Rendiconti
Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL
Memorie di Matematica
109° (1991), Vol. XV, fasc. 14, pagg. 219-227

GIORGIO LETTA - LUCA PRATELLI (*)

Sur une forme faible d'échangeabilité (**)

RÉSUMÉ. — Pour une famille infinie de variables aléatoires, on étudie la notion d'échangeabilité partielle, relative à une partition donnée de l'ensemble des indices, ainsi qu'une notion d'échangeabilité «faible». En généralisant le théorème de de Finetti, on charactérise, à l'aide de la notion d'indépendance conditionnelle, les familles qui sont partiellement échangeables suivant des partitions d'un type particulier.

Su una forma debole di scambiabilità

SUNTO. — Per una famiglia infinita di variabili aleatorie, si studiano la scambiabilità parziale, relativa ad un'assegnata partizione dell'insieme degl'indici, e una sorta di scambiabilità «debole». Generalizzando il teorema di de Finetti, si caratterizzano, mediante la nozione d'indipendenza condizionale, le famiglie che risultano parzialmente scambiabili secondo partizioni di un tipo speciale.

1. - INTRODUCTION

La notion bien connue de famille échangeable de variables aléatoires peut être généralisée de la manière suivante: étant données une famille $(X_i)_{i \in I}$ de variables aléatoires (sur un même espace $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs dans des espaces mesurables non nécessairement identiques) et une partition $\mathcal{G}$ de l'ensemble I des indices, on dit que la famille $(X_i)_{i \in I}$ est *partiellement échangeable* suivant $\mathcal{G}$ si les deux conditions suivantes sont remplies:

(1.1) *Pour tout élément G de $\mathcal{G}$, les X_i avec $i \in G$ admettent un même espace d'arrivée.*

(1.2) *Pour toute permutation σ de I, compatible avec $\mathcal{G}$* (c'est-à-dire telle que l'on ait $\sigma(G) = G$ pour chaque élément G de $\mathcal{G}$) *les deux blocs $[X_i]_{i \in I}$, $[X_{\sigma(i)}]_{i \in I}$ admettent une même loi.*

On voit aisément que, dans la deuxième de ces conditions, on pourrait se borner (sans altérer la définition) aux permutations σ, compatibles avec $\mathcal{G}$, qui ne déplacent

(*) Indirizzo degli autori: Università di Pisa, Dipartimento di Matematica, via Buonarroti 2, I-56100 Pisa.
(**) Memoria presentata il 31 ottobre 1991 da Giorgio Letta, uno dei XL.

ISSN-0392-4106

qu'un nombre fini d'indices (ou même à celles qui ne déplacent que *deux* indices).

Il est clair que, lorsque $\mathcal{G}$ est la partition banale admettant comme unique élément l'ensemble I tout entier, la notion précédente se réduit à celle de famille échangeable.

Dans le cas où I est l'ensemble des entiers positifs, ou, de façon plus générale, un ensemble infini quelconque (voir [1]), le théorème de de Finetti permet de donner une caractérisation bien connue de la notion d'échangeabilité. Afin d'énoncer ce théorème de manière aussi concise que possible, nous introduirons la locution suivante. Etant donnée une sous-tribu $\mathcal{U}$ de $\mathcal{A}$, nous dirons que deux variables aléatoires Y, Z sont *$\mathcal{U}$-équivalentes* si elles admettent le même espace d'arrivée et si, pour tout élément A de $\mathcal{U}$, la loi conjointe de (Y, I_A) est identique à celle de (Z, I_A). En utilisant ce langage, le théorème de de Finetti peut s'énoncer ainsi: pour que la famille infinie (X_i) soit échangeable, il faut et il suffit qu'il existe une sous-tribu $\mathcal{U}$ de $\mathcal{A}$ jouissant des deux propriétés suivantes:

(1.3) *Les X_i sont $\mathcal{U}$-conditionnellement indépendantes.*

(1.4) *Les X_i sont deux à deux $\mathcal{U}$-équivalentes.*

Il est clair, d'autre part, que si une tribu $\mathcal{U}$ possède ces deux propriétés, il en est de même de la complétée de $\mathcal{U}$. Par conséquent, si l'on convient d'appeler *tribu de de Finetti* (pour la famille (X_i)) une tribu complète $\mathcal{U}$ vérifiant les conditions (1.3), (1.4), on pourra énoncer le théorème de de Finetti de la manière suivante:

Pour une famille infinie de variables aléatoires, l'échangeabilité équivaut à l'existence d'une tribu de de Finetti.

