durch dt^2 ersetzt ist, kann ertrangen werden, da das Minuszeichen schon oft den Gedanken eingegeben hat, daß die Zeit als rein imaginäre Variable zu messen sei.

Aber t^2 im Nenner stört die in der Relativitätstheorie erstrebte Harmonie von Raum und Zeit. Gäbe es nicht die Hypothese von einem Urknall, so wäre eine Singulätität $t = 0$ der Metrik einfach abzulehnen.

Hintergrundstrahlung und Urknall fordern feinste Mathematik heraus, und so sind es nur Quaternionen und das um die Riemannsche Vermutung kreisende Denken, das jener einfachen, ganz ohne empirische Konstanten auskommenden Metrik die Ehre gibt, als Naturgesetz anerkannt zu werden, dem auch die Quantentheorie hörig zu sein hat.

«Vom Relativen zum Absoluten» war das Thema eines Vortrags, in dem Max Planck im Jahre 1924 von einer möglichen Arithmetisierung der Physik gesprochen hat.

Genau dies könnte die Überschrift zu dieser Abhandlung sein, da sie Individuen sucht, wo nur Quanten vermutet werden.

Spazio-Tempo-Individuo

RIASSUNTO. — La presente Memoria merita le più aspre critiche, in quanto essa contrappone alla metrica

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 \cdot dt^2 ,$$

(*) Indirizzo dell'autore: Mozartstraße 42, D2000 Wedel, Holstein (Germania).
(**) Memoria presentata il 23 aprile 1992 da Luigi Amerio, uno dei XL.

ISSN 0392-4106

solidamente affermatasi nella fisica del ventesimo secolo, una nuova metrica:

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2 + dt^2}{t^2}.$$

Il fatto che $-c^2 \cdot dt^2$ venga sostituito con dt^2 può ancora esser tollerato, dal momento che già altre volte la presenza del segno meno aveva suggerito l'idea di considerare il tempo alla stregua di una variabile puramente immaginaria.

Ma la presenza di t^2 al denominatore va a turbare quell'armonia tra spazio e tempo alla quale aspira la teoria della relatività.

Se non ci fosse l'ipotesi di una «esplosione primordiale», l'idea di una singolarità $t = 0$ per la metrica sarebbe semplicemente da respingere.

La radiazione di fondo e l'esplosione primordiale chiamano in causa la matematica più raffinata, e così soltanto i quaternioni e le idee legate all'ipotesi di Riemann conferiscono a quella semplice metrica, esente da qualsiasi costante empirica, l'onore di esser riconosciuta come legge naturale, estendente il suo dominio fin sulla teoria dei quanti.

«Dal relativo all'assoluto» era il tema di una conferenza tenuta da Max Planck nel 1924, nella quale si parlava di una possibile aritmetizzazione della fisica.

Esattamente questo potrebbe essere il titolo della presente Memoria, giacché essa cerca individui, là dove s'immaginano solo quanti.

Einleitung

Die Quantentheorie kann als Versuch gedeutet werden, die Individuen, mit denen es die Physik zu tun hat, aus einem

principium individuationis

abzuleiten.

Daß es bisher nicht gelungen ist, die Quantentheorie mit der Wissenschaft von Raum und Zeit, also der Relativitätstheorie, befriedigend zu vereinen, kann daran liegen, daß die Metrik

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 \cdot dt^2 \tag{1}$$

auf die sich die Theorie von *Einstein-Minkowski-Poincaré* gründet, zu wenig Information über die Natur vermittelt. Es hat darum Sinn, die am Beginn dieses Jahrhunderts zur Neubegründung der Physik führende Fragestellung noch einmal zu bedenken, zumal, da die mit der speziellen Relativitätstheorie getroffene Entscheidung nicht zwingend war, weil sie die konforme Invarianz der Maxwellschen Gleichungen nicht ausgenutzt hatte.

Eine 10-dimensionale, die Maxwellschen Gleichungen respektierende Freiheit in der Wahl der Raum-Zeit-Koordinaten, wie sie die von Poincaré erweiterte spezielle Relativitätstheorie gewährt, hätte auch die Metrik

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 \cdot dt^2}{t^2} \tag{2}$$

garantieren können.

Daß eine solche Metrik bei aller Relativität von Raum und Zeit einen absoluten

Anfang $t = 0$ der Zeit postulieren muß, kann heute nicht mehr erschrecken, seitdem Spekulationen über einen Urknall ernst genommen werden.

Die Gruppe der Isometrien der neuen Metrik (2) zeichnet sich durch einen solchen Reichtum an arithmetisch definierbaren Untergruppen aus, daß eine Arithmetisierung der Physik auf dem in dieser Abhandlung geschilderten Wege versucht werden sollte.

1. - Relativität nach Galilei

Bis zum Ende des 19. Jahrhunderst konnte der *Raum*, in dem wir leben, trotz der Denkbarkeit einer nicht-euklidischen Geometries als euklidisch und darum als erforscht gelten.

Seit *Descartes* war der erfolgreichste Stil, von Gestalten und vom Geschehen in diesem Raum zu reden, die Verwendung eines orthogonalen normierten Koordinatensystems.

Mit drei sich in einem Punkte rechtwinklig schneidenden Koordinatenachsen wird nach Wahl einer Längeneinheit die Lage eines Punktes so durch drei Koordinaten x, y, z beschrieben, daß der Abstand zweier Punkte

$$P: x = x_1\,,\quad y = y_1\,,\quad z = z_1\,,$$
$$Q: x = x_2\,,\quad y = y_2\,,\quad z = z_2\,,$$

nach der Formel

$$d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2$$

berechnet werden kann.

Die Beziehung zwischen zwei solchen Koordinatensystemen

$$x,\ y,\ z \quad \text{und} \quad \bar{x},\ \bar{y},\ \bar{z}$$

wird durch Gleichungen

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \alpha\cdot x + \beta\cdot y + \gamma\cdot z + a\,,\\ \bar{y} &= \alpha'\cdot x + \beta'\cdot y + \gamma'\cdot z + b\,,\\ \bar{z} &= \alpha''\cdot x + \beta''\cdot y + \gamma''\cdot z + c\,, \end{aligned}$$

beschrieben, in denen a, b, c völlig beliebige Konstante sind, während die griechisch benannten Zeichen Konstante bezeichnen, die durch die 6 Orthogonalitäts-Relationen

$$1 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = \alpha''^2 + \beta''^2 + \gamma''^2\,,$$
$$0 = \alpha\cdot\alpha' + \beta\cdot\beta' + \gamma\cdot\gamma' = \alpha\cdot\alpha'' + \beta\cdot\beta'' + \gamma\cdot\gamma'' = \alpha'\cdot\alpha'' + \beta'\cdot\beta'' + \gamma'\cdot\gamma''\,,$$

aber auch nur durch diese, gebunden sind.

Hiernach kann man sagen, daß die Freiheit in der Wahl der Raum-Koordinaten 6-dimensional ist; denn 6 jener 12 Parameter können beliebig gewählt werden, wenn es gilt, von einem gegebenen Koordinatensystem x, y, z aus ein anderes zu konstruieren.

Was die Zeit betrifft, so war ihre mathematische Formulierung als reelle Variable dank der Existenz periodischer Vorgänge in der Natur seit jeher gut eingeübt, und eine Zeitmessung, die den Abstand zweier Zeitpunkte

$$P: t = t_1, \quad Q: t = t_2$$

durch die Differenz $t_1 - t_2$ erklärte, war selbstverständlich.

Daß zwischen Raum und Zeit mathematische Beziehungen bestehen, lehrten zwar bereits die Himmelserscheinungen, doch bis zum Range einer Dynamik erhoben sich jene Beziehungen erst mit Galileis kühnem Entschluß, die ursprünglich 6-dimensionale Freiheit in der Wahl der Raum-Koordinaten-Systeme zu einer 9-dimensionalen zu erweitern. Indem *Galilei* erlaubte, in jenen Formeln die Größen a, b, c als beliebige lineare Funktionen

$$a = \rho \cdot t + \sigma, \quad b = \rho' \cdot t + \sigma', \quad c = \rho'' \cdot t + \sigma''$$

der Zeit zu wählen und auch den Anfang der Zeitrechnung unbestimmt zu lassen, also

$$\bar{t} = t + \tau$$

zu setzen, behauptete er eine *10-dimensionale Symmetrie der Natur*, die durch eine 10-gliedrige Gruppe von Koordinaten-Transformationen

$$\begin{aligned}
x \to \bar{x} &= \alpha \cdot x + \beta \cdot y + \gamma \cdot z + \rho \cdot t + \sigma, \\
y \to \bar{y} &= \alpha' \cdot x + \beta' \cdot y + \gamma' \cdot z + \rho' \cdot t + \sigma', \\
z \to \bar{z} &= \alpha'' \cdot x + \beta'' \cdot y + \gamma'' \cdot z + \rho'' \cdot t + \sigma'', \\
t \to \bar{t} &= t + \tau,
\end{aligned}$$

beschrieben wird.

Die *Newtonsche* Theorie der Gravitation hat diese Symmetrie in großartiger Weise bestätigt; denn in jedem dieser ∞^{10} von Galilei ausgezeichneten Koordinatensysteme haben die Differentialgleichungen der Himmelsmechanik diesselbe Gestalt.

Zweifel an der von Galilei vermuteten Symmetrie entstanden erst am Ende des 19. Jahrhunderts, als die Maxwellsche Theorie des elektro-magnetischen Feldes auf eine andere Symmetrie der Natur hinzuweisen schien. Da diese Theorie sich auf bedeutende experimentelle Erfahrungen stützen konnte, war ein Prinzip der Koordinatenwahl als eine Symmetrie der Natur nur denkbar, wenn die Maxwellschen Gleichungen für die elektro-magnetischen Vorgänge im Vakuum bei jeder von jenem Prinzip zugelassenen Wahl der Koordinaten x, y, z, t die gleiche Gestalt annehmen.

In dieser Lage entstand die spezielle Relativitätstheorie. Die mit dieser Theorie getroffene Entscheidung war nicht zwingend, weshalb es ratsam ist, eine am Anfang dieses Jahrhunderts nicht ausgenutzte Freiheit daraufhin zu prüfen, ob sie neue Erkenntnisse bei anderer Entscheidung möglich macht.

2. - Die Maxwellschen Gleichungen

Die Maxwellschen Gleichungen für die elektro-magnetischen Vorgänge im Vakuum werden am besten in der Sprache der Differentialformen geschrieben.

In einem der von Galilei zugelassenen Koordinatensysteme seien E_1, E_2, E_3 die Komponenten des elektrischen Feldes, H_1, H_2, H_3 die Komponenten des magnetischen Feldes und c_0 bezeichnet die Lichtgeschwindigkeit.

Nach *Maxwell* genügen dann die Differentialformen

$$\theta = H_1 \cdot dy \wedge dz + H_2 \cdot dz \wedge dx + H_3 \cdot dx \wedge dy + c_0 \cdot (E_1 dx + E_2 dy + E_3 dz) \wedge dt\,,$$

$$\bar{\theta} = E_1 \cdot dy \wedge dz + E_2 \cdot dz \wedge dx + E_3 \cdot dx \wedge dy - c_0 \cdot (H_1 dx + H_2 dy + H_3 dz) \wedge dt\,,$$

den Gleichungen

$$d\theta = 0\,, \qquad d\bar{\theta} = 0\,.$$

Die offensichtliche Verwandtschaft der beiden Formen θ und $\bar{\theta}$ kann als Dualität gedeutet werden.

Sobald in einem n-dimensionalen Raume eine Riemannsche Metrik eingeführt ist, kann man (nach *Volterra*) eine vom Koordinatensystem unabhängige Abbildung $*$ definieren, die Differentialformen ω $p$ten Grades in Differentialformen $*\omega$ $(n$-$p)$ten Grades verwandelt und die im Sinne der Gleichung

$$*(*\omega) = (-1)^{\binom{n}{2}} \cdot \omega$$

involutirisch ist.

Wählt man im Falle des 4-dimensionalen Raum-Zeit-Kontinuums eine zu

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 - c_0^2 \cdot dt^2$$

konform verwandte Metrik, also eine mit einem willkürlich wählbaren Faktor $\varphi = \varphi(x, y, z, t)$ versehene Metrik

$$\varphi \cdot (dx^2 + dy^2 + dz^2 - c_0^2 \cdot dt^2)\,, \tag{1}$$

so gelten folgende Dualitäts-Relationen

$$*(dy \wedge dz) = -i \cdot c_0 \cdot dx \wedge dt\,, \qquad *(dx \wedge dt) = \frac{i}{c_0} \cdot dy \wedge dz\,,$$

$$*(dz \wedge dx) = -i \cdot c_0 \cdot dy \wedge dt\,, \qquad *(dy \wedge dt) = \frac{i}{c_0} \cdot dz \wedge dx\,,$$

$$*(dx \wedge dy) = -i \cdot c_0 \cdot dz \wedge dt\,, \qquad *(dz \wedge dt) = \frac{i}{c_0} \cdot dx \wedge dy\,,$$

an denen auffällt, daß die Wahl von φ gar keine Rolle spielt.

Da $*$ eine lineare Abbildung ist, gilt $*\theta = i \cdot \bar{\theta}$, weshalb die Maxwellschen Gleichungen durch die Aussage

$$d\theta = 0\,, \qquad d(*\theta) = 0 \tag{2}$$

ersetzt werden können.

Liegt nun eine Koordinaten-Transformation

$$f\colon \begin{cases} x \to \bar{x} = f_1(x, y, z, t), \\ y \to \bar{y} = f_2(x, y, z, t), \\ z \to \bar{z} = f_3(x, y, z, t), \\ t \to \bar{t} = f_4(x, y, z, t) \end{cases}$$

vor und bezeichnet man die aus einer Differentialform ω nach der Substitution f entstehende Differentialform mit ωf, so gilt allgemein

$$(3) \qquad (d\omega) f = d(\omega f),$$

und die vorher behauptete Invarianz der Dualität besagt

$$(*\omega) f = \bar{*}(\omega f),$$

wenn $\bar{*}$ die durch die Metrik

$$\varphi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t}) \cdot (d\bar{x}^2 + d\bar{y}^2 + d\bar{z}^2 - c_0^2 \cdot d\bar{t}^2)$$

bestimmte Dualität bezeichnet.

Ist insbesondere f eine *Isometrie* der Metrik (1), gilt also

$$\varphi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t}) \cdot (d\bar{x}^2 + d\bar{y}^2 + d\bar{z}^2 - c_0^2 \cdot d\bar{t}^2) = \varphi(x, y, z, t) \cdot (dx^2 + dy^2 + dz^2 - c_0^2 \cdot dt^2),$$

so bedeutet $\bar{*}$ dasselbe wie $*$, weshalb in diesem Fall

$$(4) \qquad (*\omega) f = *(\omega f)$$

behauptet werden kann.

Aus $d(*\theta) = 0$ folgt dann nach (3) and (4)

$$0 = (d(*\theta)) f = d((*\theta) f) = d(*(\theta f)),$$

während aus $d\theta = 0$ auf

$$0 = (d\theta) f = d(\theta f)$$

geschlossen werden kann.

Damit ist erkannt, daß jede Isometrie f der Metrik (1) jede Lösung θ der Maxwellschen Gleichungen (2) wegen

$$d(\theta f) = 0, \qquad d(*(\theta f)) = 0$$

wieder in eine Lösung der Maxwellschen Gleichungen verwandelt.

3. - Relativität nach Einstein und Poincaré

Die spezielle Relativitätstheorie hat entschieden, daß die Isometrien der Metrik

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 - c_0^2 \cdot dt^2$$

die Rolle der Galilei-Transformationen übernehmen sollten.

Die Tatsache, daß die Gleichungen

$$d\bar{x}^2 + d\bar{y}^2 + d\bar{z}^2 - c_0^2 \cdot d\bar{t}^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c_0^2 \cdot dt^2$$

durch lineare Funktionen

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= \alpha \cdot x + \beta \cdot y + \gamma \cdot z + \rho \cdot t + \sigma, \\
\bar{y} &= \alpha' \cdot x + \beta' \cdot y + \gamma' \cdot z + \rho' \cdot t + \sigma', \\
\bar{z} &= \alpha'' \cdot x + \beta'' \cdot y + \gamma'' \cdot z + \rho'' \cdot t + \sigma'', \\
\bar{t} &= \alpha''' \cdot x + \beta''' \cdot y + \gamma''' \cdot z + \rho''' \cdot t + \sigma''',
\end{aligned}$$

gelöst und dabei 10 der griechisch geschriebenen Konstanten willkürlich gewählt werden können, ließ erwarten, daß die 10-gliedrige Gruppe dieser sogenannten Lorentz-Transformationen die wahre Symmetrie der Natur darstelle.

Die durch $\sigma = \sigma' = \sigma'' = \sigma''' = 0$ gekennzeichneten Transformationen bilden die eigentliche *Lorentz-Gruppe*, die 6-gliedrig ist. Ihre Erweiterung zu jener 10-gliedrigen Gruppe, die als inhomogene Lorentz-Gruppe oder *Poincaré-Gruppe* bezeichnet wird, ist experimentell nicht so zwingend wie jene homogene Lorentz-Gruppe.

Dennoch ist die Poincaré-Gruppe die Basis aller Überlegungen, die in der Theorie der Elementarteilchen aus den Symmetrien des Raum-Zeit-Kontinuums Schlüsse ziehen wollen.

4. - Die neue Poincaré-Gruppe

Die Frage nach einer Symmetrie der Natur ist trotz bedeutender Erfolge der speziellen Relativitätstheorie noch offen zu halten. Sie ist wegen der Rolle, die die Maxwellschen Gleichungen dabei spielen, reduziert auf die Frage, welcher Faktor $\varphi(x, y, z, t)$ in der Metrik

$$\varphi(x, y, z, t) \cdot (dx^2 + dy^2 + dz^2 - c_0^2 \cdot dt^2) \tag{1}$$

zu wählen ist, wenn konstantes φ noch nicht die rechte Antwort ist. Da die Symmetrie der Natur zu verstehen ist als die Gruppe der Isometrien jener Metrik und da allgemein Metriken, die sich nur um einen konstanten Faktor unterscheiden, dieselbe Isometriegruppe haben, so kann φ bis auf einen konstanten Faxtor unbestimmt bleiben. Gewichtige mathematische Gründe lassen vermuten, daß

$$\varphi(x, y, z, t) = \text{konstant} \cdot t^{-2} \tag{2}$$

ist, wenn man annimmt, daß $t = 0$ eine den Urknall verbergende natürliche Grenze aller raum-zeitlichen Erscheinungen sei und $t > 0$ die seit dem Urkall verflossene Zeit messe.

Rein empirisch ist dagegen nichts einzuwenden; denn der Urknall liegt weit zurück, und wenn $t = T$ die Zeit eines historischen Ereignisses bezeichnet, ist

$$T^2 \cdot t^{-2}$$

für alle irdischen Experimente nahezu konstant gleich 1. Die Erfolge der speziellen Relativitätstheorie können darum auch als Rechtfertigung des neuen Ansatzes (2) angesehen werden.

Die vorliegende Abhandlung ist ganz der Hypothese gewidmet, daß die Gruppe der Isometrien der Metrik

$$(dx^2 + dy^2 + dz^2 - c_0^2 \cdot dt^2) \cdot t^{-2} \tag{3}$$

die wahre Symmetrie der Natur sei.

Die mathematischen Eigenschaften dieser Gruppe werden zeigen, daß der Name *Poincaré* in diesem Zusammenhang mit viel größerem Recht genannt zu werden verdient als bei der inhomogenen Lorentz-Gruppe.

Ich nenne deshalb die in der Sprache von Quaternionen-Matrizen sogleich zu formulierende Gruppe der Isometrien der Metrik (3) *die neue Poincaré-Gruppe*.