Dans le présent article, nous nous proposons de caractériser de manière analogue l'échangeabilité partielle. De façon plus précise, nous nous proposons de caractériser les familles infinies $(X_i)_{i \in I}$ de variables aléatoires qui sont partiellement échangeables suivant des partitions de I d'un type un peu particulier. Nous dirons qu'une partition $\mathcal{G}$ de I est *spéciale* si elle vérifie l'une des deux conditions suivantes:

(1.5) *Tous les ensembles appartenant à $\mathcal{G}$ sont infinis.*

(1.6) *Un des ensembles appartenant à $\mathcal{G}$ est réduit à un seul élément, et tous les autres sont infinis.*

En outre, étant donnée une sous-tribu $\mathcal{U}$ de $\mathcal{A}$, nous dirons que deux indices i, j sont *$\mathcal{U}$-équivalents* si les deux variables aléatoires X_i, X_j sont $\mathcal{U}$-équivalentes; nous dirons *induite* par $\mathcal{U}$ la partition de I constituée par les classes de $\mathcal{U}$-équivalence.

Enfin, nous appellerons *tribu de de Finetti au sens faible* (pour la famille (X_i)) une tribu complète $\mathcal{U}$ qui possède la propriété (1.3) et la propriété suivante (plus faible que (1.4)):

(1.7) *La partition de I induite par $\mathcal{U}$ est spéciale.*

Avec cette terminologie, nous démontrerons entre autre (voir (5.3)) que, pour une famille infinie de variables aléatoires, l'échangeabilité partielle suivant une partition spéciale de l'ensemble des indices équivaut à l'existence d'une tribu de de Finetti au sens faible. A cet effet nous aurons besoin d'une notion d'échangeabilité «faible», que nous introduirons au paragraphe 4.

2. - Hypothèses, notations, rappels

On se place dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Le mot «tribu» signifie toujours «sous-tribu de $\mathcal{A}$». Une tribu est dite *complète* si elle contient l'idéal des événements négligeables. On appelle *complétée* d'une tribu la plus petite tribu complète qui la contient.

Pour tout élément p de $[1, \infty]$, on désigne simplement par L^p l'espace $L^p(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Etant donnée une tribu complète $\mathcal{U}$, on désigne par $P^{\mathcal{U}}$ l'opérateur d'espérance conditionnelle par rapport à $\mathcal{U}$, considéré comme une application de L^1 dans L^1. L'opérateur $P^{\mathcal{U}}$ applique L^p dans L^p. En outre, dans la dualité entre L^p et L^q (où q désigne l'exposant conjugué de p), on a

$$\langle P^{\mathcal{U}}[y], z \rangle = \langle y, P^{\mathcal{U}}[z] \rangle$$

pour tout élément y de L^p et tout élément z de L^q. Cette relation montre que l'application $y \mapsto P^{\mathcal{U}}[y]$ de l'espace L^p dans lui même est faiblement continue (c'est-à-dire continue pour la topologie faible $\sigma(L^p, L^q)$).

Nous désignerons par $L^p(\mathcal{U})$ le noyau de l'application linéaire $y \mapsto y - P^{\mathcal{U}}[y]$ de L^p dans L^p:

$$L^p(\mathcal{U}) = \{ y \in L^p : y = P^{\mathcal{U}}[y] \}.$$

Un élément y de L^p appartient à $L^p(\mathcal{U})$ si et seulement si chacun de ses représentants est mesurable par rapport à $\mathcal{U}$.