5. - Über dem Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen wird der Ring $\mathbb{H}$ der Quaternionen von den durch

$$i^2 = j^2 = -1, \quad i \cdot j + j \cdot i = 0$$

gebundenen «Quaternionen-Einheiten» i, j erzeugt, der als $\mathbb{R}$-Modul

$$\mathbb{H} = \mathbb{R} + \mathbb{R} \cdot i + \mathbb{R} \cdot i \cdot j + \mathbb{R} \cdot j$$

den Rang 4 hat.

Die imaginäre Einheit des Körpers $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen werde hier nicht mit i sondern mit $\sqrt{-1}$ bezeichnet, um sie von jener Quaternionen-Einheit i zu unterscheiden.

Das Kronecker-Produkt

$$\mathbb{C} \times \mathbb{H} = \mathbb{C} + \mathbb{C} \cdot i + \mathbb{C} \cdot i \cdot j + \mathbb{C} \cdot j = \mathbb{H} + \sqrt{-1} \cdot \mathbb{H}$$

von $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{H}$ heißt der Biquaternionen-Ring. Über $\mathbb{R}$ hat er den Rang 8, über

$$\mathbb{C} = \mathbb{R} + \sqrt{-1} \cdot \mathbb{R}$$

den Rang 4.

Die durch

$$\bar{q} = c_1 - c_2 \cdot i - c_3 \cdot i \cdot j - c_4 \cdot j \qquad (c_k \in \mathrm{C}),$$
$$\bar{\bar{q}} = c_1 + c_2 \cdot i + c_3 \cdot i \cdot j - c_4 \cdot j$$

definierten Übergänge von einer Biquaternion

$$q = c_1 + c_2 \cdot i + c_3 \cdot i \cdot j + c_4 \cdot j$$

zu $\bar{q}$ und $\bar{\bar{q}}$ sind Anti-Involutionen des Ringes $\mathrm{H} + \sqrt{-1} \cdot \mathrm{H}$, die in der Beziehung

$$j \cdot \bar{q} = \bar{\bar{q}} \cdot j, \quad \bar{\bar{q}} \cdot j = j \cdot \bar{q}$$

stehen.

Das Produkt

$$q \cdot \bar{q} = \bar{q} \cdot q = c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + c_4^2$$

ist als Element von C mit allen Biquaternionen vertauschbar, wie übrigens auch

$$\bar{\bar{q}} \cdot j - j \cdot q = 2 \cdot c_4 .$$

Für Quaternionen q ist der Betrag $|q|$ als die nicht-negative Quadratwurzel von $q \cdot \bar{q}$ definiert, während für Biquaternionen nur

$$|q|^2 = q \cdot \bar{q}$$

eindeutig ist und der Regel

$$|q_1 \cdot q_2|^2 = |q_1|^2 \, |q_2|^2$$

genügt. Die Beziehung der Metrik

$$(dx^2 + dy^2 + dz^2 - c_0^2 \cdot dt^2) \cdot t^{-2}$$

zu den Quaternionen besteht darin, daß diese Differentialform nach der Substitution

$$x + y \cdot i + z \cdot i \cdot j + \sqrt{-1} \cdot c_0 \cdot t \cdot j = \omega$$

wegen

$$\bar{\bar{\omega}} \cdot j - j \cdot \omega = 2 \cdot \sqrt{-1} \cdot c_0 \cdot t,$$
$$d\omega \cdot d\bar{\omega} = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c_0^2 \cdot dt^2 ,$$

bis auf einen konstanten Faktor gleich

$$\frac{d\omega \cdot d\bar{\omega}}{(\bar{\bar{\omega}} \cdot j - j \cdot \omega)^2} = \frac{|d\omega|^2}{|\omega - \bar{\bar{\omega}}|^2}$$

gesetzt werden kann.

6. - Für das Transponieren von Matrizen A, B, deren Elemente Biquaternionen sind, gelten die Regeln

$$ {}^t(\widetilde{A\cdot B}) = {}^t\tilde{B}\cdot{}^t\tilde{A}, \qquad {}^t(\overline{A\cdot B}) = {}^t\bar{B}\cdot{}^t\bar{A}. $$

Darum bilden die Matrizen $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, die den mit

$$ (1) \qquad {}^t\tilde{M}\cdot I\cdot M = I \qquad \left(I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) $$

gleichbedeutenden Relationen

$$ (2) \qquad \bar{a}\cdot c = \bar{c}\cdot a, \quad \bar{d}\cdot b = \bar{b}\cdot d, \quad \bar{a}\cdot d - \bar{c}\cdot b = 1 $$

genügen, eine multiplikative Gruppe.

Die Folgerung

$$ (3) \qquad M^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{d} & -\bar{b} \\ -\bar{c} & \bar{a} \end{pmatrix} $$

von (1) zeigt, daß neben (2) auch gilt:

$$ (4) \qquad a\cdot\bar{b} = b\cdot\bar{a}, \quad d\cdot\bar{c} = c\cdot\bar{d}, \quad a\cdot\bar{d} - b\cdot\bar{c} = 1. $$

Die Matrizen $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, die der Gleichung (1) genügen und deren Element a, b, c, d Quaternionen (also nicht nur Biquaternionen) sind, mögen künftig *Poincaré-Matrizen* heißen und durch diesen Namen gekennzeichnet werden.

7. - Mittels einer Poincaré-Matrix

$$ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} $$

kann aus einer mit reellen x, y, z, t gebildeten Biquaternion

$$ \omega = x + y\cdot i + z\cdot i\cdot j + \sqrt{-1}\cdot c_0\cdot t\cdot j $$

in der Weise

$$ \tilde{\omega} = M(\omega) = (a\cdot\omega + b)\cdot(c\cdot\omega + d)^{-1} $$

eine Biquaternion $\tilde{\omega}$ gebildet werden, wenn $|c\cdot\omega + d|^2 \neq 0$ ist. Mit

$$ Z = (a\cdot\omega + b)\cdot(\bar{\omega}\cdot\bar{c} + \bar{d}) = a\cdot\bar{c}\cdot\omega\cdot\bar{\omega} + b\cdot\bar{d} + a\cdot\omega\cdot\bar{d} + b\cdot\bar{\omega}\cdot\bar{c}, $$
$$ N = (c\cdot\omega + d)\cdot(\bar{\omega}\cdot\bar{c} + \bar{d}) = c\cdot\bar{c}\cdot\omega\cdot\bar{\omega} + d\cdot\bar{d} + c\cdot\omega\cdot\bar{d} + d\cdot\bar{\omega}\cdot\bar{c} $$

gilt

$$\tilde{\omega} = M(\omega) = Z \cdot N^{-1}.$$

Der Nenner N erweist sich hier als Quaternion, d.h. als eine in H gelegene Biquaternion, weil die imaginäre Einheit $\sqrt{-1}$ nur ver möge des Summanden

$$c_0 \cdot \sqrt{-1} \cdot t \cdot j$$

von ω auftreten kann, und zwar in der Weise

$$\sqrt{-1} \cdot t \cdot c_0 \cdot (c \cdot j \cdot \bar{d} - d \cdot j \cdot \bar{c}) = \sqrt{-1} \cdot t \cdot c_0 \cdot (c \cdot \bar{d} - d \cdot \bar{c}) \cdot j,$$

die nach 6 (4) Verschwinden bedeutet.

Wegen $N = \bar{N}$ und $N \in \mathrm{H} = \mathrm{R} + \mathrm{R} \cdot i + \mathrm{R} \cdot i \cdot j + \mathrm{R} \cdot j$ ist $N = |c \cdot \omega + d|^2$ eine reelle Zahl.

Der in $\sqrt{-1} \cdot \mathrm{H}$ gelegene Anteil des Zählers

$$Z = a \cdot \bar{c} \cdot (x^2 + y^2 + z^2 - c_0^2 \cdot t^2) + b \cdot \bar{d} + a \cdot \omega \cdot \bar{d} + b \cdot \bar{\omega} \cdot \bar{c}$$

kann nur

$$\sqrt{-1} \cdot t \cdot c_0 \cdot (a \cdot j \cdot \bar{d} - b \cdot j \cdot \bar{c}) = \sqrt{-1} \cdot t \cdot c_0 \cdot (a \cdot \bar{d} - b \cdot \bar{c}) \cdot j = \sqrt{-1} \cdot t \cdot c_0 \cdot j$$

sein, wie 6 (4) lehrt.

Mit

$$\omega_0 = x + y \cdot i + z \cdot i \cdot j$$

gilt also

$$Z = a \cdot \bar{c} \cdot (x^2 + y^2 + z^2 - c_0^2 \cdot t^2) + b \cdot \bar{d} + a \cdot \omega_0 \cdot \bar{d} + b \cdot \bar{\omega}_0 \cdot \bar{c} + \sqrt{-1} \cdot c_0 \cdot t$$

Darum kann

$$\tilde{\omega} = \frac{Z}{N} = \bar{x} + \bar{y} \cdot i + \bar{z} \cdot i \cdot j + \sqrt{-1} \cdot c_0 \cdot \bar{t} \cdot j$$

mit reellen $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t}$ gesetzt werden, wobei mit den Quaternionen

(1) $$\omega_0 = x + y \cdot i + z \cdot i \cdot j, \quad \tilde{\omega}_0 = \bar{x} + \bar{y} \cdot i + \bar{z} \cdot i \cdot j$$

gilt

(2) $$\tilde{\omega}_0 = \frac{a \cdot \bar{c} \cdot (x^2 + y^2 + z^2 - c_0^2 \cdot t^2) + a \cdot \omega_0 \cdot \bar{d} + b \cdot \bar{\omega}_0 \cdot \bar{c} + b \cdot \bar{d}}{c \cdot \bar{c} \cdot (x^2 + y^2 + z^2 - c_0^2 \cdot t^2) + c \cdot \omega_0 \cdot \bar{d} + d \cdot \bar{\omega}_0 \cdot \bar{c} + d \cdot \bar{d}},$$

(3) $$\bar{t} = \frac{t}{c \cdot \bar{c} \cdot (x^2 + y^2 + z^2 - c_0^2 \cdot t^2) + c \cdot \omega_0 \cdot \bar{d} + d \cdot \bar{\omega}_0 \cdot \bar{c} + d \cdot \bar{d}}.$$

Dabei ist zu beachten, daß der Nenner reell und gleich

$$|c \cdot \omega + d|^2 = |c \cdot \omega_0 + d|^2 - c_0^2 \cdot c \cdot \bar{c} \cdot t^2 \tag{4}$$

ist.

Nach 6 (4) hat $c^{-1} \cdot d = q$ im Falle $c \neq 0$ die Eigenschaft $\bar{\bar{q}} = q$, weshalb dann

$$-c^{-1} \cdot d = \alpha + \beta \cdot i + \gamma \cdot i \cdot j$$

mit reellen α, β, γ gesetzt werden kann.

Wenn $c \neq 0$ ist, gilt also

$$|c \cdot \omega + d|^2 = |c|^2 \cdot ((x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z+\gamma)^2 - c_0^2 \cdot t^2), \tag{5}$$

was zeigt, daß $|c \cdot \omega + d|^2$ nur auf dem Lichtkegel

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 - c_0^2 \cdot t^2 = 0$$

verschwindet, der vom Punkte $x = \alpha$, $y = \beta$, $z = \gamma$ beim Urknall $t = 0$ ausgestrahlt wird.

Die Gleichung (3) kann wegen

$$\omega - \bar{\omega} = 2\sqrt{-1} \cdot c_0 \cdot t \cdot j, \qquad \tilde{\omega} - \bar{\tilde{\omega}} = 2\sqrt{-1} \cdot c_0 \cdot \bar{t} \cdot j$$

in der Form

$$\tilde{\omega} - \bar{\tilde{\omega}} = (\omega - \bar{\omega}) \cdot |c \cdot \omega + d|^{-2} \tag{6}$$

geschrieben werden, die sogleich zum Nachweis, daß

$$\omega \to \tilde{\omega} = (a \cdot \omega + b) \cdot (c\omega + d)^{-1}$$

bei konstanten a, b, c, d eine Isometrie der Metrik

$$\frac{|d\omega|^2}{|\omega - \bar{\omega}|^2}$$

darstellt, gebraucht wird.

8. - Werden in der Biquaternion

$$\tilde{\omega} = M(\omega) = (a \cdot \omega + b) \cdot (c \cdot \omega + d)^{-1}$$

die reellen Zahlen x, y, z, t als variabel, die Quaternionen a, b, c, d als konstant behandelt, so folgt aus

$$\tilde{\omega} \cdot (c \cdot \omega + d) = a \cdot \omega + b$$

die Gleichung

$$(1) \qquad d\tilde{\omega}\cdot(c\cdot\omega+d)=(a-\tilde{\omega}\cdot c)\cdot d\omega\,.$$

Im Falle $c\neq 0$ kann aus

$$a\cdot c^{-1}\cdot(c\cdot\omega+d)=a\cdot\omega+a\cdot c^{-1}\cdot d\,,$$
$$\tilde{\omega}\cdot(c\cdot\omega+d)=a\cdot\omega+b$$

auf

$$(2) \qquad (a-\tilde{\omega}\cdot c)\cdot c^{-1}\cdot(c\cdot\omega+d)=a\cdot c^{-1}\cdot d-b$$

geschlossen werden, wobei

$$(3) \qquad (a\cdot c^{-1}\cdot d-b)\cdot\bar{c}=a\cdot\bar{d}-b\cdot\bar{c}=1$$

gilt, wenn die Gleichungen 6 (4), die M als Poincaré-Matrix kennzeichnen, vorausgesetzt werden.

Aus (1) folgt nunmehr

$$(4) \qquad d\tilde{\omega}\cdot(c\cdot\omega+d)=\bar{c}^{-1}\cdot(c\cdot\omega+d)^{-1}\cdot c\cdot d\omega\,,$$

was nach Anwendung von $|\ |^2$ die Gleichung

$$|d\tilde{\omega}|^2\cdot|c\cdot\omega+d|^4=|d\omega|^2$$

ergibt.

Die Formel 7 (6) zeigt andererseits

$$|\tilde{\omega}-\bar{\tilde{\omega}}|^2=|\omega-\omega|^2\cdot|c\cdot\omega+d|^4\,,$$

so daß

$$(5) \qquad \frac{|d\tilde{\omega}|^2}{|\tilde{\omega}-\bar{\tilde{\omega}}|^2}=\frac{|d\omega|^2}{|\omega-\bar{\omega}|^2}$$

behauptet werden kann.

Bewiesen ist dies zunächst nur, wenn $c\neq 0$ ist und natürlich ω der Bedingung

$$|c\cdot\omega+d|^2\neq 0$$

genügt.

Im Falle $c=0$ muß nach 6 (4) und 6 (2)

$$\bar{a}\cdot d=1\,,\qquad b\cdot\bar{a}=a\cdot\bar{b}$$

sein, was $d \neq 0$ und damit

$$|c\cdot\omega + d|^2 \neq 0$$

garantiert.

Es gilt also

$$\hat{\omega} = a\cdot\omega\cdot\bar{a} + b\cdot\bar{a}\,,$$
$$\bar{\hat{\omega}} = a\cdot\bar{\omega}\cdot\bar{a} + a\cdot\bar{b} = a\cdot\bar{\omega}\cdot\bar{a} + b\cdot\bar{a}$$

und damit

$$\hat{\omega} - \bar{\hat{\omega}} = a\cdot(\omega - \bar{\omega})\cdot\bar{a}\,, \qquad d\hat{\omega} = a\cdot d\omega\cdot\bar{a}\,,$$

was wiederum (5) ergibt.

9. - Die *neue Poincaré-Gruppe* ist definiert als die Gesamtheit der Isometrien der Metrik

$$(1) \qquad (dx^2 + dy^2 + dz^2 - c_0^2\cdot c_0^2\cdot dt^2)\cdot t^{-2}$$

die mittels der Biquaternionen

$$\omega = x + y\cdot i + z\cdot i\cdot j + \sqrt{-1}\cdot c_0\cdot t\cdot j\,,$$
$$\hat{\omega} = \hat{x} + \hat{y}\cdot i + \hat{z}\cdot i\cdot j + \sqrt{-1}\cdot c_0\cdot \hat{t}\cdot j$$

und der Poincaré-Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = M$$

in der Form

$$(2) \qquad \omega \to \hat{\omega} = M(\omega) = (a\cdot\omega + b)\cdot(c\cdot\omega + d)^{-1}$$

dargestellt werden können.

Da, wie eben bewiesen, jede der durch

$$(3) \qquad a\cdot\bar{b} = b\cdot\bar{a}\,, \quad d\cdot\bar{c} = c\cdot\bar{d}\,, \quad a\cdot\bar{d} - b\cdot\bar{c} = 1$$

gekennzeichneten Quaternionen-Matrizen

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

ein Element $\omega \to \hat{\omega} = M(\omega)$ der Poincaré-Gruppe bestimmt, liegt hier wie im Falle der klassischen Poincaré-Gruppe und der Gruppe der Galilei-Transformationen eine 10-gliedrige Gruppe vor.

Zu ihrer näheren Beschreibung mögen die Quaternionen

$$q = r_1 + r_2 \cdot i + r_3 \cdot i \cdot j \quad (\text{mit } r_k \in \mathrm{R}),$$

die der Bedingung $q = \bar{q}$ genügen, als *räumliche Quaternionen* bezeichnet werden.

Bei der Diskussion der Gleichungen (3) sind folgende 3 Fälle zu unterscheiden:

$$\text{I) } a \neq 0,\ c \neq 0; \quad \text{II) } c = 0,\ a \neq 0; \quad \text{III) } a = 0,\ c \neq 0.$$

I) Im Falle $a \neq 0$, $c \neq 0$ können $b = -a \cdot \alpha$, $d = -c \cdot \beta$ gesetzt werden, so daß (3) mit der Festellung $\bar{\alpha} = \alpha$, $\bar{\beta} = \beta$, $c \cdot (\alpha - \beta) \cdot \bar{a} = 1$ gleichbedeutend ist.

Im Falle $a \neq 0$, $c \neq 0$ ist also

(4) $$M(\omega) = a \cdot (\omega - \alpha) \cdot (\omega - \beta)^{-1} \cdot (\alpha - \beta) \cdot \bar{a}$$

mit beliebiger von 0 verschiedener Quaternion a und beliebigen, voneinander verschiedenen räumlichen Quaternionen α und β.

II) Ist $c = 0$ so kann a nicht 0 sein. Durch $b = -a \cdot \alpha$ wird also eine Quaternion α bestimmt, die wegen $a \cdot \bar{b} = b \cdot \bar{a}$ räumlich sein muß. Im Falle $c = 0$ ist (3) mit der Aussage

(5) $$M(\omega) = a \cdot (\omega - \alpha) \cdot \bar{a}$$

gleichbedeunted, wobei a eine beliebige von 0 verschiedene Quaternion und α eine beliebige räumliche Quaternion bezeichnen.

III) Ist $a = 0$, so kann nicht $c = 0$ sein. Der Ansatz $d = -c \cdot \beta$ bestimmt also eine Quaternion β, die sich wegen $d \cdot \bar{c} = c \cdot \bar{d}$ als räumlich erweist.

Im Falle $a = 0$ ist demnach

(6) $$M(\omega) = -b \cdot (\omega - \beta)^{-1} \cdot \bar{b},$$

wobei die Quaternion b beliebig, aber von 0 verschieden ist, während β eine beliebige räumliche Quaternion bezeichnet.

Die Abzählung der in diesen Darstellungen von M(ω) enthaltenen reellen Parameter zeigt, daß die neue Poincaré-Gruppe 10-dimensional ist.

10. - In der klassischen Physik und der speziellen Relativitätstheorie wird das Raum-Zeit-Kontinuum dadurch zu einem topologischen Raum, daß alle Inertialsysteme als topologische Abbildungen des Raum-Zeit-Kontinuums auf den vier-dimensionalen euklidischen Raum anerkannt werden.

Relativität in neuer Sicht, wie sie das mit der Metrik

(1) $$(dx^2 + dy^2 + dz^2 - c_0^2 \cdot dt^2) \cdot t^{-2}$$

vermessene Raum-Zeit-Kontinuum bestimmen würde, sollte als *Inertialsysteme* alle und nur die Koordinatensysteme

$$\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t}$$

gelten lassen, die aus dem System x, y, z, t in dem (1) gilt, mittels einer Poincaré-Matrix

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

in der Weise

$$\bar{x} + \bar{y} \cdot i + \bar{z} \cdot i \cdot j + c_0 \cdot \sqrt{-1} \cdot \bar{t} \cdot j = M(x + y \cdot i + z \cdot i \cdot j + c_0 \cdot \sqrt{-1} \cdot t \cdot j)$$

gewonnen werden können. Da solche Koordinaten-Transformationen aber in einer Punktmenge $|c \cdot \omega + d| = 0$ versagen, die im allgemeinen ein Lichtkegel ist, so ist kein Teil des Raum-Zeit-Kontinuums angebbar, als dessen Symmetrien die Koordinaten-Transformationen neunen Stils gedeutet werden können.

Schon in der klassischen Relativitätstheorie hat das Minuszeichen in der Metrik

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 - c_0^2 \cdot dt^2$$

die Vermutung entstehen lassen, daß die Zeit in Wahrheit als rein imaginäre Variable zu verstehen sei. Wenn man aber bei klassischer Relativität bei einem Inertialsystem die Zeit rein imaginär gewählt hat, können die Raum-Koordinaten in einem anderen Inertialsystem komplex werden.

Das ist anders, wenn

$$(dx^2 + dy^2 + dz^2 - c_0^2 \cdot dt^2) \cdot t^{-2}$$

die herrschende Metrik ist, denn da ist es dank der Formel 7 (3) möglich, der Zeitmessung in allen Inertialsystemen den Faktor

$$\sqrt{-1}$$

aufzubürden, ohne die Realität der Raum-Koordinaten einzubüßen. Werden in jenen Formeln

$$\sqrt{-1} \cdot c_0 \cdot t \quad \text{durch } t \quad \sqrt{-1} \cdot c_0 \cdot \bar{t} \quad \text{durch } \bar{t}$$

ersetzt, so stellen die resultierenden Gleichungen

$$(2) \quad \begin{cases} \bar{\omega}_0 \cdot (c \cdot \bar{c} \cdot (x^2 + y^2 + z^2 + t^2) + d \cdot \bar{d} + c \cdot \omega_0 \cdot \bar{d} + d \cdot \bar{\omega}_0 \cdot \bar{c}) = \\ \qquad\qquad = a \cdot \bar{c} \cdot (x^2 + y^2 + z^2 + t^2) + b \cdot \bar{d} + a \cdot \omega_0 \cdot \bar{d} + b \cdot \bar{\omega}_0 \cdot \bar{c}, \\ \bar{t} \cdot (c \cdot \bar{c} \cdot (x^2 + y^2 + z^2 + t^2) + d \cdot \bar{d} + c \cdot \omega_0 \cdot \bar{d} + d \cdot \bar{\omega}_0 \cdot \bar{c}) = t, \end{cases}$$

die nichts anderes als

$$\bar{\omega} = (a \cdot \omega + b) \cdot (c \cdot \omega + d)^{-1}$$

aussagen, wenn

$$\tilde{x} + \tilde{y} \cdot i + \tilde{z} \cdot i \cdot j + \tilde{t} \cdot j = \tilde{\omega}_0 + \tilde{t} \cdot j,$$
$$x + y \cdot i + z \cdot i \cdot j + t \cdot j = \omega_0 + t \cdot j,$$

gesetzt wird, eine Isometrie $\omega \to \tilde{\omega}$ der Metrik

(3) $$(dx^2 + dy^2 + dz^2 + dt^2) \cdot t^{-2}$$

dar, d.h., es gilt

$$(d\tilde{x}^2 + d\tilde{y}^2 + d\tilde{z}^2 + d\tilde{t}^2) \cdot \tilde{t}^{-2} = (dx^2 + dy^2 + dz^2 + dt^2) \cdot t^{-2}.$$

Da

$$c \cdot \bar{c} \cdot (x^2 + y^2 + z^2 + t^2) + d \cdot \bar{d} + c \cdot \omega_0 \cdot \bar{d} + d \cdot \bar{\omega}_0 \cdot \bar{c} = |c \cdot \omega + d|^2$$

bei reellen x, y, z, t nur für $c \cdot \omega + d = 0$ verschwinder und dies nach 7 (3) nur für $t = 0$ denkbar ist, sind jene Formeln für den Übergang

$$\omega \to \tilde{\omega}$$

nur in dem Bereiche $t = 0$ unstetig, der der Metrik (3) ohnehin unerreichbar ist.

11. - Zelle und Zellteilung

Die Gesamtheit H der Quaternionen wird durch die Erklärung, daß der Abstand zweier Quaternionen q, r gleich dem Betrage $|q - r|$ ihrer Differenz sei, ein metrischer und darum ein topologischer Raum, der durch Hinzufügung eines in H nicht vorkommenden Zeichens

$$\infty$$

zu einem der vierdimensionalen Kugel S^4 topologisch äquivalenten Kompaktum

$$\mathrm{H} \cup \infty$$

wird. Jede reelle Zahl ρ bestimmt in der Weise $|q| > \rho$ einen Teil von H der mit ∞ zusammen als eine Umgebung von ∞ anzuerkennen ist.

Eine aus vier konstanten Quaternionen a, b, c, d gebildete Matrix

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

vermittelt gemäß der Formel

(1) $$M(q) = (a \cdot q + b) \cdot (c \cdot q + q)^{-1}$$

eine nicht-konstante Funktion $M(q)$ der variablen Quaternion q genau dann, wenn der rechte Spaltenrang von M, der auch der linke Zeilenrang von M ist, den Wert 2 hat.

Wird in diesem Falle

$$\text{für } c \neq 0\text{: } M(-c^{-1}\cdot d) = \infty\,, \qquad M(\infty) = a\cdot c^{-1}\,,$$
$$\text{für } c = 0\text{: } M(\infty) = \infty$$

gesetzt, so kann der Übergang

$$q \to M(q) \tag{2}$$

als topologische Abbildung von $\mathbb{H} \cup \infty$ auf $\mathbb{H} \cup \infty$ gedeutet werden.

Da das Produkt von Matrizen M_1, M_2, die den rechten Spaltenrang 2 haben, ebenfalls diesen Rang 2 hat und

$$M_1(M_2(q)) = (M_1\cdot M_2)(q)$$

gilt, bilden die in der Weise (2) herstellbaren Abbildungen eine Gruppe.

Der vierdimensionale, der Kugel S^4 topologisch gleiche Raum

$$S^4 = \mathbb{H} \cup \infty$$

heiße in der vorliegenden Untersuchung die *Ur-Zelle*.

Die eben erfolgte Beschreibung der Urzelle setzt eine variable Quaternion

$$q = x + y\cdot i + z\cdot i\cdot j + t\cdot j$$

voraus, die in einem Teile $\mathbb{H}$ der Urzelle vier reelle Koordinaten x, y, z, t einführt und dem in $\mathbb{H}$ nicht gelegenen Punkte der Urzelle das Zeichen ∞ gibt.

Jede Quaternion

$$\hat{q} = \hat{x} + \hat{y}\cdot i + \hat{z}\cdot i\cdot j + \hat{t}\cdot j\,,$$

die aus jener Quaternion q mittels einer Funktion

$$M(q) = (a\cdot q + b)\cdot(c\cdot q + d)^{-1}$$

in der vorher beschriebenen Weise hergestellt werden kann, bestimmt ebenfalls eine Zerlegung

$$\hat{\mathbb{H}} \cup \hat{\infty}$$

der Urzelle S^4.

Jedes aus einer Quaternion in der Weise

$$\hat{q} = M(q)$$

herstellbare Koordinatensystem

$$\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}, \hat{t},$$

und nichts anderes gilt als eine *Karte der Urzelle*, während die Quaternion

$$\tilde{q}$$

selbst die *Kartographie* der Urzelle heiße.

12. - Aus der mit konstanten Quaternionen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ gebildeten Relation

$$\tilde{q} \cdot (\gamma \cdot q + \delta) = \alpha \cdot q + \beta$$

zwischen zwei Kartographien der Urzelle folgt durch Differenzieren

(1) $$d\tilde{q} \cdot (\gamma \cdot q + \delta) = (\alpha - \tilde{q} \cdot \gamma) \cdot dq$$

und damit

(2) $$|d\tilde{q}|^2 \cdot |\gamma \cdot q + \delta|^2 = |dp|^2 \cdot |\alpha - \tilde{q} \cdot \gamma|^2 .$$

Dies zeigt, daß unabhängig von der Kartographie eine *Winkelmessung* in der Urzelle möglich ist, wenn man die Winkel in der euklidischen Metrik

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 + dt^2$$

berechnet.

13. - Wenn eine Quaternionen-Matrix

$$T = \begin{pmatrix} a & \bar{b} \\ b & c \end{pmatrix}$$

in dem Sinne hermitesch ist, daß ${}'\bar{T} = T$ gilt, hat die Funktion

$$T(q) = (\bar{q}, 1) \cdot \begin{pmatrix} a & \bar{b} \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q \\ 1 \end{pmatrix} = a \cdot q \cdot \bar{q} + b \cdot q + \bar{q} \cdot \bar{b} + c$$

im Falle $a \cdot c - b \cdot \bar{b} > 0$, $a > 0$ nur positive Werte, während für $a \cdot c - b \cdot \bar{b} < 0$ die Nullstellen von $T(q)$ die Urzelle in zwei Teile zerlegen.

Bei einer Änderung

$$q \rightarrow \tilde{q} = M(q) = (\alpha \cdot q + \beta) \cdot (\gamma \cdot q + \delta)^{-1}$$

der Kartographie verwandelt sich $T(q)$ in

(1) $$T(\tilde{q}) = T(M(q)) = \tilde{T}(q) \cdot |\gamma q + \delta|^{-2} ,$$

wo

(2) $${}'\overline{M} \cdot T \cdot M = \tilde{T}$$

gesetzt ist.

Da nach 12 (2)

$$|d\tilde{q}|^2 = |dq|^2 \cdot |\gamma \cdot q + \delta|^{-2} \cdot |\alpha - \tilde{q} \cdot \gamma|^2$$

ist und im Falle $\gamma \neq 0$ nach 8 (2)

$$(\alpha - \tilde{q} \cdot \gamma) \cdot \gamma^{-1} \cdot (\gamma \cdot q + \delta) = \alpha \cdot \gamma^{-1} \cdot \delta - \beta$$

gilt, ist

$$\left| \frac{d\tilde{q}}{T(\tilde{q})} \right|^2 = |M|^2 \cdot \left| \frac{dq}{\tilde{T}(q)} \right|^2, \tag{3}$$

wobei $|M|$ eine Konstante bezeichnet, die

$$\begin{array}{lll} & \text{im Falle } \gamma \neq 0 & \text{gleich } |\alpha \cdot \gamma^{-1} \cdot \delta \cdot \gamma - \beta \cdot \gamma| \\ (4) & & \\ & \text{im Falle } \gamma = 0 & \text{gleich } |\alpha \cdot \delta| \end{array}$$

ist und darum so etwas wie eine Determinante der Matrix M darstellt.

Die Zahl $a \cdot c - b \cdot \bar{b}$ heiße die *Diskriminante* der (hermiteschen) Matrix

$$\begin{pmatrix} a & \bar{b} \\ b & c \end{pmatrix} = T.$$

Da der Fall negativer Diskriminante die Bedeutung der in 10 (3) eingeführten Metrik

$$(dx^2 + dy^2 + dz^2 + dt^2) \cdot t^{-2}$$

zu erklären vermag, seien ihm noch folgende Bemerkungen gewidmet.

Wird mit positivem ρ

$$b \cdot \bar{b} - a \cdot c = \rho^2$$

gesetzt, so ist $T(q) = 0$ die 3-dimensionale Kugel

$$|a \cdot q + \bar{b}|^2 = \rho^2,$$

die das 4-dimensionale Gebiet in zwei Teilgebiete

$$T(q) > 0 \quad T(q) < 0$$

zerlegt.

In diesem Falle empfiehlt es sich, die Kartographie q durch

$$\tilde{q} = M(q) \quad \text{mit}\, M = \begin{pmatrix} \rho - \bar{b} & -\rho \cdot j - \bar{b} \cdot j \\ a & a \cdot j \end{pmatrix}$$

zu ersetzen, weil dann

$$\hat{T} = {}^{t}\overline{M} \cdot T \cdot M = 2 \cdot \rho^2 \cdot a \cdot \begin{pmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{pmatrix},$$

$$|M|^2 = 4 \cdot \rho^2 \cdot a^2$$

wird und sich darum nach 13 (3)

$$(5) \qquad \left| \frac{dp}{T(q)} \right|^2 \text{ bei } q \to \bar{q} \quad \text{in } \rho^{-2} \cdot \left| \frac{dp}{\bar{q} \cdot j - j \cdot q} \right|^2$$

verwandelt. Dieses gilt nur für $a \neq 0$.

Ist. $a = 0$ also

$$T(q) = b \cdot q + \bar{q} \cdot \check{b} + c, \quad b \cdot \bar{b} = \rho^2,$$

so gelten mit

$$q = j \cdot b \cdot \hat{q} + \frac{1}{2} \cdot j \cdot c$$

die Gleichungen

$$\bar{q} \cdot j - j \cdot q = T(\bar{q}), \qquad |dq|^2 = \rho^2 \cdot |d\bar{q}|^2$$

die auch in diesem Falle den Übergang (5) ermöglichen.

14. - Auf die Frage nach dem, «was die Welt im Innersten zusammenhält», antwortet die Physik mit der Erforschung der Elementarteilchen.

Die vorliegende Untersuchung verläßt diesen Weg, indem sie versucht, vom Ganzen auf die Teile statt von den Teilen auf das Ganze zu schließen.

Dieses Ganze hat man in der Idee der Urzelle zu sehen, die mit einem mathematisch formulierten Begriff der Zellteilung die *Natur* als ein *Zwei-Zellen-Stadium* zu verstehen sucht.

Die Urzelle ist ein topologischer Raum mit Winkelmessung und jede (2,2)-Quaternionen-Matrix vom rechten Spaltenrang 2 bestimmt eine topologische Abbildung $q \to M(q)$ der Urzelle auf sich selbst.

Die *Symmetrie der Urzelle*, als welche man die Gesamtheit jener Abbildungen zu sehen hat, wird reduziert durch Zellteilung, worunter die Zerlegung der Urzelle mittels einer Funktion

$$T(q) = a \cdot q \cdot \bar{q} + b \cdot q + \bar{q} \cdot \bar{b} + c$$

von negativer Diskriminante $a \cdot c - b \cdot \bar{b}$ in die beiden Teile

$$T(q) > 0 \quad \text{und} \quad T(q) < 0$$

zu verstehen ist.

Erst diese Zweiheit von Zellen verdient den Namen «*Natur*».

Als Symmetrien der Natur sind nur die Abbildungen

$$q \to \bar{q} = M(q)$$

der Urzelle anzuerkennen, die den «*Urknall*»

$$T(q) = 0$$

in sich und darum die beiden Zellen $T(q) > 0$, $T(q) < 0$ entweder auf sich selbst oder aufeinander abbilden.

Da T negative Diskriminante hat, kann die Kartographie q der Urzelle nach 13 (5) so gewählt werden, daß die Gleichung

$$\bar{q} \cdot j - j \cdot q = 0$$

den Urknall darstellt.

Werden die reellen Koordinaten x, y, z, t durch

(1) $$q = x + y \cdot i + z \cdot i \cdot j + t \cdot j$$

definiert, so ist $t = 0$ die Gleichung des Urknalls und $t > 0$ sowie $t < 0$ sind die Ungleichungen für die beiden durch Teilung entstandenen Zellen.

Wenn eine Symmetrie $q \to M(q)$ der Urzelle den Teil

$$2t = \bar{q} \cdot j - j \cdot q = (\bar{q}, 1) \cdot \begin{pmatrix} 0 & j \\ -j & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

in sich abbilden soll, wie bei Symmetrien der Natur gefordert wird, muß

(2) $${}^t\overline{M(q)} \cdot j - j \cdot M(q) = 0$$

eine Folge von $t = 0$ sein.

Nach 13 (1) und (2) besagt (2) dasselbe wie

(3) $$(\bar{q}, 1) \cdot {}^t\overline{M} \cdot \begin{pmatrix} 0 & j \\ -j & 0 \end{pmatrix} \cdot M \cdot \begin{pmatrix} q \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

was eine Gleichung von der Form

$$a \cdot q \cdot \bar{q} + b \cdot q + \bar{q} \cdot \bar{b} + c = 0 \text{ d.h.},$$
$$a \cdot (x^2 + y^2 + z^2 + t^2) + \alpha \cdot x + \beta \cdot y + \gamma \cdot z + \delta \cdot t + c = 0$$

mit rellen $a, \alpha, \beta, \gamma, \delta, c$ ist.

Nur $a = \alpha = \beta = \gamma = c = 0$ ist deshalb denkbar, was zeigt, daß in (3)

$${}^t\overline{M} \cdot \begin{pmatrix} 0 & j \\ -j & 0 \end{pmatrix} \cdot M = r \cdot \begin{pmatrix} 0 & j \\ -j & 0 \end{pmatrix}$$

mit reellem r sein muß.

Hier kann $r = \pm 1$ gewählt werden, weil die Matrix M ohne Änderung der Abbildung $q \to M(q)$ mit einer beliebigen von 0 verschiedenen reellen Zahl multipliziert werden kann.

Die Gleichung

$$ {}^t\overline{M} \cdot \begin{pmatrix} 0 & j \\ -j & 0 \end{pmatrix} \cdot M = \pm \begin{pmatrix} 0 & j \\ -j & 0 \end{pmatrix} $$

ergibt nach Links-Multiplikation mit j die Bedingung

$$ {}^t\bar{M} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot M = \pm \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, $$

die mit der Kennzeichnung 6 (1) der Poincaré-Matrizen zu vergleichen ist.

Hieraus ist zu erkennen:

Jede Poincaré-Matrix M bestimmt eine Symmetrie $q \to M(q)$ der Natur.

Alle übrigen Symmetrien der Natur lassen sich mit einer Poincaré-Matrix in der Weise

$$ q \to M(q^{-1}) $$

darstellen, da aus

$$ {}^t\overline{M} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot M = -\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ stets folgt, daß } M \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} $$

eine Poincaré-Matrix ist.

Wenn eine Quaternionen-Matrix

$$ M \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} $$

einer der beiden Gleichungen

$$ {}^t\overline{M} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot M = \pm \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4} $$

genügt, so folgt ähnlich wie in 6

$$ \bar{a} \cdot c = \bar{c} \cdot a, \quad \bar{d} \cdot b = \bar{b} \cdot d, \quad \bar{a} \cdot d - \bar{c} \cdot b = \pm 1. \tag{5} $$

Die Differenz

$$ M(q) - \overline{M(q)} = (aq + b) \cdot (cq + d)^{-1} - (\overline{cq + d})^{-1} \cdot (\overline{aq + b}) = $$

$$ (\overline{cq + d})^{-1} \cdot ((\overline{cq + d}) \cdot (aq + b) - (\overline{aq + b}) \cdot (cq + d)) \cdot (cq + d)^{-1} $$

vereinfacht sich wegen (5) zu

$$ M(q) - \overline{M(q)} = \pm (\overline{cq + d})^{-1} \cdot (q - \bar{q}) \cdot (cq + d)^{-1}, $$

was

$$\overline{M(q)}\cdot j - j\cdot M(q) = \pm\,(\bar{q}\cdot j - j\cdot q)\cdot |c\cdot q + d|^2 \tag{6}$$

bedeutet, weil für jede Quaternion q die Differenz $\bar{q}\cdot j - j\cdot q$ reell ist.