Dans toute la suite, on suppose que $(X_i)_{i \in I}$ est une famille infinie de variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs dans des espaces mesurables non nécessairement identiques. Pour toute partie H de I, on désigne par $\mathcal{T}_H$ la complétée de la tribu engendrée par les X_i avec $i \in H$.

3. - Indépendance conditionnelle et tribu terminale

Nous désignerons par $\mathfrak{J}$ le filtre constitué par les parties des I dont le complémentaire par rapport à I est fini. En outre, nous poserons

$$\mathcal{T} = \bigcap_{J \in \mathfrak{J}} \mathcal{T}_J. \tag{3.1}$$

La tribu $\mathcal{T}$ ainsi définie est appelée la *tribu terminale* (relative à la famille (X_i) et à la loi P).

(3.2) Proposition: *Soit $\mathcal{U}$ une tribu complète, telle que les X_i soient $\mathcal{U}$-conditionnellement indépendantes, et désignons par $\mathcal{G}$ la partition de I induite par $\mathcal{U}$.*

Alors:

(a) $\mathcal{U}$ *contient* $\mathcal{T}$.

(b) *La famille* $(X_i)_{i\in I}$ *est partiellement échangeable suivant* $\mathcal{G}$.

Démonstration: (*a*) Soit T une variable aléatoire réelle mesurable par rapport à $\mathcal{T}$ (c'est-à-dire par rapport à chacune des tribus $\mathcal{T}_J$ avec $J \in \mathfrak{I}$), et montrons que T est mesurable par rapport à $\mathcal{U}$.

Pour toute partie finie H de I, choisissons une function réelle f_H, mesurable sur l'espace d'arrivée de $[X_i]_{i\in I\setminus H}$, telle que l'on ait

(3.3) $$T = f_H \circ [X_i]_{i\in I\setminus H} \text{ presque sûrement}.$$

Puisque la variable aléatoire $[X_i]_{i\in I\setminus H}$ est $\mathcal{U}$-conditionnellement indépendante de $[X_i]_{i\in H}$, il en est de même de T (grâce à (3.3)).

Cette conclusion étant valable pour toute partie finie H de I, elle prouve che T est $\mathcal{U}$-conditionnellement indépendante de $[X_i]_{i\in I}$.

La relation (3.3) (avec $H = \emptyset$) montre alors que T est $\mathcal{U}$-conditionnellement indépendante d'elle même, c'est-à-dire $\mathcal{U}$-mesurable.

(*b*) Prouvons maintenant que la famille (X_i) est partiellement échangeable suivant $\mathcal{G}$, c'est-à-dire qu'elle vérifie la condition (1.2).

Etant donnée une permutation σ de I, compatible avec $\mathcal{G}$, il s'agit de prouver que, pour toute partie finie H de I et toute famille $(f_i)_{i\in H}$ telle que f_i soit mesurable bornée sur l'espace d'arrivée de X_i, les deux variables aléatoires

(3.4) $$\prod_{i\in H} f_i \circ X_i, \qquad \prod_{i\in H} f_i \circ X_{\sigma(i)}$$

ont même espérance. Or, puisque X_i est $\mathcal{U}$-équivalente à $X_{\sigma(i)}$, les deux variables aléatoires $f_i \circ X_i, f_i \circ X_{\sigma(i)}$ ont même espérance conditionnelle par rapport à $\mathcal{U}$. Il en résulte, grâce à l'indépendance $\mathcal{U}$-conditionnelle des X_i, que les deux variables aléatoires (3.4) ont même espérance conditionnelle par rapport à $\mathcal{U}$.

L'assertion est donc démontrée.

(3.5) Remarque: L'assertion (*a*) de la proposition précédente contient, comme cas particulier, la loi 0-1 de Kolmogorov pour une famille de variables aléatoires indépendantes. Il suffit, pour s'en convaincre, de prendre $\mathcal{U}$ égale à la tribu engendrée par les événements négligeables.

4. - Echangeabilité faible et tribu de de Finetti au sens faible

Nous nous proposons maintenant de caractériser la notion de tribu de de Finetti au sens faible à l'aide d'une certaine notion d'échangeabilité «faible». Cette notion, dont la définition est beaucoup plus contournée que celle d'échangeabilité partielle, a été introduite dans [2] sous l'inspiration de [1].