Wird also wie in (1) $q = x + y\cdot i + z\cdot i\cdot j + t\cdot j$ und überdies

$$M(q) = \bar{x} + \bar{y}\cdot i + \bar{z}\cdot i\cdot j + \bar{t}\cdot j$$

gesetzt, so gilt

$$\bar{t} = \pm\, t\cdot |c\cdot q + d|^{-2}\,. \tag{7}$$

Hiernach ist klar:

Ist M eine Poincaré-Matrix, so bildet $q \to M(q)$ jede der beiden Zellen $t > 0$ und $t < 0$ in sich ab, während $q \to M(q^{-1})$ jene beiden Zellen vertauscht.

15. - Jeder Teilung

$$T(q) = a\cdot q\cdot \bar{q} + b\cdot q + \bar{q}\cdot \bar{b} + c = 0$$

der Urzelle ist eindeutig eine Klasse von Metriken zugeordnet, die sich alle von

$$\frac{dq\cdot d\bar{q}}{(T(q))^2} = \left|\,\frac{dq}{T(q)}\,\right|^2$$

nur um einen konstanten Faktor unterscheiden.

Diese Metriken haben allesamt dieselben Isometrien, deren Gesamtheit als die Symmetrie der durch jene Teilung geschaffenen Natur anzuerkennen ist.

Um deren Beziehung zur neuen Poincaré-Gruppe zu erkennen, ist es notwendig, die Kartographie

$$q = x + y\cdot i + z\cdot i\cdot j + t\cdot j$$

zu wählen, in der $T(q) = 0$ mit $\bar{q}\cdot j - j\cdot q = 2t = 0$ gleichbedeutend ist. Da erscheint die Symmetrie der Natur als die Gesamtheit der Isometrien der Metrik

$$(dx^2 + dy^2 + dz^2 + dt^2)\cdot t^{-2}\,, \tag{1}$$

woraus zu ersehen ist, daß jede Poincaré-Matrix

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

eine Symmetrie

$$q \to \bar{q} = M(q) = (a\cdot q + b)\cdot (c\cdot q + d)^{-1}$$

der Natur bestimmt.

Ob es noch andere Symmetrien $q \to M(q)$ der Urzelle gibt, die Isometrien der Metrik (1) sind, kann mit der in 13 bewiesenen Gleichung 13 (3)

$$\left| \frac{d\bar{q}}{T(\bar{q})} \right|^2 = |M|^2 \cdot \left| \frac{dq}{T(q)} \right|^2$$

geprüft werden.

Daß

$$\left| \frac{d\bar{q}}{T(\bar{q})} \right|^2 = \left| \frac{dq}{T(q)} \right|^2$$

sein soll, ist nach 13 (3) mit

$$|\bar{T}(q)|^2 = |M|^2 \cdot |T(q)|^2$$

gleichbedeutend. Da $T(q)$ und $\bar{T}(q)$ reell sind, besagt dies

$$\bar{T}(q) = \pm |M| \cdot T(q),$$

d.h.

$${}^t\overline{M} \cdot T \cdot M = \pm |M| \cdot T$$

wegen 13 (2).

In der durch $T(q) = \bar{q} \cdot j - j \cdot q$ gekennzeichneten Karte q führt dies auf dieselbe Situation

$${}^t\overline{M} \cdot \begin{pmatrix} 0 & j \\ -j & 0 \end{pmatrix} \cdot M = \pm |M| \cdot \begin{pmatrix} 0 & j \\ -j & 0 \end{pmatrix},$$

die schon in 14 vorlag und dort gezeigt hat, daß entweder M selbst oder

$$M \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Poincaré-Matrix sein muß.

Um das Ergebnis 14 und 15 zusammenzufassen, werde vorausgesetzt, daß

$$q = x + y \cdot i + z \cdot i \cdot j + t \cdot j$$

die Karte der Urzelle sei, in der die Zellteilung $T(q) = 0$ durch

$$\bar{q} = q$$

beschrieben wird.

Dann sind folgende drei Aussagen gleichbedeutend:

1) Eine der beiden Matrizen

$$M \text{ und } M\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

ist Poincaré-Matrix.

2) $q \to M(q)$ ist Isometrie der Metrik

$$(dx^2 + dy^2 + dz^2 + dt^2)\cdot t^{-2}.$$

3) $q \to M(q)$ ist Symmetrie der Urzelle und bildet die Teilzellen $T(q) > 0$ und $T(q) < 0$ entweder auf sich selbst oder eine auf die andere ab.

16. - Individuen

Nach diesen Vorbereitungen kann es nicht mehr überraschen, wenn die Metrik

$$(dx^2 + dy^2 + dz^2 + dt^2)\cdot t^{-2}$$

als das Naturgesetz bezeichnet wird.

Mit der Zusammenfassung

$$\omega = x + y\cdot i + z\cdot i\cdot j + t\cdot j$$

der vier Koordinaten zu einer Quaternion wird das *Zwei-Zellen-Stadium Natur* als Ergebnis einer Teilung der *Urzelle*

$$H \cup \infty$$

in die Zellen $t > 0$ und $t < 0$ gedeutet, die beide mit jener Metrik vermessen werden können, während der Teil $t = 0$ der Urzelle, der künftig einfact der *Spiegel* heiße, nur der Winkelmessung der Urzelle erreichbar ist.

Die vierte Koordinate t heiße die *Zeit*, obwohl sie erst durch die Substitution

$$t \to \sqrt{-1}\cdot c_0\cdot t$$

zu der von der Physik gemeinten reellen Variablen wird.

Die Zeit ist relativ, denn bei anderer Wahl

$$\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t},$$

des Koordinatensystems ist nach 14 (7)

$$\bar{t} = \pm\,|c\cdot\omega + d|^{-2}\cdot t,$$

wenn

$$\omega \to \bar{\omega} = (a \cdot \omega + b) \cdot (c \cdot \omega + d)^{-1}$$

die Koordinaten-Transformation beschreibt.

Zeit-Umkehr liegt genau dann vor, wenn

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

keine Poincaré-Matrix ist.

Der Spiegel, der Anfang der Zeit, ist absolut.

17. - Die Natur wird erlebt als eine Gesellschaft von Individuen. Wie weit der Begriff «Individuum» reicht, muß als unbekannt gelten. Schon die Vielfat der biologischen Erscheinungen erweckt den Verdacht, daß sie wie eine spektrale Zerlegung der Natur zu bewerten sei und daß es Individuen gibt, die von der Wissenschaft noch nicht entdeckt sind. Der Reichtum an Symmetrien der Natur, den die neue Poincaré-Gruppe zu verkünden scheint, bietet eine Möglichkeit, den Begriff des Individuums zu präziesieren, was folgende Axiome versuchen:

I) Jedes Individuum hat *Identität*, die eine Untergruppe der Gruppe aller Poincaré-Matrizen ist.

II) Unter allen Karten

$$\omega = x + y \cdot i + z \cdot i \cdot j + t \cdot j$$

der Urzelle, in denen das Naturgesetz die Gestalt

$$(dx^2 + dy^2 + dz^2 + dt^2) \cdot t^2$$

annimmt, ist eine Quaternion ω ausgezeichnet als das Tao der Natur.

III) Jede Poincaré-Matrix M, die zur Identität eines Individuums gehört, bestimmt mit dem Tao ω der Natur zusammen eine Symmetrie $\omega \to M(\omega)$ des Individuums, und andere Symmetrien hat das Individuum nicht.

IV) Ein Individuum lebt dann und nur dann in einem anderen Individuum, wenn seine Identität Untergruppe der Identität des anderen Individuums ist.

18. - Die Gesamtheit aller Poincaré-Matrizen werde mit

$$SL_2(\mathrm{H})$$

bezeichnet, wobei der Anteil S des Zeichens auf das Bestehen der Relationen

6(2) $$\bar{a} \cdot c = \bar{c} \cdot a, \quad \bar{d} \cdot b = \bar{b} \cdot d, \quad \bar{a} \cdot d - \bar{c} \cdot b = 1$$

hinweise, die

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

als Poincaré-Matrix unter allen Quaternionen-Matrizen kennzeichnen.

Es ist üblich, die Gruppe der Matrizen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

deren Element a, b, c, d einem kommutativen Ringe r angehören und nur der Bedingung $a \cdot d - b \cdot c = 1$ unterworfen sind, mit

$$SL_2(r)$$

zu bezeichnen.

Da alle räumlichen, d.h. zu $\mathrm{R} + \mathrm{R} \cdot i + \mathrm{R} \cdot i \cdot j$ gehörigen Quaternionen q bei «Zeit-Umkehr»

$$q \to \bar{q}$$

invariant bleiben und $\mathrm{R} + \mathrm{R} \cdot i$ kommutativ ist, sind im Falle eines Unterringes r von $\mathrm{R} + \mathrm{R} \cdot i$ alle Gruppen $SL_2(r)$ auch Untergruppen von $SL_2(\mathrm{H})$.

Der hier vorgetragenen Auffassung des Begriffs «Identität eines Individuums» stehen also alle Erfahrungen der Theorie der automorphen Funktionen zur Verfügung, und es sei hier schon auf die Notwendigkeit hingewiesen, bei folgenden Gruppen zu prüfen, ob sie auf Individuen hinweisen, deren Erkenntnis für die Erfoschung der Natur wesentlich ist:

$$SL_2(\mathrm{Z}) \text{ und ihre Untergruppen}$$

$$SL_2\left(\mathrm{Z} + m \cdot \frac{d + \sqrt{|d|} \cdot i}{2} \cdot \mathrm{Z}\right)$$

mit natürlichen Zahlen m, $|d|$,

$$SL_2(\mathrm{Q} + \mathrm{Q} \cdot i \cdot \sqrt{|d|}),$$

wo d die Diskriminante eines quadratischen Zahlkörpers bezeichnet. Denkbar ist auch, daß das Paar

$$\pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

allein die Identität eines Individuums ist und damit etwa aussagt: «Ich bin, der ich bin». Von diesem Individuum könnte man sagen, daß es in jedem anderen Individuum lebt.

19. - Innerer Differential-Kalkül

Sobald in einem n-dimensionalen Raume eine Riemannsche Metrik

$$g_{ik} \cdot dx^i \cdot dx^k$$

gegeben ist, wird der *Grassmann*-Kalkül der äußeren Differentialformen überlargert durch den *Clifford-Kalkül*, der zu der äußeren mit $\wedge$ bezeichneten Multiplikation eine *innere Multiplikation*, die $\vee$ geschrieben wird, hinzufügt.

Die Gesamtheit der aus äußeren Differentialformen u_p vom Grade p herstellbaren Summen

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$

wird dadurch auf zwei Weisen zu einem Ring, dessen Elemente einfach *Differentiale* genannt werden mögen.

Neben der durch

$$du = dx^i \wedge d_i u$$

definierten äußeren Differentiation d, die trotz der hier verwendeten kovarianten Differentiation d_i nur scheinbar von der Metrik abhängt, gibt es eine *innere Differentiation*

$$\partial u = dx^i \vee d_i u\,,$$

deren große Bedeutung erst durch die *Diracsche* Theorie des Elektrons offenbar geworden ist.

Im Ringe D der Differentiale sind lineare Operatoren

$$\eta, \zeta, \gamma, e_i$$

erklärt durch ihre Wirkungen auf äußere homogene Differentialformen u vom Grade p:

$$\eta u = (-1)^p \cdot u\,, \quad \zeta u = (-1)^{\binom{p}{2}} \cdot u\,, \quad \gamma u = p \cdot u\,, \quad e_i u = v\,,$$

wenn $u = dx^i \wedge v + w$ ist und dabei v, w als reduzierte Differentialformen vom Grade $p-1$ bzw. p das Differential dx^i nicht enthalten. Als Gegenstück zu der bekannten Regel

$$d(u \wedge v) = du \wedge v + \eta u \wedge dv$$

sei die Formel

(1) $$\partial(u \vee v) = \partial u \vee v + \eta u \vee \partial v + 2 \cdot e^i u \vee d_i v$$

erwähnt, wo $e^i u$ durch

$$e^i u = g^{ik} \cdot e_k u$$

definiert ist.

Mittels schiefsymmetrischer Tensoren $a_{i_1 \ldots i_p}$ kann jedes Differential u auf genau eine Weise als Summe

$$(2) \qquad u = \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!} \cdot a_{i_1 \ldots i_p} \cdot dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p} = a + a_i \cdot dx^i + \frac{1}{2!} a_{ik} \cdot dx^i \wedge dx^k + \ldots$$

geschrieben werden.

Die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial u}{\partial x^k}$$

eines Differentials u sind nicht die Komponenten eines einstufigen kovarianten Tensors, sondern durch

$$\frac{\partial u}{\partial x^k} = \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!} \cdot \frac{\partial}{\partial x^k} a_{i_1 \ldots i_p} \cdot dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}$$

definiert. Mit kovarianten Ableitungen $d_k u$ stehen sie in der Beziehung

$$(3) \qquad d_k u = \frac{\partial u}{\partial x^k} - \omega^r_k \wedge e_r u \,,$$

wo die aus den Christoffel-Symbolen Γ^i_{kl} gebildeten Pfaffschen Formen

$$\omega^i_k = \Gamma^i_{kl} dx^l$$

zu den Krümmungstensoren

$$\Omega^i_k \,, R^i{}_{kjl}$$

in der Beziehung

$$(4) \qquad \Omega^i_k = d\omega^i_k + \omega^i_j \wedge \omega^j_k = \frac{1}{2} R^i{}_{kjl} \cdot dx^j \wedge dx^l$$

steht. Der *Einstein*-Tensor

$$R_{ik} = R^l_{ikl}$$

kann durch innere Multiplikation aus Ω_{ik} gewonnen werden:

$$(5) \qquad \begin{cases} R_{ik} \cdot dx^k = dx^k \vee \Omega_{ik} = -\Omega_{ik} \vee dx^k \,, \\ R = g^{ik} \cdot R_{ik} = dx^i \vee dx^k \vee \Omega_{ik} = \Omega_{ik} \vee dx^i \vee dx^k = -dx^i \vee \Omega_{ik} \vee dx^k \,. \end{cases}$$

Jedem Paare u, v von Differentialen wird durch die Formel

$$(6) \qquad (u, v) = (\zeta u \vee v) \wedge \tau \,,$$

in der τ das Volumen-Differential bezeichnet, ein Differential n-ten Grades zugeordnet, das als das *Skalar-Produkt* von u und v bezeichnet werde, obwohl es dem üblichen Gebrauche dieses Wortes besser entspräche, das Integral dieses Differentials so zu nennen.

Deutet der Index 0 am Zeichen eines Differentials an, daß der Anteil 0-ten Grades in der Darstellung dieses Differentials als Summe seiner äußeren homogenen Bestandteile gemeint ist, so kann die Definition (6) auch so formuliert werden:

(7) $$(u, v) = (\zeta u \vee v)_0 \cdot \tau .$$

Das Skalar-Produkt hat die Eigenschaften:

(8) $$(u, v) = (v, u) = (\eta u, \eta v) = (\zeta u, \zeta v) = (u \vee \tau, v \vee \tau) .$$

(9) (u, v) ist 0, wenn u, v homogen von verschiedenem Grade sind.

(10) $$(u \vee w, v) = (u, v \vee \zeta w), \quad (w \vee u, v) = (u, \zeta w \vee v) .$$

u, v, w bezeichnen dabei beliebige Differenatiable.

Homogen heiße ein Differential genau dann, wenn es als äußeres Polynom homogen ist.

Das erste *abgeleitete Skalar-Produkt* von u und v ist definert durch

(11) $$(u, v)_1 = (\zeta u \vee dx^i \vee v)_0 \cdot e_i \tau = e_i (dx^i \vee u, v) .$$

Es hat die Eigenschaften

(12) $$(u, v)_1 = (v, u)_1 = - (\eta u, \eta v)_1 = (u \vee \tau, v \vee \tau)_1 ,$$

(13) $$(u \vee w, v)_1 = (u, v \vee \zeta w)_1 .$$

Seine Bedeutung erhält es aus der als *Greensche Formel* zu bezeichnenden Relation

(14) $$d(u, v)_1 = (\delta u, v) + (u, \delta v) .$$

«Der innere Differentialkalkül» ist in einer Abhandlung gleichen Namens in den *Rendiconti di Matematica*, 21 (1962), pp. 425-523 ausführlich entwickelt worden, und von der dortigen Formelsammlung wird hier laufend Gebrauch gemacht. Eine kürzere Darstellung des Kalküls findet sich in den *Hamburger Abhandlungen*, 25 (1962), pp. 192-205.

20. - Im Falle des Naturgesetzes

$$(dx^2 + dy^2 + dz^2 + dt^2) \cdot t^{-2}$$

sind

(1) $$dx \vee dx = dy \vee dy = dz \vee dz = dt \vee dt = t^2$$

Jedes aus Differentialen, dx, dy, dz, dt gebildete innere Produkt, wo keines dieser Differentiale mehr als ein Mal als Faktor auftritt, ist gleich dem entsprechenden äußeren Produkte.

Es sind also z.B.

$$dx \vee dy = dx \wedge dy\,, \quad dx \vee dt = dx \wedge dt\,,$$
$$dy \vee dz = dy \wedge dz\,, \quad dy \vee dt = dy \wedge dt\,,$$
$$dz \vee dx = dz \wedge dx\,, \quad dz \vee dt = dz \wedge dt\,.$$

Das Volumen-Differential

$$\tau = \frac{dx \wedge dy \wedge dz \wedge dt}{t^4} = \frac{dx \vee dy \vee dz \vee dt}{t^4}$$

genügt der Gleichung

$$\tau \vee \tau = 1$$

welche Anlaß gibt, die Differentiale

$$e^+ = \frac{1+\tau}{2}\,, \quad e^- = \frac{1-\tau}{2}$$

zu bilden, die wegen

(2) $$e^+ \vee e^+ = e^+\,, \quad e^- \vee e^- = e^-\,, \quad e^+ \vee e^- = e^- \vee e^+ = 0$$

zur Zerlegung

$$D = D^+ + D^-$$

des Ringes D aller Differentiale in die durch

$$u \in D^+ \leftrightarrow u \vee e^+ = u\,, \quad u \vee e^- = 0\,,$$
$$u \in D^- \leftrightarrow u \vee e^- = u\,, \quad u \vee e^+ = 0$$

definierten Teilmoduln D^+, D^- einladen.

Zuweilen ist es nützlich, die Variablen x, y, z, t durchzunummerieren, was dann stets in der Reihenfolge

$$x = x^1\,, \quad y = x^2\,, \quad z = x^3\,, \quad t = x^4$$

geschehe.

Umgekehrt sei erlaubt,

$$d_x, d_y, d_z, d_t \quad \text{statt} \quad d_1, d_2, d_3, d_4$$
$$e_x, e_y, e_z, e_t \quad \text{statt} \quad e_1, e_2, e_3, e_4$$

zu schreiben.

Aus den Formeln

$$(3)\qquad \begin{cases} d_x u = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{dt}{t} \wedge e_x u - \dfrac{dx}{t} \wedge e_t u\,, \\ d_y u = \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{dt}{t} \wedge e_y u - \dfrac{dy}{t} \wedge e_t u\,, \\ d_z u = \dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{dt}{t} \wedge e_z u - \dfrac{dz}{t} \wedge e_t u\,, \\ d_t u = \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{1}{t} \cdot \gamma u\,, \end{cases}$$

für die kovariante Differentiation folgt, daß der Dirac-Operator ∂, die innere Differentiation, die Wirkung

$$(4)\qquad \partial u = dx \vee \frac{\partial u}{\partial x} + dy \vee \frac{\partial u}{\partial y} + dz \vee \frac{\partial u}{\partial z} + dt \vee \frac{\partial u}{\partial t} + 2t\cdot(\gamma - 1)e_t u$$

hat, während die äußere Differentiation bekanntlich durch

$$du = dx \wedge \frac{\partial u}{\partial x} + dy \wedge \frac{\partial u}{\partial y} + dz \wedge \frac{\partial u}{\partial z} + dt \wedge \frac{\partial u}{\partial t}$$

beschrieben werden kann.

21. - Dirac-Gleichungen

Seit dem Erfolg der Dirac-Gleichung des Elektrons haben allgemein Dirac-Gleichungen Aufmerksamkeit gefunden.

Zum inneren Differentialkalkül gehörig, setzen sie eine Riemannsche Metrik voraus und verlangen, bei gegebenem Differential a die durch

$$\partial u = a \vee u$$

definierten Differentiale u zu bestimmen.

Vorbild ist dabei die Diracsche Theorie des Elektrons, die im Falle der Metrik

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 \cdot dt^2$$

verlangt, die Gleichung

$$\partial u = \frac{2\pi i}{h}\,(i \cdot c \cdot m + e \cdot \omega) \vee u$$

zu lösen.

Dabei bezeichnen

c die Lichtgeschwindigkeit,

e, m Ladung und Ruhmasse des Elektrons,

und die Pfaffsche Form ω ist das Potential des elektro-magnetischen Feldes, also

$\omega = 0$ im Vakuum,

$$\omega = \frac{Z \cdot e}{r} \cdot dt$$

im Zentralfeld mit der Ladung $Z \cdot e$.

22. - Allgemein werde bei einer Dirac-Gleichung

$$\partial u = a \vee u \tag{1}$$

das gegebene Differential a das *Potential* der Gleichung genannt und

$$A = da + \eta a \wedge a \tag{2}$$

gelte als das *Kraftfeld* der Dirac-Gleichung.

Wenn das Potential b einer Dirac-Gleichung

$$\partial v = b \vee v \tag{3}$$

zu dem Potential a von

$$\partial u = a \vee u$$

in der Beziehung

$$b = - \zeta a$$

steht, werde die Gleichung (3) zur Gleichung (1) *adjungiert* genannt.

Das Kraftfeld zu (3) ist dann

$$B = d(- \zeta a) + \eta(- \zeta a) \wedge (- \zeta a),$$

was wegen der Operator-Regeln

$$d\zeta + \eta\zeta d = 0, \quad \eta\zeta = \zeta\eta, \quad d\eta + \eta d = 0 \tag{4}$$

sich zu

$$B = \eta\zeta A$$

vereinfacht.

Die Bedeutung der Adjunktion von Dirac-Gleichungen zeigt folgende Überlegung:

Aus

$$\partial u = a \vee u, \quad \partial v = - \zeta a \vee v$$

folgt mittels der (in 19 (14) mitgeteilten) Greenschen Formel

$$d(u, v)_1 = (\partial u, v) + (u, \partial v) = (a \vee u, v) - (u, \zeta a \vee v),$$

was nach 19 (10) gleich 0 ist.

Damit ist erkannt, daß eine aus Lösungen u, v adjungierter Dirac-Gleichungen hergestellte homogene Differentialform $(n-1)$ten Grades $(u, v)_1$ im Sinne der Gleichung

(5) $$d(u, v)_1 = 0$$

geschlossen ist, wenn n die Dimension des Raumes bezeichnet.

23. - *Konstant* mag ein Differential v genau dann heißen wenn, seine kovarianten Ableitungen $d_i v$ sämtlich gleich 0 sind. Z.B. ist in jeder Metrik das Volumen-Differential konstant.

Die Folgerung

$$\partial(u \vee v) = \partial u \vee v$$

der Regel 19 (1) aus der Annahme $d_i v = 0$ zeigt, daß Rechts-Multiplikation mit einem konstanten Differential eine Lösung einer Dirac-Gleichung stets wieder in eine Lösung derselben Dirac-Gleichung verwandelt.

Die im Falle der Metrik

$$(dx^2 + dy^2 + dz^2 + dt^2) \cdot t^{-2}$$

(in 20) eingeführten Differentiale

$$e^+ = \frac{1+\tau}{2}, \quad e^- = \frac{1-\tau}{2}$$

sind konstant.

Jedes Differential u ist Summe

$$u = v^+ \vee e^+ + v^- \vee e^-,$$

in der v^+ und v^- in dem Sinne *Raum-Differentiale* sind, daß sie als äußere Polynome geschrieben werden können, in denen dt nicht vorkommt.

Ein Raum-Differential

$$v = a + b_1 \cdot dx + b_2 \cdot dy + b_3 \cdot dz +$$
$$+ c_1 \cdot dy \wedge dz + c_2 \cdot dz \wedge dx + c_3 \cdot dx \wedge dy + b \cdot dx \wedge dy \wedge dz$$

bestimmt zwei Skalare a, b und zwei Vektor-Felder

$$(b_1, b_2, b_3) = \mathfrak{b}, \quad (c_1, c_2, c_3) = \mathfrak{c}.$$

Wegen der Konstanz von $e^{\pm}$ gilt

$$\partial(v \vee e^{\pm}) = \partial v \vee e^{\pm} = v^* \vee e^{\pm},$$
$$\partial\partial(v \vee e^{\pm}) = \partial\partial v \vee e^{\pm} = v^{**} \vee e^{\pm},$$

wobei v^* und v^{**} zufolge der Regeln

$$e^{\pm} \vee e^{\pm} = e^{\pm}, \quad e^{\pm} \vee e^{\mp} = 0$$

als Raum-Differentiale gewählt werden können.

Bezeichnen

$a^*, b^*, \mathfrak{b}^*, \mathfrak{c}^*$ die Skalare und Vektorfelder zu v^*,
$a^{**}, b^{**}, \mathfrak{b}^{**}, \mathfrak{c}^{**}$ die Skalare und Vektorfelder zu v^{**},

so gilt

$$\begin{aligned}
a^* &= t^2 \cdot \operatorname{div} \mathfrak{b} \mp t^4 \cdot \frac{\partial b}{\partial t}, \\
b^* &= \operatorname{div} \mathfrak{c} \mp t^{-2} \cdot \frac{\partial a}{\partial t}, \\
\mathfrak{b}^* &= \operatorname{grad} a - t^2 \cdot \left(\operatorname{rot} \mathfrak{c} \mp \frac{\partial \mathfrak{c}}{\partial t} \right), \\
\mathfrak{c}^* &= t^2 \cdot \operatorname{grad} b + \operatorname{rot} \mathfrak{b} \pm \frac{\partial \mathfrak{b}}{\partial t}, \\
a^{**} &= t^2 \cdot \Delta a - 2t \cdot \frac{\partial a}{\partial t}, \\
b^{**} &= t^2 \cdot \Delta b \mp \frac{2}{t} \cdot \operatorname{div} \mathfrak{b} + 4t \cdot \frac{\partial b}{\partial t}, \\
\mathfrak{b}^{**} &= t^2 \cdot \Delta \mathfrak{b} \pm 2t^3 \cdot \operatorname{grad} b, \\
\mathfrak{c}^{**} &= t^2 \Delta \mathfrak{c} \mp 2t \cdot \left(\operatorname{rot} \mathfrak{c} \mp \frac{\partial \mathfrak{c}}{\partial t} \right).
\end{aligned}$$

Unter Δ ist dabei der 4-dimensionale *Laplace-Operator* zu verstehen.

24. - Wie es zu *Heisenbergs* Zeiten sinnvoll erschien, nach einer universellen Wellengleichung der Materie zu trachten, so wird man hier, wo der Begriff «Individuum» die Aufmerksamkeit fesselt, eine *für alle Individuen gültige Wellengleichung* suchen.

Dafür dürfte es kaum eine andere Wahl geben als die in der Metrik

(1) $$(dx^2 + dy^2 + dz^2 + dt^2) \cdot t^{-2}$$

zu verstehende Dirac-Gleichung

(2) $$\partial u = \lambda \cdot u$$

mit konstantem Potential λ.

Wenn allgemein uM das bei einer Substitution $\omega \to M(\omega)$ aus einem Differential u entstehende Differential bezeichnet, so gilt

$$\begin{aligned}
\partial(uM) &= (\partial u) M, \\
(u \vee v) M &= (uM) \vee (vM),
\end{aligned}$$

wenn M eine Poincaré-Matrix bezeichnet, weil dann $\omega \to M(\omega)$ eine Isometrie der den inneren Kalkül begründenden Metrik darstellt. In diesem Falle folgt aus $\eth u = \lambda \cdot u$ stets, daß auch $v = uM$ der Dirac-Gleichung $\eth v = \lambda \cdot v$ genügt.

Zu den Bedingungen, unter denen die Wellengleichung $\eth u = \lambda \cdot u$ zu lösen ist, wird immer die gehören, daß u in der Zelle $t > 0$ analytisch regulär sei und bei Annäherung an den Spiegel $t = 0$ ein bestimmtes Verhalten zeige.

Die Identität I eines Individuums kann Anlaß geben, als Invariante des Inividuums diejenigen Differentiale auszuzeichnen, die bei allen Symmetrien des Individuums invariant sind, d.h. für die $uM = u$ für alle $M \in I$ gilt.

Die Herstellung solcher Invarianten kann sich in vielen Fällen darauf berufen, daß aus einer beliebigen Lösung von $\eth v = \lambda \cdot v$ durch Summation

$$\sum_{M \in I} vM$$

— wenn diese konvergent ist — eine Invariante des Individuums entsteht.

25. - Die Dirac-Gleichung $\eth u = \lambda \cdot u$ kann unter der Nebenbedingung, daß u nur von t und dt abhänge, gelöst werden.

Da stets $t > 0$ bleiben soll, kann

$$u = v + w \cdot \frac{dt}{t}$$

gesetzt werden, wobei v und w Funktionen von t sind.

Nach 20 (3) ist

$$\eth u = dt \vee \left(\dot{v} - w \cdot t^{-2} \cdot dt + \dot{w} \cdot \frac{dt}{t}\right) - 2w = \dot{w} \cdot t - 3 \cdot w + \dot{v} \cdot dt\,,$$

was gleich

$$\lambda \cdot \left(v + w \cdot \frac{dt}{t}\right)$$

gesetzt, die Gleichungen

$$\dot{w} \cdot t - 3w = \lambda \cdot v\,, \quad t \cdot \dot{v} = \lambda \cdot w$$

ergibt. (Punktierung bedeute Ableitung nach t.)

Im Falle $\lambda = 0$ sind

$$u = 1 \quad \text{und} \quad u = t^2 \cdot dt$$

Lösungen von $\eth u = 0$ und für $\lambda \neq 0$ ist

$$w = \frac{t}{\lambda} \cdot \dot{v}$$

und darum v durch

$$\ddot{v} \cdot t^2 - 2\dot{v} \cdot t - \lambda^2 \cdot v = 0$$

bestimmt.

Bezeichnet σ eine der beiden Wurzeln der Gleichung

$$\sigma \cdot (\sigma - 3) = \lambda^2$$

so ist

$$u = t^{\sigma} \cdot \left(1 + \frac{\sigma}{\lambda} \cdot \frac{dt}{t}\right)$$

Lösung von $\eth u = \lambda \cdot u$, und mit beliebigen Konstanten g,h erweist sich

$$u = g \cdot t^{\sigma} \cdot \left(1 + \frac{\sigma}{\lambda} \cdot \frac{dt}{t}\right) + h \cdot t^{3-\sigma} \cdot \left(1 + \frac{3-\sigma}{\lambda} \cdot \frac{dt}{t}\right)$$

als die allgemeine Lösung von $\eth u = \lambda \cdot u$ unter den genannten Bedingungen.

26. - Die Lösung der Dirac-Gleichung

(1) $$\eth u = \lambda \cdot u$$

kann nach 23 unter einer der beiden Nebenbedingungen

$$u \vee \tau = u \quad \text{oder} \quad u \vee \tau = -u$$

erfolgen, die hier unter der Schreibweise

$$u \vee \tau = \pm u$$

zusammengefaßt werden mögen.

Es gilt dann notwendig

(2) $$u = v \vee e^{\tau}$$

mit einem Raum-Differential v, dessen Skalare a, h und Vektor-Felder $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ nach 23 den Bedingungen

(3) $$\left\{\begin{array}{l} \text{I)}\ t^2 \cdot \operatorname{div} \mathfrak{b} \mp t^4 \cdot \dfrac{\partial h}{\partial t} = \lambda \cdot a, \\ \text{II)}\ \operatorname{div} \mathfrak{c} \mp t^{-2} \cdot \dfrac{\partial a}{\partial t} = \lambda \cdot h, \\ \text{III)}\ \operatorname{grad} a - t^2 \cdot \left(\operatorname{rot} \mathfrak{c} \mp \dfrac{\partial \mathfrak{c}}{\partial t}\right) = \lambda \cdot \mathfrak{b}, \\ \text{IV)}\ t^2 \cdot \operatorname{grad} h + \operatorname{rot} \mathfrak{b} \pm \dfrac{\partial \mathfrak{b}}{\partial t} = \lambda \cdot \mathfrak{c} \end{array}\right.$$

zu unterwerfen sind.

Diese 4 Gleichungen sind mit dem Bestehen von (1) und (2) gleichbedeutend.

Aus (1) folgt auch

$$\mathfrak{D}u = \lambda^2 \cdot u,$$

was nach 23 die Aussagen

$$(4) \qquad \begin{cases} \text{I)} \; t^2 \cdot \Delta a - 2t \cdot \dfrac{\partial a}{\partial t} = \lambda^2 \cdot a, \\ \text{II)} \; t^2 \cdot \Delta b \mp \dfrac{2}{t} \cdot \operatorname{div} \mathfrak{b} + 4t \cdot \dfrac{\partial b}{\partial t} = \lambda^2 \cdot b, \\ \text{III)} \; t^2 \cdot \Delta \mathfrak{b} \pm 2t^3 \cdot \operatorname{grad} b = \lambda^2 \cdot \mathfrak{b}, \\ \text{IV)} \; t^2 \cdot \Delta \mathfrak{c} \mp 2t \cdot \left(\operatorname{rot} \mathfrak{c} \mp \dfrac{\partial \mathfrak{c}}{\partial t} \right) = \lambda^2 \cdot \mathfrak{c} \end{cases}$$

zur Folge hat.

Im Falle $\lambda \neq 0$, der zunächst behandelt werden soll, genügt es, um (1) und (2) zu erfüllen, a und $\mathfrak{c}$ den Bedingungen

$$(4) \qquad \begin{cases} \text{I)} \; t^2 \cdot \Delta a - 2t \cdot \dfrac{\partial a}{\partial t} - \lambda^2 \cdot a = 0, \\ \text{IV)} \; t^2 \cdot \Delta \mathfrak{c} \mp 2t \cdot \left(\operatorname{rot} \mathfrak{c} \mp \dfrac{\partial \mathfrak{c}}{\partial t} \right) - \lambda^2 \cdot \mathfrak{c} = 0 \end{cases}$$

zu unterwerfen und b und $\mathfrak{b}$ aus den Gleichungen

$$(3) \qquad \begin{cases} \text{II)} \; \lambda \cdot b = \operatorname{div} \mathfrak{c} \mp t^{-2} \cdot \dfrac{\partial a}{\partial t}, \\ \text{III)} \; \lambda \cdot \mathfrak{b} = \operatorname{grad} a - t^2 \cdot \left(\operatorname{rot} \mathfrak{c} \mp \dfrac{\partial \mathfrak{c}}{\partial t} \right) \end{cases}$$

zu entnehmen, wie folgende Rechnung zeigt:

$$\lambda \cdot t^2 \cdot \operatorname{div} \mathfrak{b} = t^2 \cdot \left(\frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial z^2} \right) \pm t^4 \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \mathfrak{c}),$$

$$\mp \lambda \cdot t^4 \cdot \frac{\partial b}{\partial t} = \mp t^4 \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \mathfrak{c}) + t^2 \cdot \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} - 2t \cdot \frac{\partial a}{\partial t},$$

woraus das Bestehen von (3) I) zu erkennen ist, wenn man (4) I) und $\lambda \neq 0$ beachtet.

Um auch (3) IV) zu bestätigen, hat man zu beachten:

$$\lambda \cdot t^2 \cdot \operatorname{grad} b = \mp \operatorname{grad} \frac{\partial a}{\partial t} + t^2 \cdot \operatorname{grad} (\operatorname{div} \mathfrak{c}),$$

$$\pm \lambda \cdot \frac{\partial \mathfrak{b}}{\partial t} = \pm \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{grad} a) \mp 2t \cdot \left(\operatorname{rot} \mathfrak{c} \mp \frac{\partial \mathfrak{c}}{\partial t} \right) \mp t^2 \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathfrak{c} \mp \frac{\partial^2 \mathfrak{c}}{\partial t^2} \right),$$

$$\lambda \cdot \operatorname{rot} \mathfrak{b} = - t^2 \cdot \operatorname{rot} (\operatorname{rot} \mathfrak{c}) \pm t^2 \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{rot} \mathfrak{c})$$

und die Formel

$$\operatorname{rot} (\operatorname{rot} \mathfrak{c}) = \operatorname{grad} (\operatorname{div} \mathfrak{c}) - \frac{\partial^2 \mathfrak{c}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \mathfrak{c}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \mathfrak{c}}{\partial z^2}$$

anzuwenden, was

$$\lambda \left(t^2 \cdot \operatorname{grad} b \pm \frac{\partial \mathfrak{b}}{\partial t} + \operatorname{rot} \mathfrak{b} \right) = t^2 \cdot \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{c}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{c}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{c}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{c}}{\partial t^2} \right) + 2t \frac{\partial \mathfrak{c}}{\partial t} \mp 2t \cdot \operatorname{rot} \mathfrak{c}$$

ergibt.

Da dies nach (4) IV) gleich $\lambda^2 \cdot \mathfrak{c}$ und $\lambda \neq 0$ ist, erweist sich auch (3) IV) als Folge von (3) II) und III), (4) I) und IV),.

Um das Ergebnis dieser Überlegung knapp formulieren zu können, werde für Raum-Differentiale die Bezeichnung

$$a + \mathfrak{b} \cdot d\mathfrak{x} + \mathfrak{c} \cdot d\sigma + b \cdot w$$

mit Skalaren a, b und

$$(5) \qquad \begin{cases} w = dx \wedge dy \wedge dz, \\ d\mathfrak{x} = (dx, dy, dz), \\ d\sigma = (dy \wedge dz, dz \wedge dx, dx \wedge dy), \\ \mathfrak{b} \cdot d\mathfrak{x} = b_1 \cdot dx + b_2 \cdot dy + b_3 \cdot dz, \\ \mathfrak{c} \cdot d\sigma = c_1 \cdot dy \wedge dz + c_2 \cdot dz \wedge dx + c_3 \cdot dx \wedge dy \end{cases}$$

verwendet.

Dann kann behauptet werden:

Die Gleichung $\partial u = \lambda \cdot u$ mit konstantem $\lambda \neq 0$ wird unter der Nebenbedingung

$$u \vee \tau = \pm u$$

allgemein gelöst durch

$$u = v \vee e^{\varkappa},$$

wo das Raum-Differential

$$(6) \qquad v = a + \mathfrak{b} \cdot d\mathfrak{x} + \mathfrak{c} \cdot d\sigma + b \cdot w$$

allein den Bedingungen

(7) $$t^2 \cdot \Delta a - 2t \cdot \frac{\partial a}{\partial t} - \lambda^2 \cdot a = 0,$$

(8) $$\begin{cases} t^2 \cdot \Delta \mathfrak{c} \mp 2t \cdot \left(\operatorname{rot} \mathfrak{c} \mp \dfrac{\partial \mathfrak{c}}{\partial t}\right) - \lambda^2 \mathfrak{c} = 0, \\ \lambda \cdot b = \operatorname{div} \mathfrak{c} \mp t^{-2} \cdot \dfrac{\partial a}{\partial t}, \\ \lambda \cdot \mathfrak{b} = \operatorname{grad} a - t^2 \cdot \left(\operatorname{rot} \mathfrak{c} \mp \dfrac{\partial \mathfrak{c}}{\partial t}\right) \end{cases}$$

unterworfen ist.