(4.1) Définition: Etant donnée une tribu $\mathcal{U}$, on dit que la famille (X_i) est *$\mathcal{U}$-faiblement échangeable* si toute partie L de I, finie et admettant au moins deux éléments, possède une partition $\{H, K\}$ vérifiant la condition suivante:

(4.2) *Pour tout élément J de $\mathfrak{J}$ il existe une application α de L dans I, avec $\alpha(K) \subset J$ et $\alpha(i) = i$ pour $i \in H$, telle que les deux variables aléatoires $[X_i]_{i \in L}$, $[X_{\alpha(i)}]_{i \in L}$ soient $\mathcal{U}$-équivalentes.*

Il est clair que si la famille (X_i) est $\mathcal{U}$-faiblement échangeable, alors elle est $\mathcal{V}$-faiblement échangeable pour toute sous-tribu $\mathcal{V}$ de $\mathcal{U}$.

On dit que la famille (X_i) est *faiblement échangeable* si elle est $\mathcal{T}$-faiblement échangeable (oú $\mathcal{T}$ désigne la tribu terminale, définie par (3.1)).

(4.3) Théorème: *Pour une tribu $\mathcal{U}$, les conditions suivantes sont équivalentes*:

(*a*) *$\mathcal{U}$ est une tribu de de Finetti au sens faible* (*i.e. une tribu complète vérifiant* (1.3), (1.7)).

(*b*) *$\mathcal{U}$ contient $\mathcal{T}$, et la famille (X_i) est $\mathcal{U}$-faiblement échangeable.*

Par conséquent, si $\mathcal{U}$ est une tribu de de Finetti au sens faible, il en est de même de toute tribu comprise entre $\mathcal{T}$ et $\mathcal{U}$.

Démonstration: $(a) \Rightarrow (b)$: Supposons que $\mathcal{U}$ soit une tibu de de Finetti au sens faible. L'inclusion $\mathcal{U} \supset \mathcal{T}$ résulte alors de (3.2) (*a*). Il reste à prouver que la famille (X_i) est $\mathcal{U}$-faiblement échangeable. Considérons, à cet effet, une partie L de I, finie et admettant au moins deux éléments. Puisque la partition de I induite par $\mathcal{U}$ est spéciale, il existe dans L un élément k dont la classe de $\mathcal{U}$-équivalence est infinie. La partition de L constituée par les deux ensembles $H = L \setminus \{k\}$, $K = \{k\}$ possède alors la propriété (4.2).

$(b) \Rightarrow (a)$: Supposons la condition (*b*) remplie. Pour prouver que la partition de I induite par $\mathcal{U}$ est spéciale, il suffit d'appliquer la Définition (4.1) au cas où L est un ensemble à deux éléments. Il reste à prouver que les X_i sont $\mathcal{U}$-conditionnellement indépendantes. A cet effet, il suffit de prouver que toute partie L de I, finie et admettant au moins deux éléments, possède une partition formée de deux ensembles H, K tels que les deux variables aléatoires $[X_i]_{i \in H}$, $[X_i]_{i \in K}$ soient $\mathcal{U}$-conditionnellement indépendantes. Or, ceci résulte aussitôt du lemme suivant:

(4.4) Lemme: *Etant donnée une tribu $\mathcal{U}$ contenant $\mathcal{T}$, soient H, K deux parties de I, finies et disjointes, telles qu'en posant $L = H \cup K$, la condition* (4.2) *soit remplie.*

On a alors les deux conclusions suivantes:

(*a*) *Les opérateurs d'espérance conditionnelle $P^{\mathcal{T}}$, $P^{\mathcal{U}}$ coïncident sur $L^1(\mathcal{T}_K)$.*

(*b*) *Les deux variables aléatoires $[X_i]_{i \in H}$, $[X_i]_{i \in K}$ sont $\mathcal{U}$-conditionnellement indépendantes.*

Démonstration: Pour tout élément J de $\mathfrak{J}$, désignons par F_J l'ensemble (non vide) constitué par les applications α de L dans I, avec $\alpha(K) \subset J$ et $\alpha(i) = i$ pour tout élément i de H, telles que la variable aléatoire $[X_i]_{i \in L}$ soit $\mathcal{U}$-équivalente à $[X_{\alpha(i)}]_{i \in L}$. Les ensembles de la forme F_J (où J parcourt $\mathfrak{J}$) forment une base de filtre sur F_I: nous désignerons par $\mathcal{F}$ le filtre correspondant.