Die Gleichung (7) sagt nur aus

(9) $$\delta\partial a = \lambda^2 \cdot a,$$

denn nach 23 ist

$$\delta\partial a \vee e^{\pm} = \left(t^2 \cdot \Delta a - 2t \cdot \frac{\partial a}{\partial t}\right) \vee e^{\pm},$$

woraus wegen $e^+ + e^- = 1$ jene Gleichung folgt.

Die erste der Gleichungen (8) kann nach 23 durch

(10) $$\delta\partial \mathfrak{c} \vee e^{\pm} = \lambda^2 \cdot \mathfrak{c} \vee e^{\pm}$$

ersetzt werden (wobei die Rechts-Multiplikation mit $e^{\pm}$ unvermeidlich ist).

27. - Das innere Differential $\delta\gamma$ eines Raum-Differentials, das homogen vom Grade 2, also von der Form

$$\gamma = \mathfrak{c} \cdot d\sigma = c_1 \cdot dy \wedge dz + c_2 \cdot dz \wedge dx + c_3 \cdot dx \wedge dy$$

ist, genügt nach 23 der Gleichung

$$\delta\gamma \vee e^{\pm} = \left[-t^2 \cdot \left(\operatorname{rot} \mathfrak{c} \mp \frac{\partial \mathfrak{c}}{\partial t}\right) \cdot d\mathfrak{r} + (\operatorname{div} \mathfrak{c}) \cdot w\right] \vee e^{\pm}$$

und für das totale Differential $da = \partial a$ einer Funktion a gilt nach 23:

$$\delta a \vee e^{\pm} = \left[(\operatorname{grad} a) \cdot d\mathfrak{r} \mp t^{-2} \cdot \frac{\partial a}{\partial t} \cdot w\right] \vee e^{\pm}.$$

Da nun, wie in 26 bewiesen, die Lösung $u = v \vee e^{\pm}$ von

$$\partial u = \lambda \cdot u, \quad u \vee \tau = \pm u$$

durch das Raum-Differential

$$v = a + \frac{1}{\lambda} \cdot \left[(\mathrm{grad}\, a) - t^2 \cdot \left(\mathrm{rot}\, \mathfrak{c} \mp \frac{\partial \mathfrak{c}}{\partial t} \right) \right] \cdot d\mathfrak{t} + \mathfrak{c} \cdot d\sigma + \frac{1}{\lambda} \cdot \left[\mathrm{div}\, \mathfrak{c} \mp t^{-2} \cdot \frac{\partial a}{\partial t} \right] \cdot w$$

bestimmt ist, kann sie auch in der einfachen Form

$$u = \left(a + \frac{1}{\lambda} \cdot \partial a \right) \vee e^{\tau} + \left[\gamma + \frac{1}{\lambda} \cdot \partial \gamma \right) \vee e^{\tau} \tag{1}$$

dargestellt werden, wobei $\mathfrak{a}$ und γ nur den Bedingungen

$$\begin{cases} \partial \partial a = \lambda^2 a, \\ (\partial \partial \mathfrak{c} - \lambda^2 \mathfrak{c}) \vee e^{\tau} = 0 \end{cases} \tag{2}$$

unterworfen sind.

28. - Im Falle $\lambda = 0$ wo die beiden Gleichungen

$$\partial u = 0, \quad u \vee \tau = \pm u \tag{1}$$

zu erfüllen sind, hat man das durch

$$u = u \vee e^{\tau} = v \vee e^{\tau}$$

bestimmte Raum-Differential

$$v = a + \mathfrak{b} \cdot d\mathfrak{t} + \mathfrak{c} \cdot d\sigma + b \cdot w$$

nach 26 (3) den Bedingungen

$$\begin{cases} \mathrm{rot}\, \mathfrak{b} \pm \dfrac{\partial \mathfrak{b}}{\partial t} = -\, \mathrm{grad}\,(t^2 \cdot b), & \mathrm{rot}\, \mathfrak{c} \mp \dfrac{\partial \mathfrak{c}}{\partial t} = \mathrm{grad}\,(t^{-2} \cdot a), \\ \mathrm{div}\, \mathfrak{b} = \pm t^2 \cdot \dfrac{\partial b}{\partial t}, & \mathrm{div}\, \mathfrak{c} = \pm t^{-2} \cdot \dfrac{\partial a}{\partial t}, \end{cases} \tag{2}$$

zu unterwerfen.

Die sich hier ankündigende Ähnlichkeit mit den Maxwellschen Gleichungen wird deutlich, wenn $(i = \sqrt{-1})$

$$\begin{cases} \mathfrak{c} + \mathfrak{b} = i \cdot \mathfrak{E}, & \mathfrak{c} - \mathfrak{b} = \mathfrak{H}, \\ t^2 \cdot b + t^{-2} \cdot a = \rho, & t^2 \cdot b - t^{-2} \cdot a = i \cdot \sigma, \end{cases} \tag{3}$$

gesetzt werden. Die Gleichungen (2) verwandeln sich dann in die folgenden $(i = \sqrt{-1})$

$$(4)\qquad \begin{cases} \operatorname{rot} \mathfrak{E} = \pm \dfrac{1}{i} \dfrac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} - \operatorname{grad} \sigma, \quad \operatorname{rot} \mathfrak{H} = \mp \dfrac{1}{i} \dfrac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} + \operatorname{grad} \rho, \\ \operatorname{div} \mathfrak{E} = \pm \dfrac{1}{i} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} \mp \dfrac{2}{t} \cdot \sigma, \qquad \operatorname{div} \mathfrak{H} = \pm \dfrac{1}{i} \dfrac{\partial \sigma}{\partial t} \pm \dfrac{2}{t} \cdot \rho. \end{cases}$$

29. - Eine Begegnung von Theorie und Beobachtung ist erst von den Aussagen zu erwarten, die Skalar-Produkte einsetzen, von denen in 19 die Rede war.

Wenn zwei Differentiale u, u' in der Zerlegung

$$(1)\qquad u = v \vee e^{+} + w \vee e^{-}, \quad u' = v' \vee e^{+} + w' \vee e^{-}$$

mit Raum-Differentialen v, w, v', w' gegeben sind, so findet man

$$(2)\qquad \begin{cases} (u, u') = \dfrac{1}{2} \cdot (v, v') + \dfrac{1}{2} \cdot (w, w'), \\ (u, u')_1 = (v \vee e^{+}, v' \vee e^{+})_1 + (w \vee e^{-}, w' \vee e^{-})_1 . \end{cases}$$

Es genügt also,

$$(v, v'), \quad (v \vee e^{\pm}, v' \vee e^{\pm})_1$$

für den Fall zweier Raum-Differentiale

$$(3)\qquad \begin{cases} v = a + \mathfrak{b} \cdot d\mathfrak{x} + \mathfrak{c} \cdot d\sigma + b \cdot w, \\ v' = a' + \mathfrak{b}' \cdot d\mathfrak{x} + \mathfrak{c}' \cdot d\sigma + b' \cdot w \end{cases}$$

zu berechnen:

$$(4)\qquad (v, v') = (a \cdot a' + t^2 \cdot \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{b}' + t^4 \cdot \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c}' + t^6 \cdot b \cdot b') \cdot \tau$$

mit

$$\tau = \frac{dx \wedge dy \wedge dz \wedge dt}{t^4},$$

und

$$(v \vee e^{\pm}, v' \vee e^{\pm})_1 = (\bar{\imath}(v, v') \cdot d\sigma) \wedge dt - \rho(v, v') \cdot dx \wedge dy \wedge dz$$

mit

$$(5)\qquad \begin{cases} \bar{\imath}(v, v') \cdot d\sigma = i_1 \cdot dy \wedge dz + i_2 \cdot dz \wedge dx + i_3 \cdot dx \wedge dy, \\ \mathfrak{i}(v, v') = (i_1, i_2, i_3) = (\mathfrak{b} \times \mathfrak{c}' + \mathfrak{b}' \times \mathfrak{c}) + t^{-2} \cdot (a \cdot \mathfrak{b}' + a' \cdot \mathfrak{b}) + \\ \qquad\qquad + t^2 \cdot (b \cdot \mathfrak{c}' + b' \cdot \mathfrak{c}), \\ \pm \rho(v, v') = \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c}' + \mathfrak{b}' \cdot \mathfrak{c} - a \cdot b' - a' \cdot b . \end{cases}$$

(Vgl. «Die Poincaré-Gruppe», in *Rendiconti del Seminario Matematico e Fisico di Milano*, LIII (1983), pp. 359-390).

Die eben gewonnenen Formeln für $\rho(v, v')$ und $\iota(v, v')$ verwandeln sich nach der (mit 28 (3) zu vergleichenden) Substitution ($i = \sqrt{-1}$)

$$(6)\qquad \begin{cases} \mathfrak{c} + \mathfrak{b} = i \cdot \mathfrak{E}, & \mathfrak{c} - \mathfrak{b} = \mathfrak{H}, \\ t^2 \cdot b + t^{-2} \cdot a = \rho, & t^2 \cdot b - t^{-2} \cdot a = i \cdot \sigma, \end{cases}$$

in

$$(7)\qquad \begin{cases} \mp 2\rho(v, v') = \mathfrak{E} \cdot \mathfrak{E} + \mathfrak{H} \cdot \mathfrak{H}' + \rho \cdot \rho' + \sigma \cdot \sigma', \\ 2\iota(v, v') = \sqrt{-1}(\mathfrak{E} \times \mathfrak{H}' + \mathfrak{E}' \times \mathfrak{H} + \rho \cdot \mathfrak{E} + \rho' \cdot \mathfrak{E} + \sigma \cdot \mathfrak{H}' + \sigma' \cdot \mathfrak{H}) \end{cases}$$

und die mit $\partial u = \lambda \cdot u$, $u \vee \tau = \pm u$ gleichbedeutenden Bedingungen 26 (3), denen das Differential

$$u = (a + \mathfrak{b} \cdot d\mathfrak{r} + \mathfrak{c} \cdot d\sigma + b \cdot w) \vee e^*$$

unterworfen ist, nehmen die folgende Gestalt an ($i) = \sqrt{-1}$):

$$\operatorname{rot} \mathfrak{E} = \pm \frac{\partial \mathfrak{H}}{i\, \partial t} - \operatorname{grad} \sigma + \frac{\lambda}{2} (\mathfrak{H} + i \cdot \mathfrak{E}) + \frac{\lambda}{2} t^{-2} \cdot (\mathfrak{H} - i \cdot \mathfrak{E}),$$

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = \mp \frac{\partial \mathfrak{E}}{i\, \partial t} + \operatorname{grad} \rho - \frac{\lambda}{2} (\mathfrak{H} + i \cdot \mathfrak{E}) + \frac{\lambda}{2} t^{-2} \cdot (\mathfrak{H} - i \cdot \mathfrak{E}),$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} = \pm \frac{\partial \rho}{i\, \partial t} - \frac{\lambda}{2} (\sigma + i\rho) \mp \frac{2}{t} \sigma + \frac{\lambda}{2} t^{-2} \cdot (\sigma - i\rho),$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{H} = \pm \frac{\partial \sigma}{i\, \partial t} - \frac{\lambda}{2} (\rho + i\sigma) \pm \frac{2}{t} \rho + \frac{\lambda}{2} t^{-2} \cdot (\rho + i\sigma).$$

30. - Aus dem negativen Ausgang des Michelson-Versuchs hätte man schließen können, daß trotz allen kopernikanischen Erwartungen die Erde doch in gewissem Sinne eine Mitte der Natur ist, wie alle großen Kulturen bisher geglaubt hatten und nur mit mathematischer Gewalt hatte bestritten werden können.

Ein Denken, das hinter der Vielfalt der Individuen ein Gesetz sucht, wird der Vermutung nicht ausweichen können, daß das Kraftfeld der Erde ein Individuum sei, in dem alle uns bekannten Individuen leben. Wenn ich diese Vermutung sogleich präzisiere durch die These, die Identität dieses Individuums sei die Gruppe $SL_2(\mathbb{R} + \mathbb{R} \cdot i)$, so kann ich die Gründe dafür zunächst nur in der Tatsache suchen, daß diese Gruppe der eigentlichen homogenen Lorentz-Gruppe isomorph ist und darum an das Geozentrische des Michelson-Versuchs erinnert. Alle anderen in 18 genannten Gruppen aus Poincaré-Matrizen müßten nach dieser Hypothese die Identitäten von Individuen sein, die im Kraftfeld der Erde leben, wenn sie überhaupt als Identitäten anerkannt werden können.

Um die Aufmerksamkeit auf diese Hypothese hinzulenken, werde eine Matrix M

oder eine Symmetrie $\omega \to M(\omega)$ dann nur dann *geozentrisch* genannt, wenn

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Element der Gruppe $SL_2(\mathbb{R} + \mathbb{R} \cdot i)$ ist.

Im Falle einer geozentrischen Symmetrie $\omega \to (a \cdot \omega + b) \cdot (c \cdot \omega + d)^{-1}$ wird die mit

$$v = x + y \cdot i, \qquad w = t + i \cdot z$$

gebildete Zerlegung

$$\omega = v + w \cdot j$$

des Tao sinnvoll, weil dann

$$(a \cdot \omega + b) \cdot (\overline{\omega} \cdot \bar{c} + \bar{d}) = (a \cdot v + b) \cdot (\bar{v} \cdot \bar{c} + \bar{d}) + a \cdot \bar{c} \cdot w \cdot \overline{w} + w \cdot j$$

ist und daher

$$(a \cdot \omega + b) \cdot (c \cdot \omega + d)^{-1} = \hat{v} + \hat{w} \cdot j$$

mit

$$\hat{v} = [(a \cdot v + b) \cdot (\bar{v} \cdot \bar{c} + \bar{d}) + a \cdot \bar{c} \cdot w \cdot \overline{w}] \cdot |c \cdot \omega + d|^{-2},$$
$$\hat{w} = w \cdot |c \cdot \omega + d|^2$$

gesetzt werden kann.

Wegen

$$|c \cdot \omega + d|^2 = |c \cdot v + d|^2 + c \cdot \bar{c} \cdot w \cdot \overline{w}$$

transformiert jede geozentrische Symmetrie die Variablen x, y und $t^2 + z^2$ nur unter sich und läßt das Argument von $w = t + z \cdot i$ ungeändert.

31. - Die Tatsache, daß das Tao

$$\omega = x + y \cdot i + z \cdot i \cdot j + t \cdot j$$

als Quaternion die Anwendung aller vier Grundrechnungsarten erlaubt, also z.B. Anlaß gibt, den von dem einen Element ω erzeugten (und notwendig kommutativen) Körper

$$(\omega) = Q(\omega)$$

zu bilden, lädt ein, die abstrakte Algebra am Aufbau der Physik zu beteiligen. Daß von dieser Seite einiges zu erwarten ist, zeigt die philosophische Transparenz der lokalen Algebra, von der sogleich die Rede sein soll.

32. - Monaden

Die wichtigste Vorarbeit für einen dialektischen Individualismus hat *Leibniz* geleistet. Was er in seiner Monadologie über das Prinzip der Individuation zu sagen vermag, wirkt wie ein intuitives Präludium aller algebraischen Geometrie. Denn algebraische Geometrie kann verstanden werden als Theorie der endlich erzeugbaren algebraischen Körper unter der Herrschaft des Begriffs Stellenring, und insofern ist sie die Kernenergie allen mathematischen Denkens. Um die philosophische Sprachgewalt der lokalen Algebra zu vernehmen, bedarf es eines Vokabulariums, dessen wichtigste Zeilen die folgenden sind:

Jeder kommutative Stellenring S ist eine *Monade*, und seine Elemente sind *Züge* dieser Monade. Jede nichtleere Menge E von Element eines Stellenrings S ist eine *Eigenschaft* der Monade S, und wenn zwei solche Mengen E_1, E_2 in der Beziehung $E_1 \subset \subset E_2$ stehen, so *folgt* die Eigenschaft E_2 aus der Eigenschaft E_1. *Ein Zug* x einer Monade S *hat die Eigenschaft* E bedeute: Das Element x des Stellenringes S gehört zu der Menge E von Elementen des Ringes S.

Einer Monade S sind alle Züge von S *unbewußt*, die dem maximalen Ideal $\mathfrak{p}$ von S angehören. Alle übrigen Züge von S sind der Monade S *bewußt*. Darum heiße $\mathfrak{p}$ auch das *Unbewußte* von S und $S \setminus \mathfrak{p}$, die Gesamtheit der bewußten Züge von S, das *Bewußtsein* der Monade S. Das *Ich* einer Monade S ist der Restklassenkörper $S/\mathfrak{p}$ des Stellenringes S nach seinem maximalen Ideal $\mathfrak{p}$ und darum selbst eine Monade. Die Null eines Stellenringes S heiße auch der *Ursprung* der Monade. Eine Monade gelte genau dann als *offenbar*, wenn sie im Sinne der Algebra Körper ist wenn ihr also nur ihr Ursprung unbewußt ist. Eine Eigenschaft E einer Monade S *offenbart* diese Monade genau dann, wenn alle Züge von S aus Zügen mit der Eigenschaft E durch Anwendung der *vier Grundrechnungsarten* Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division durch Züge, die der Monade bewußt sind, berechnet werden können. Eine Monade s *lebt* in einer Monade S genau dann, wenn s Unterring von S ist. Eine Monade S *entfaltet* eine Monade s genau dann, wenn s in S lebt und alle der Monade s unbewußten Züge von s auch der Monade S unbewußt sind. Die *Empfindungen* einer Monade S sind die Restklassen-Ringe S/Q, bei denen das Ideal Q eine Potenz $\mathfrak{p}^m$ des maximalen Ideals $\mathfrak{p}$ von S umfaßt. Q ist dabei die Gesamtheit der in jener Empfindung *ausgelöschten* Züge der Monade S. Die *Umwelt* einer Monade S ist eine Monade S^* die aus der unendlichen Folge

$$S/\mathfrak{p} \leftarrow S/\mathfrak{p}^2 \leftarrow S/\mathfrak{p}^3 \leftarrow \dots$$

von Empfindungen der Monade S auf folgende Weise abgeleitet werden kann: Der Ring S^* kann auf jeden der Ring $S/\mathfrak{p}^n$ homomorph abgebildet werden, und die auf solche Weise aus einem Zuge x^* von S^* entstehenden Restklassen $x_n + \mathfrak{p}^n$ stehen in der Beziehung

$$x_n + \mathfrak{p}^n \subset x_m + \mathfrak{p}^m ,$$

wenn $n > m$ ist. Die Züge der Umwelt S^* von S sind eindeutig bestimmt durch jene Restklassen, auf die sie abgebildet werden.

33. - Zum Verständnis der weiteren Überlegungen ist es ratsam, an einen Vortrag zu erinnern, den *Planck* im Jahre 1924 dem Thema «Vom Relativen zum Absoluten» gewidmet hat.

Relativität bedeutet nichts anderes als Freiheit in der Wahl der Koordinatensysteme. Sie wäre nichtssagend, wenn sie diese Freiheit nicht auch wieder begrenzte. Sowohl in der klassischen Relativitätstheorie von *Einstein-Minkowski-Poincaré* als auch in der hier vorgetragenen Auffassung von Raum und Zeit bestimmt eine 10-dimensionale Symmetrie der Natur die Freiheit in der Wahl der Koordinatensysteme. Doch zeigt sich ein wesentlicher Unterschied der neuen Relativität gegenüber der speziellen Relativitätstheorie bereits in der Tatsache, daß in der neuen Auffassung ein absoluter Anfang $t = 0$ der Natur eingeplant ist, weil die Relativität der Zeit dem Gesetz

$$\bar{t} = t \cdot |c \cdot \omega + d|^{-2}$$

gehorcht.

Planck hatte in seinem Wirkungsquantum h das Eindringen des Absoluten in die Physik beobachtet. Seit der Entdeckung dieser Konstanten ist dieses Absolute immer am Werke, wenn es gilt, die in Ganzzahligkeiten sich offenbarende Feinstruktur der Natur zu erklären. In dem Naturgesetz

$$(dx^2 + dy^2 + dz^2 + dt^2) \cdot t^{-2} \tag{1}$$

ist überhaupt kein Parameter verfügbar und in seiner Anwendung ist nur das Alter T der Welt als empirische Konstante am Werke. Entwicklungen nach Potenzen von $1/T$ müssen bei dem vorliegenden Versuch einer Physik die Rolle übernehmen, die beim Vergleich von klassischer und quantentheoretischer Physik bisher die nach Potenzen von h fortschreitenden Entwicklungen gespielt hatten. Wenn es angemessen ist, in dem Naturgesetz (1) eine neue Relativität begründet zu sehen, so erscheint es auch sinnvoll, die Ernennung der allgemeinen Quarternion $\omega = x + y \cdot i + z \cdot i \cdot j + t \cdot j$ zum *Tao* als eine Quantentheorie zu bewerten. Die Diskontinuitäten, die damit erklärt werden sollen, sind die als Individuen beobachtbaren Elementar-Teile der Wirklichkeit.

Die Identität I eines Individuums bestimmt als Untergruppe von $SL_2(\mathrm{H})$ die Karten

$$M(\omega) \qquad (M \in I)$$

in denen das Individuum «verzeichnet» werden kann, und da solche Untergruppen, wie in 18 bereits erwähnt, mit arithmetischer Feinheit definiert werden können, wird die von *Planck* in dem zitierten Vortrag vorausgesehene *Arithmetisierung der Physik* in unerwartetem Maße denkbar.

34. - Es ist gut, beizeiten zu erkennen, daß die vorliegende Untersuchung das Ziel hat, Raum und Zeit als einen Vorhang zu deuten, hinter dem sich eine höhere Realität, die man *Reich und Ewigkeit* nennen sollte, verbirgt.

Die Tatsache, daß jede von 0 verschiedene Zahl m in der Weise

$$x \to m \cdot x, \quad y \to m \cdot y, \quad z \to m \cdot z, \quad t \to m \cdot t$$

eine Isometrie der Metrik

$$(dx^2 + dy^2 + dz^2 + dt^2) \cdot t^{-2}$$

bestimmt, zeigt, daß es bei der Herrschaft dieses Naturgesetzes keinen Unterschied zwischen Mikrokosmos und Makrokosmos geben kann, und daß das Elementare nicht nur in den kleinsten Teilen zu suchen ist. Als Elementarteile sind hier die Individuen anerkannt, zu denen die in der Biologie untersuchten in erster Linie gehören. Die mathematische Monadologie erlaubt, von Zügen der Individuen zu sprechen und damit den Eindruck zu erwecken, als ob der die Biologie beherrschende Begriff «Gen» einen a priori erkennbaren Vorläufer in der reinen Mathematik aufzuweisen hätte. Die Geschichte der Mathematik wäre danach zu deuten als das Heranreifen dessen, was *Platon* als Reich der Ideen geahnt hat. Diese Annahme ernst nehmend, wird in der vorliegenden Abhandlung den Monaden, deren Erlesenheit darin besteht, daß sie von endlich vielen ihrer Züge offenbart werden können, der Rang von platonischen Ideen zuerkannt mit der Erwartung, das Reich der Individuen als von solchen Ideen geführt zu erkennen. Da mathematisches Denken im Ringen um die Erkenntnis von Raum und Zeit groß geworden ist, hat die Physik das erste Wort, wenn es gilt, die Züge der Natur aufzufinden, in denen sie am deutlichsten zum Menschen redet. Nach allem, was hier über Raum und Zeit gesagt worden ist, hat man in dem Tao

$$\omega = x + y \cdot i + z \cdot i \cdot j + t \cdot j$$

einen die Naturerscheinungen beherrschenden Zug zu vermuten.

Da ω als Quaternion auch Gegenstand der vier Grundrechnungsarten ist, kann das Wort «Zug» im monadologischen Sinne verstanden werden und damit die Frage herausfordern, welche Monade von diesem Zug ω offenbart wird.

Unter den Zügen dieser Monade, die wegen ihrer Herkunft aus ω mit (ω) bezeichnet werde, finden sich alle Polynome

$$a_0 + a_1 \cdot \omega + a_2 \cdot \omega^2 + \ldots + a_m \cdot \omega^m ,$$

deren Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m$ ganze rationale Zahlen sind, und keines dieser Polynome ist 0 außer dem, wo alle Koeffizienten gleich 0 sind. Da die Multiplikation solcher Polynome kommutativ ist, sind alle Züge der Monade (ω) als Quotienten von Polynomen der erwähnten Art darstellbar.

In der Sprache der Algebra würde man sagen:

(ω) ist der von ω erzeugte Körper vom Transzendenzgrad 1 und der Charakteristik 0.

Diese Monade (ω) ist Idee im vorher erklärten Sinne und dank ihrer Selbstherrlichkeit hervorragend geeignet, die Idee mathematisch zu verwirklichen, die der deutsche Idealismus das *absolute Ich* genannt hatte. Selbstherrlich ist sie durch ihren Reichtum an Automorphismen:

Jede Symmetrie

$$\omega \rightarrow (a \cdot \omega + b) \cdot (c \cdot \omega + d)^{-1}$$

der Natur, bei der

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathrm{Q}) \quad (\mathrm{Q} = \text{Körper der rationalen Zahlen})$$

gilt, bestimmt eine genaue und getreue Abbildung des absoluten Ichs auf sich selbst, also eine Art Selbsterkenntnis.

Nur wenn es gelingt, das absolute Ich zu den in der Biologie beobachteten Ich-Zentren in Beziehung zu bringen, indem etwa das empirische Ich sich als das Ich $S/\mathfrak{p}$ einer Monade S erweist, die im strengen monadologischen Sinne eine Seite des absoluten Ichs ist, hat es Sinn, den in der Romantik unternommenen Versuch eines Weltbildes wieder aufzunehmen.

35. - Materie

Bedeutende mathematische Erfahrungen, die schon im vorigen Jahrhundert auf dem Gebiet der elliptischen Funktionen und der Modulfunktion gewonnen waren, laden zu folgendem Einsatz der Monadologie ein:

Das Tao

$$\omega = (x + y \cdot i) + (t + z \cdot i) \cdot j$$

gibt Anlaß zur Bildung, von zwei komplexen Variablen

$$v = x + y \cdot i,$$
$$w = t + z \cdot i,$$

auf die schon bei der Definition der geozentrischen Symmetrien (in 30) hingewiesen worden ist.

Die Gesamtheit der Funktionen $f(v, w)$, die in dem durch $z > 0$ beschriebenen Teil des 4-dimensionalen Raumes der zwei komplexen Variablen v, w meromorph sind, ist im algebraischen Sinne ein Körper und darum geeignet, als die Gesamtheit der Züge einer Monade gedeutet zu werden, die einfach die *Materie* genannt werde.

Es ist ratsam, sogleich auch die in $z < 0$ definierten, zu den Zügen $f(v, w)$ der Materie konjugiert komplexen Funktionen

$$\overline{f(v, w)}$$

als die Züge einer Monade anzuerkennen und diese Monade die *Antimaterie* zu nennen. Der Umstand, daß auf solche Weise die Züge der Materie zu Funktionen in einem vierdimensionalen Kontinuum werden, möge an die Feld-Theorie der Materie erinnern.

Der atomare Charakter der Materie ist bei dieser Sicht darin zu suchen, daß einige

Züge der Materie die Naturerscheinungen in besonderem Maße bestimmen, und hier ist die Stelle, wo elliptische Funktionen und Modulfunktionen zum Zuge kommen, unter denen sogleich auf folgende in $z > 0$ meromorphe Funktionen hingewiesen werde. Aus den in der Theorie der elliptischen Funktionen grundlegenden Funktionen

$$\wp(u, w_1, w_2), \qquad \wp'(u, w_1, w_2),$$

$$g_2(w_1, w_2) = 60 \cdot \sum_{m,n}{}'(mw_1 + nw_2)^{-4},$$

$$g_3(w_1, w_2) = 140 \cdot \sum_{m,n}{}'(mw_1 + nw_2)^{-6},$$

$$\Delta(w_1, w_2) = g_2^3 - 27 g_3^2,$$

werden durch die Substitution

$$v = \frac{u}{w_2}, \qquad w = \frac{w_1}{w_2}$$

die Funktionen

$$(1) \qquad \begin{cases} x(v, w) = 12 \cdot \wp(u, w_1, w_2) \cdot \Delta^{-1/6}(w_1, w_2), \\ y(v, w) = \wp'(u, w_1, w_2) \cdot \Delta^{-1/4}(w_1, w_2), \\ \gamma_2(w) = 12 \cdot g_2(w_1, w_2) \cdot \Delta^{-1/3}(w_1, w_2), \\ \gamma_3(w) = 6^3 \cdot g_3(w_1, w_2) \cdot \Delta^{-1/2}(w_1, w_2), \\ f(w) = 12^3 \cdot g_2^3(w_1, w_2) \cdot \Delta^{-1}(w_1, w_2), \\ z(v, w) = -\gamma_2(w) \cdot \gamma_3(w) \cdot x(v, w) \end{cases}$$

gebildet, die trotz des Auftretens gebrochener Exponenten bei

$$\Delta(w_1, w_2)$$

in dem ganzen durch

$$\frac{w - \overline{w}}{i} > 0$$

beschriebenen Gebiete der vierdimensionalen Raumes meromorphe Funktionnen sind, weil für jede rationale Zahl r mit dem Nenner 24

$$\Delta^r(w_1, w_2) = \left(\frac{2\pi i}{w_2}\right)^{12r} \cdot \eta^{24r}(w)$$

mit

$$(2) \qquad \eta(w) = e^{\pi i w/12} \cdot \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{2\pi i n w})$$

zu setzen ist. Diese Funktionen (1) und (2) sind also Züge der Materie. Jeder Unterring der Monade Materie, der im Sinne der lokalen Algebra Stellenring ist, kann als eine in der Materie lebende Monade anerkannt werden.

Die Variablen v und w sind als überall meromorphe Funktionen selbst Züge der Materie. Ihre führende Rolle werde dadurch hervor gehoben, daß v das *Soma*, w das *Pneuma* genannt werden.

Das durch

$$z = \frac{w - \bar{w}}{2i} > 0$$

eingeschränkte Gebiet des reell 4-dimensionalen, komplex 2-dimensionalen Raumes der Variablen v, w heiße der *Phasenraum* der Materie.

36. - Wenn a, b, c, d, m, n reelle Zahlen bezeichnen, die der Bedingung

$$a \cdot d - b \cdot c = 1$$

genügen, so bestimmen sie eine Substitution

$$(1) \qquad v \to \bar{v} = \frac{v + m \cdot w + n}{c \cdot w + d}, \quad w \to \bar{w} = \frac{a \cdot w + b}{c \cdot w + d},$$

die jede im ganzen Phasenraum meromorphe Funktion $F(v, w)$ in eine Funktion

$$F\left(\frac{v + m \cdot w + n}{c \cdot w + d}, \frac{a \cdot w + b}{c \cdot w + d}\right),$$

verwandelt, die ebenfals überall im Phasenraum meromorph ist.

(1) bewirkt also einen Automorphismus der Monade Materie und verdient darum den Namen Symmetrie der Materie.

Die als *Symmetriegruppe der Materie* zu bezeichnende Gesamtheit solcher Abbildungen (1) wird homomorph auf die Gruppe $SL_2(\mathbb{R})$ abgebildet, wenn jeder Abbildung (1) die Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

zugeordnet wird.

Die Abbildung

$$w \to \bar{w} = \frac{a \cdot w + b}{c \cdot w + d}$$

heiße der zu der Symmetrie (1) gehörige *Willensakt*.

37. - Die Funktionen

$$(1) \qquad H(w, v) = \frac{2i}{w - \bar{w}} \cdot v \cdot \bar{v}, \quad S(w, v) = -\frac{2i}{w - \bar{w}} v^2,$$

zeigen bei

$$w \to \hat{w} = \frac{a \cdot w + b}{c \cdot w + d}, \quad v \to \hat{v} = \frac{v}{c \cdot w + d} \tag{2}$$

das Verhalten

$$H(\hat{w}, \hat{v}) = H(w, v),$$
$$S(\hat{w}, \hat{v}) = S(w, v) + \frac{2i \cdot c \cdot v^2}{c \cdot w + d},$$

woraus zu entnehmen ist, daß die reelle und positive Funktion

$$F(w, v) = -i \cdot \frac{(v - v)^2}{w - w} = \frac{1}{2} S(w, v) + \frac{1}{2}\overline{S(w, v)} + H(w, v)$$

die Eigenschaft

$$F(\hat{w}, \hat{v}) = F(w, v) + \frac{i \cdot c \cdot v^2}{c \cdot w + d} - \frac{i \cdot c \cdot \bar{v}^2}{c \cdot \bar{w} + d} \tag{3}$$

hat.

Bei der Substitution

$$w \to \hat{w} = w, \quad v \to \hat{v} = v + m \cdot w + n \tag{4}$$

wird $F(w, v)$ zu

$$F(\hat{w}, \hat{v}) = F(w, v) - 2i \cdot m \cdot (v - \bar{v}) - i \cdot m^2 \cdot (w - \bar{w}) \tag{5}$$

Da alle Symmetrien der Materie durch Substitutionen der Art (2) und (4) erzeugt werden können, kann aus den Gleichungen (3) und (5) geschlossen werden, daß

$$\begin{gathered} \partial\bar{\partial} F(w, v) = \frac{2i}{w - \bar{w}} (dv - p\,dw) \wedge (d\bar{v} - p\,d\bar{w}), \\ \left(\text{mit } p = \frac{v - \bar{v}}{w - \bar{w}}\right) \end{gathered} \tag{6}$$

eine bei allen Symmetrien der Materie invariante Differentialform ist.

Unter ∂ und $\bar{\partial}$ sind dabei die im äußeren Differentialkalkül zu lesenden Operatoren

$$\partial = dv \wedge \frac{\partial}{\partial v} + dw \wedge \frac{\partial}{\partial w},$$
$$\bar{\partial} = d\bar{v} \wedge \frac{\partial}{\partial \bar{v}} + d\bar{w} \wedge \frac{\partial}{\partial \bar{w}}$$

zu verstehen.

Das Verhalten

$$\log \frac{w - \bar{w}}{2i} \to \log \frac{w - \bar{w}}{2i} - 2 \cdot \log |c \cdot w + d|$$

des reellen Logarithmus von

$$\frac{w - \overline{w}}{2i} = z$$

zeigt, daß auch

$$\partial\overline{\partial} \log \frac{w - \overline{w}}{2i} = \frac{dw \wedge d\overline{w}}{(w - \overline{w})^2} \tag{7}$$

bei allen Symmetrien der Materie invariant ist.

Es sei daran erinnert, daß n-dimensionale Hermitesche Metriken

$$2 g_{k\overline{l}} \cdot dz^k \cdot d\overline{z}^l ,$$

für die

$$d(g_{k\overline{l}} \cdot dz^k \wedge d\overline{z}^l) = 0$$

ist, sich durch die Existenz eines *Potentials* U auszeichnen, für das

$$g_{k\overline{l}} = \frac{\partial^2 U}{\partial z^k \partial \overline{z}^l}$$

gilt.

Die Gleichungen (6) und (7) zeigen, daß für beliebige positive Zahlen λ, μ

$$-\lambda \frac{dw \cdot d\overline{w}}{(w - \overline{w})^2} + \frac{4\pi i \mu}{w - \overline{w}} \cdot (dv - p \cdot dw) \cdot (d\overline{v} - p \cdot d\overline{w}), \tag{8}$$

$$\left(\text{mit } p = \frac{v - \overline{v}}{w - \overline{w}}\right)$$

eine positiv definite Hermitesche Metrik mit dem Potential

$$U = -\frac{\lambda}{2} \cdot \log \frac{w - \overline{w}}{2i} - \mu \pi i \cdot \frac{(v - \overline{v})^2}{w - \overline{w}} \tag{9}$$

darstellt, für die alle Symmetrien der Materie Isometrien sind.

(Die Bezeichnung der Konstanten λ, μ ist so gewählt, daß der Fall $\lambda = \mu$ bei einer später auszuführenden Integration ein einfaches Ergebnis liefert.)

38. - Als Koordinaten im Phasenraum der Materie können statt v neben w die durch

$$v = p \cdot w + q \tag{1}$$

definierten reellen Koordinaten p, q neben w verwendet werden.

Aus $v = p \cdot w + q$, $\bar{v} = p \cdot \bar{w} + q$ folgt dann

$$p = \frac{v - \bar{v}}{w - \bar{w}}, \quad q = \frac{w \cdot \bar{v} - \bar{w} \cdot v}{w - \bar{w}}, \tag{2}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\, \partial\bar{\partial}\, U = \mu \cdot dp \wedge dq - \frac{\lambda}{4\pi i} \cdot \frac{dw \wedge d\bar{w}}{w - \bar{w}} \tag{3}$$

und die Hermitesche Metrik 36 (8) wird zu

$$\mu \cdot \frac{4\pi i}{w - \bar{w}} \cdot |w \cdot dp + dq|^2 - \lambda \cdot \frac{|dw|^2}{(w - \bar{w})^2}. \tag{4}$$

Um auch die Symmetrie der Materie

$$v \to \hat{v} = \frac{v + m \cdot w + n}{c \cdot w + d}, \quad w \to \hat{w} = \frac{a \cdot w + b}{c \cdot w + d}$$

in den Koordinaten p, q, w darzustellen, hat man $\hat{v} = \hat{p} \cdot \hat{w} + \hat{q}$ zu setzen und dabei $\hat{p}, \hat{p}$ als reelle Zahlen zu behandeln.

Es ergibt sich

$$(\hat{p}, \hat{q}) \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (p + m, q + n), \tag{5}$$

woraus insbesondere

$$d\hat{p} \wedge d\hat{q} = dp \wedge dq \tag{6}$$

folgt.

39. - Die Symmetrien

$$v \to \frac{v + m \cdot w + n}{c \cdot w + d}, \quad w \to \frac{a \cdot w + b}{c \cdot w + d}$$

der Materie, bei denen unter der einzigen Nebenbedingung

$$a \cdot d - b \cdot c = 1$$

alle Parameter a, b, c, d, m, n ganze rationale Zahlen sind, bilden eine Untergruppe der Symmetriegruppe der Materie, die hier einfach die *erweiterte Modulgruppe* genannt werde.

Die (in 35 erwähnten) Züge

$$f(w), \quad z(v, w) \tag{1}$$

der Materie sind invariant bei dieser Gruppe.

Da die Substitutionen

$$\begin{array}{lll} \text{I)} & v \to v+1, & w \to w, \\ \text{II)} & v \to v+w, & w \to w, \\ \text{III)} & v \to v, & w \to w+1, \\ \text{IV)} & v \to \frac{v}{w}, & w \to -\frac{1}{w} \end{array}$$

die erweiterte Modulgruppe erzeugen, genügen die folgenden Angaben zur Berechnung des Verhaltens der übrigen in 34 aufgezählten Züge der Materie:

$$\begin{array}{lll} \text{I)} & x(v+1, w) = x(v, w), & y(v+1, w) = y(v, w), \\ \text{II)} & x(v+w, w) = x(v, w), & y(v+w, w) = y(v, w), \\ \text{III)} & x(v, w+1) = -\rho \cdot x(v, w), & y(v, w+1) = -i \cdot y(v, w), \\ & \gamma_2(w+1) = \rho^{-1}\gamma_2(w), & \gamma_3(w+1) = -\gamma_3(w), \\ \text{IV)} & x\left(\frac{v}{w}, -\frac{1}{w}\right) = -x(v, w), & y\left(\frac{v}{w}, -\frac{1}{w}\right) = -i \cdot y(v, w), \\ & \gamma_2\left(-\frac{1}{w}\right) = \gamma_2(w), & \gamma_3\left(-\frac{1}{w}\right) = -\gamma_3(w) \end{array}$$

(ρ bezeichnet dabei die Einheitswurzel $\rho = \exp(2\pi i/3)$).

Obwohl in diesem Zusammenhang kein Anlaß besteht, das Verhalten bei $v \to -v$, $w \to w$ zu erwähnen, seien noch die Tatsachen

$$x(-v, w) = x(v, w), \quad y(-v, w) = -y(v, w) \tag{2}$$

genannt.

40. - Um unter den in der Materie lebenden Monaden diejenigen namhaft zu machen, die verdächtig sind, für die Analyse lebendiger Individuen bedeutsam zu sein, werden folgende Bezeichnungen verabredet.

Wenn E eine Eigenschaft der Monade S bezeichnet und alle Züge von S aus denen mit der Eigenschaft E mittels der (in 32 genannten) vier Grundrechnungsarten berechnet werden können, werde dies durch

$$S = (E) \tag{1}$$

ausgesagt.

(Besteht die Menge E nur aus einem Element, etwa x, so werde nicht $\{x\}$, wie üblich, sondern x statt E geschrieben. Bezeichnen E_1, E_2 Eigenschaften einer Monade S, so besagt $x \in E_1 \cup E_2$: x hat die Eigenschaft E_1 *oder* die Eigenschaft E_2, und $x \in E_1 \cap \cap E_2$: x hat die Eigenschaft E_1 *und* die Eigenschaft E_2.)

Das Zeichen

$$s \prec S$$

besage: Die Monade S entfaltet die Monade s (in dem in 32 erklärten Sinne).

Es empfiehlt sich, durch Verwendung des Buchstabens S in verschiedenen Fassungen z.B. s, S', s_0, S_1, S'' usw. anzudeuten, daß Monaden gemeint sind, wenn Stellenringe zu solchem philosophischen Range erhoben werden. In diesem Falle sei der entsprechende Buchstabe $\mathfrak{p}$, also z.B. $\mathfrak{p}, \mathfrak{P}, \mathfrak{p}_0, \mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}''$ usw. in den genannten Fällen, das Zeichen für das maximale Ideal des Stellenrings.

Allgemein bedeute das Zeichen einer Monade auch die Eigenschaft, Zug dieser Monade zu sein. Sind also s, S Zeichen für Monaden, so besagt $s \subset S$, daß die Eigenschaft «Zug von s zu sein» zur Folge hat, «Zug von S zu sein», was nicht unbedingt bedeutet, daß s in S lebt (vgl. 32).

Wird aber

$$s \leqslant S$$

geschrieben, so besage dies nicht nur $s \subset S$ sondern genauer: Die Monade s lebt in S und es gilt $(s) = S$, d.h. die Aussage (1) mit s an Stelle von E.

Die durch $\leqslant$ und

$$\prec$$

bezeichneten Beziehungen zwischen Monaden sind transitiv, d.h. sind S_1, S_2, S_3 Monaden, so folgt aus $S_1 \leqslant S_2, S_2 \leqslant S_3$, daß $S_1 \leqslant S_3$ gilt, und aus

$$S_1 \prec S_2, \quad S_2 \prec S_3$$

kann auf $S_1 \prec S_3$ geschlossen werden.

Homomorphe Abbildungen werden zuweilen *getreue* Abbildungen genannt, und als *genau* gelten sie dann, wenn sie verschiedene Züge verschieden abbilden. *Wesensgleich* sind zwei Monaden genau dann, wenn die eine getreu und genau auf die andere abgebildet werden kann. Sie sind dann *Ebenbilder* voneinander.

41. - Psychoanalyse

Das absolute Ich (ω) hat als der von dem Tao

$$\omega = x + y \cdot i + z \cdot i \cdot j + t \cdot j$$

erzeugte Körper unendlich viele Automorphismen. Diese sind eindeutig bestimmt durch die Verwandlungen

$$\omega \to \frac{a \cdot \omega + b}{c \cdot \omega + d},$$

die ω bei ihnen erfährt. Die rationalen Zahlen a, b, c, d sind dabei der Bedingung

$$a \cdot d - b \cdot c \neq 0$$

unterworfen, welche garantiert, daß

$$(\omega) = \left(\frac{a \cdot \omega + b}{c \cdot \omega + d}\right)$$

ist, d.h. daß auch

$$\frac{a \cdot \omega + b}{c \cdot \omega + d}$$

wie ω die Monade (ω) offenbart.

Das absolute Ich ist in der Materie erkennbar als das *Es*, worunter die von dem Zuge w der Materie offenbarte zu verstehen ist. Das soll heißen:

Das Es ist eine in der Materie lebende Monade, die Ebenbild des absoluten Ichs ist vermöge einer getreuen und genauen Abbildung, die das Tao ω in den Zug w der Materie verwandelt.

Wegen der Isomorphie zwischen den Körpern (ω) und (w) bestimmt jede aus rationalen Zahlen a, b, c, d gebildete Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{mit } a \cdot d - b \cdot c \neq 0$$

einen Automorphismus des Es, der w in $(a \cdot w + b) \cdot (c \cdot w + d)^{-1}$ verwandelt, und andere getreue und genaue Abbildungen des Es auf sich selbst gibt es nicht. Diese mit

$$\omega \rightarrow \frac{a \cdot \omega + b}{c \cdot \omega + d}$$

zu bezeichnenden Automorphismen von (ω) mögen künftig die *absoluten Willensakte* genannt werden, und die Gesamtheit dieser Akte, also die Gruppe der Automorphismen von (ω), gelte als der *absolute Wille*.

42. - Der absolute Wille wird erst schöpferisch durch Vermittlung des Über-Ichs. Das *Über-Ich* ist zu verstehen durch sein in der Materie lebendes Ebenbild

$$(j(w))$$

des absoluten Ichs, das von dem Zuge $j(w)$, der klassischen Modulfunktion, offenbart wird.

Aus dem absoluten Ich (ω) entsteht es vermöge einer getreuen und genauen Abbildung, die das Tao ω in $j(\omega)$ verwandelt. Jeder absolute Willensakt

$$\omega \rightarrow \frac{a \cdot \omega + b}{c \cdot \omega + b},$$

bei dem $a \cdot d - b \cdot c$ positiv ausfällt, bewegt das Über-Ich, indem er es in die von

$$j\left(\frac{a \cdot \omega + b}{c \cdot \omega + d}\right)$$

offenbarte Monade

$$(1) \qquad \left(j\left(\frac{a \cdot \omega + b}{c \cdot \omega + d}\right)\right)$$

verwandelt. Daß $a \cdot d - b \cdot c > 0$ dabei gefordert wurde, hat seinen Grund in der Relation

$$\frac{a \cdot \omega + b}{c \cdot \omega + d} - \overline{\frac{a \cdot \omega + b}{c \cdot \omega + d}} = (a \cdot d - b \cdot c) \cdot (w - \overline{w}) \cdot |c \cdot w + d|^{-2}$$

und der Tatsache, daß $j(\omega)$ zunächst nur für

$$\frac{\omega - \overline{\omega}}{i} > 0$$

erklärt ist. Es ist jedoch sinnvoll, die Funktion $j(\omega)$ auch für

$$\frac{\omega - \overline{\omega}}{i} < 0$$

zu definieren, indem man für reelle Werte von t und z allgemein das Bestehen der Gleichung

$$(2) \qquad j(t - z \cdot i) = \overline{j(t + z \cdot i)}$$

fordert, was erreicht wird, wenn $j(\omega)$ auch für

$$\frac{\omega - \overline{\omega}}{i} < 0$$

durch

$$j(\omega) = 12^3 \cdot g_2^3(\omega, 1) \cdot \Delta^{-1}(\omega, 1)$$

definiert wird, wie in 35 für

$$\frac{\omega - \overline{\omega}}{i} > 0$$

geschehen ist.

Die Darstellung

$$\sigma\colon \omega \to M(\omega) = \frac{a \cdot \omega + b}{c \cdot \omega + b}$$

eines absoluten Willensaktes σ kann stets so gewählt werden, daß die Elemente der Matrix

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

ganze Zahlen sind, die keinen von ± 1 verschiedene Teiler haben, der allen vier Zahlen a, b, c, d gemein ist. M ist dann zweideutig und die Determinante $|M| = a \cdot d -$

$-b \cdot c$ eindeutig durch den Willensakt σ bestimmt. Diese ganze Zahl $|M|$ ist gemeint, wenn von der *Determinante* eines absoluten Willensaktes σ die Rede ist. Sie werde mit $D(\sigma)$ bezeichnet.

Die Determinante $D(\sigma\tau)$ eines Willensaktes

$$\sigma\tau\colon\ \omega \to M_1(M_2(\omega)),$$

der durch die Zusammensetzung zweier Willensakte

$$\sigma\colon\ \omega \to M_1(\omega), \qquad \tau\colon\ \omega \to M_2(\omega)$$

entsteht, ist nicht notwendig $D(\sigma) \cdot D(\tau)$, aber auf jeden Fall ein Teiler dieses Produkts.

Ist die Determinante $D(\sigma)$ eine Potenz der Primzahl p, so ist auch die Determinante des umgekehrten Willensaktes σ^{-1} eine Potenz von p. Daraus folgt, daß jede Primzahl p eine Untergruppe des absoluten Willens bestimmt, die aus allen Willensakten besteht, deren Determinante eine Potenz von p order 1 ist. Das Über-Ich ($j(\omega)$) bildet mit dem absoluten Ich zusammen einen Dipol, der die *dionysische* Vielfalt der absoluten Willensakte zu ordnen erlaubt. Dies liegt an der Tatsache, daß das Über-Ich insofern *apollinische* Ruhe bewahrt, als es bei allen Willensakten der Determinate 1 unbewegt bleibt.

Sind $p, q, \ldots, r$ die Primteiler der natürlichen Zahl n, so ist die Anzahl $\psi(n)$ der Stellungen

$$\left(j\left(\frac{a \cdot \omega + b}{c \cdot \omega + d}\right)\right),$$

in die das Über-Ich bei Willensakten mit der Determinante n bewegt werden kann, durch

$$\psi(n) = n \cdot \left(1 + \frac{1}{p}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{q}\right) \ldots \left(1 + \frac{1}{r}\right)$$

gegeben. Dies ist auch die Anzahl der Züge

$$j\left(\frac{a \cdot \omega + b}{c \cdot \omega + d}\right)$$

selbst.

43. - Ob die mathematische Fassung der von *Sigmund Freud* mit den Namen «Es» und «Uber-Ich» bedachten «Provinzen der Psyche» die Wahrheit trifft, kann erst durch den Versuch, auch das «Ich» mathematisch zu begreifen, geprüft werden.

Dazu ist es nötig, zunächst die *reine Vernunft* als ein mathematisches Phänomen anzuerkennen, was mit folgendem Satze geschieht: Die rationalen Zahlen sind die *Züge der reinen Vernunft*, die vermöge der klassischen vier Grundrechnungsarten als offenbare Monade zu verstehen ist. Die Zahl 1 gilt als die Einheit der reinen Vernunft; und die Zahl 0 ist der einzige Zug der reinen Vernunft, der ihr unbewußt ist. Da alle

Züge der reinen Vernunft aus dem Zug 1 mittels der vier Grundrechnungsarten gewonnen werden können, offenbart 1 die Monade «reine Vernunft», weshalb gemäß der in 40 getroffenen Verabredung auch (1) als Zeichen der reinen Vernunft statt des üblichen Q gelten kann.

Die so aufgefaßte reine Vernunft hätte zu *Kants* Zeiten kaum philosophisches Fragen auslösen können. Heute jedoch, da die Primzahlen höchste Aufmerksamkeit der Mathematiker herausfordern, muß es auffallen, daß jede Primzahl p Anlaß gibt, die reine Vernunft von einer besonderen Seite zu sehen.

Wenn zwei Monaden s, S in der (in 40 definierten) Beziehung

$$s \leq S$$

stehen, so möge dies mit dem Satze «die Monade s ist eine *Seite der Monade S*» gleichbedeutend sein. Bezeichnet S die reine Vernunft und p eine Primzahl, so erweist sich die Gesamtheit der Zahlen a/b, die mit ganzen Zahlen a, b und einem durch p nicht teilbaren Nenner dargestellt werden können, als ein Stellenring, der als Monade eine Seite von S ist.

Das maximale Ideal $\mathfrak{p}$ dieses Stellenringes s ist $\mathfrak{p} = p \cdot s$, also die Gesamtheit der Zahlen a/b, die mit ganzem durch p teilbaren Zähler a und ganzem durch p nicht teilbaren Nenner b dargestellt werden können.

Das Ich $s/\mathfrak{p}$ dieser Seite der reinen Vernunft hat also nur p Züge. So entspricht jeder Primzahl eine Seite der reinen Vernunft, und andere Seiten außer diesen und der Vernunft selbst hat die reine Vernunft nicht.

Die ganzen rationalen Zahlen sind die einzigen Züge der reinen Vernunft, die in allen Seiten der reinen Vernunft erscheinen, d.h. Züge dieser Seiten sind. Die Tatsache, daß im Ich der durch die Primzahl p bestimmten Seite der reinen Vernunft alle durch p teilbaren ganzen Zahlen gleichsam ausgelöscht sind, läßt erwarten, daß mit jeder Primzahl ein *Trieb* der Natur gekennzeichnet ist. *Triebhaft* mögen deshalb die Seiten der reinen Vernunft heißen, die nicht die ganze Vernunft sind.

Die reine Vernunft lebt sowohl im absoluten Ich als auch im Es und Über-Ich, die alle drei als Entfaltungen der reinen Vernunft gelten können; aber keine dieser Großmonaden kann aus einer triebhaften Seite der reinen Vernunft durch Entfaltung erreicht werden.

Wenn in einer Seite s des absoluten Ichs die reine Vernunft lebt, so ist sie entweder das absolute Ich selbst oder ihr Unbewußtes $\mathfrak{p}$ ist von der Form

$$\mathfrak{p} = (\omega^n + a_1 \cdot \omega^{n-1} + \ldots + a_n) \cdot s,$$

wenn es nicht

$$\frac{1}{\omega} \cdot s$$

ist. Dabei bezeichnen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ Züge der reinen Vernunft, die durch s eindeutig bestimmt sind.

Die unendliche Mannigfaltigkeit solcher Seiten des absoluten Ichs wird hier zum Anlaß genommen, die *Entstehung der Arten* und die Vielfalt der lebendigen Individuen durch folgende Hypothese zu erklären: Jedem lebendigen Wesen ist eine Seite s des absoluten Ichs zugewandt, deren Unbewußtes $\mathfrak{p}$ durch ein Polynom 2. Grades in der Weise

$$\mathfrak{p} = (\omega^2 + a_1 \cdot \omega + a_2) \cdot s$$

bestimmt ist.

Die durch

$$\omega_0^2 + a_1 \cdot \omega_0 + a_2 = 0$$

definierte komplexe Zahl ω_0 ist nicht reell, sie heiße das *Pneuma* des in s erscheinenden Wesens, und der von ω_0 erzeugte imaginär-quadratische Zahlkörper (ω_0) gelte als der *Verstand* dieses Wesens. Er ist eine dem Ich $s/\mathfrak{p}$ der Monade s wesensgleiche Entfaltung zweiten Grades der reinen Vernunft.

44. - Warum gerade Polynomen 2. Grades eine so schöpferische Rolle zugedacht wird, liegt vor allem an der Bedeutung der imaginär-quadratischen Zahlkörper in der Theorie der elliptischen Funktionen. Nahegelegt wird diese Idee der Individuation durch folgende Überlegung:

Fragt man, wie erreicht werden kann, daß zwei absolute Willensakte

$$\omega \to \frac{a \cdot \omega + b}{c \cdot \omega + d} \quad \text{und} \quad \omega \to \frac{\alpha \cdot \omega + \beta}{\gamma \cdot \omega + \delta}$$

dasselbe Ziel bekommen, daß also

$$\frac{a \cdot \omega + b}{c \cdot \omega + d} \quad \text{gleich} \quad \frac{\alpha \cdot \omega + \beta}{\gamma \cdot \omega + \delta}$$

werde, so zeigt diese Gleichsetzung, daß dies nur scheinbar geschehen kann, nämlich als Kongruenz

$$(a \cdot \omega + b) \cdot (\gamma \cdot \omega + \delta) \equiv (\alpha \cdot \alpha + \beta) \cdot (c \cdot \omega + d) \quad (\mathrm{mod}\ \mathfrak{p})$$

in einer Seite s des absoluten Ichs (ω).

45. - Wenn nun auf Grund solcher Überlegung die Verabredung getroffen wird, jede imaginär-quadratische Zahl ω_0 als das Pneuma eines möglichen Individuums zu deuten, so ist zunächst nötig, die Identität dieses Individuums anzugeben (vgl. 17).

Die ω_0 definierende Gleichung

$$a \cdot \omega_0^2 + b \cdot \omega_0 + c = 0$$

kann mit ganzen rationalen Zahlen a, b, c geschrieben werden, die keinen gemeinsamen Teiler außer ± 1 haben. Wenn noch $a > 0$ vorausgesetzt wird, sind a, b, c durch ω_0 eindeutig bestimmt. Die Gesamtheit $\mathfrak{o} = \mathrm{Z} + \mathrm{Z} \cdot a \cdot \omega_0$ der aus 1 und $a \cdot \omega_0$ mit den ersten drei Grundrechnungsarten herstellbaren komplexen Zahlen ist ein Unterring von $\mathrm{R} + \mathrm{R} \cdot i$. Die Gesamtheir der Matrizen

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

deren Elemente dem Ringe $\mathfrak{o}$ angehören und der Bedingung

$$\alpha \cdot \delta - \beta \cdot \gamma = 1$$

genügen, ist eine Untergruppe $SL_2(\mathfrak{o})$ der Poincaré-Gruppe $SL_2(\mathrm{H})$, und darum (nach 17) geeignet, als Identität eines Individuums anerkannt zu werden.

Von diesem *Individuum* wird behauptet, daß es in der durch

$$\mathfrak{p} = (a \cdot \omega^2 + b \cdot \omega + c) \cdot s$$

bestimmten Seite s des absoluten Ichs (ω) *geschaffen* werde, daß

$$a \cdot \omega_0^2 + b \cdot \omega_0 + c = 0$$

das *Pneuma* ω_0 dieses Individuums bestimme, und daß das Ich $s/\mathfrak{p}$ der Monade s das Ich des in s geschaffenen Individuums sei.

Mit diesen Aussagen bekommt die klassische Vorstellung, daß die in der Natur beobachteten Individuen Geschöpfe seien, scarfen Umriß. Sie laden ein, die mit dem Darwinismus vorläufig beantwortete Frage nach der Herkunft der Mannigfaltigkeit der Naturerscheinungen neu zu stellen.

46. - Wenn ein absoluter Willensakt

$$\omega \rightarrow \frac{\alpha \cdot \omega + \beta}{\gamma \cdot \omega + \delta}$$

das Pneuma ω_0 eines Individuums im Sinne der Gleichung

$$\alpha \cdot \omega_0 + \beta = \omega_0 \cdot (\gamma \cdot \omega_0 + \delta)$$

unbewegt läßt, kann jener Willensakt dem Individuum zugerechnet werden.

In der Materie ist dieser Willensakt erkennbar als der durch

$$w \rightarrow \bar{w} = \frac{\alpha \cdot w + \beta}{\gamma \cdot w + \delta}$$

bestimmte Automorphismus des Es, der auch durch eine Gleichung

$$\frac{\bar{w} - \omega_0}{\bar{w} - \bar{\omega}_0} = \rho \cdot \frac{w - \omega_0}{w - \bar{\omega}_0}$$

beschrieben werden kann, in der ρ eine komplexe Zahl vom Betrage 1 sei. Jede Zahl r des von ω_0 erzeugten Körpers (ω_0), der als der Verstand des Individuums gedeutet worden ist, bestimmt auf die Weise

$$\frac{\bar{\omega} - \omega_0}{\bar{\omega} - \bar{\omega}_0} = \frac{r}{\bar{r}} \cdot \frac{\omega - \omega_0}{\omega - \bar{\omega}_0}$$

einen dem Individuum zuzurechnenden Willensakt.