Fixons un élément x de $L^1(\mathcal{T}_H)$ et un élément y de $L^\infty(\mathcal{T}_K)$. D'après la définition de $\mathcal{T}_K$, il existe un représentant de y de la forme $g \circ [X_i]_{i \in K}$, avec g fonction mesurable bornée sur l'espace d'arrivée de $[X_i]_{i \in K}$. Pour tout élément α de F_I, nous désignerons par y_α l'élément de $L^\infty(\mathcal{T}_K)$ dont $g \circ [X_{\alpha(i)}]_{i \in K}$ est un représentant.

Montrons que l'on a

$$P^{\mathcal{T}}[y] = P^{\mathcal{U}}[y] = \lim_{\alpha} y_\alpha,$$

où la limite est à entendre suivant le filtre $\mathcal{F}$ et par rapport à la topologie faible $\sigma(L^\infty, L^1)$. A cet effet, commençons par remarquer que les éléments y_α forment un ensemble relativement compact pour $\sigma(L^\infty, L^1)$, car ils ont tous une même norme dans L^∞.

Supposons maintenant qu'un élément z de L^∞ soit valeur d'adhérence faible de l'application $\alpha \mapsto y_\alpha$ suivant le filtre $\mathcal{F}$ (c'est-à-dire qu'il soit limite de la même application suivant un filtre plus fin). Fixons un élément J de $\mathfrak{J}$. Puisque la relation $y_\alpha \in L^\infty(\mathcal{T}_J)$ est vraie dès que α appartient à F_J, on a $z \in L^\infty(\mathcal{T}_J)$. Grâce à (3.1), cela prouve que l'on a

$$z \in L^\infty(\mathcal{T}) \subset L^\infty(\mathcal{U}).$$

Par conséquent, en partant de la relation

$$P^{\mathcal{U}}[y] = P^{\mathcal{U}}[y_\alpha],$$

on trouve

$$P^{\mathcal{U}}[y] = P^{\mathcal{U}}[z] = z.$$

On a ainsi démontré que l'unique valeur d'adhérence (c'est-à-dire la limite) de y_α suivant le filtre $\mathcal{F}$ est $z = P^{\mathcal{U}}[y]$. En outre, puisque z appartient à $L^\infty(\mathcal{T})$, on a aussi $z = P^{\mathcal{T}}[y]$.

Par conséquent, les deux opérateurs $P^{\mathcal{T}}, P^{\mathcal{U}}$ coïncident sur $L^\infty(\mathcal{T}_K)$ (donc aussi sur $L^1(\mathcal{T}_K)$). L'assertion (*a*) est ainsi démontrée.

Si maintenant on part de la relation

$$P^{\mathcal{U}}[xy] = P^{\mathcal{U}}[xy_\alpha],$$

et on passe à la limite, on trouve

$$P^{\mathcal{U}}[xy] = P^{\mathcal{U}}[xz] = P^{\mathcal{U}}[x]\, P^{\mathcal{U}}[y],$$

ce qui prouve l'assertion (*b*).

En appliquant le lemme qu'on vient de démontrer, on obtient aussi la proposition suivante, qui apporte un complément intéressant au Théorème (4.3).

(4.5) Proposition: *Soit $\mathcal{U}$ une tribu de de Finetti au sens faible, et désignons par $\mathcal{G}$ la partition de I induite par $\mathcal{U}$. Désignons en outre par I^* la partie de I (qui diffère de I par un élément au plus) constituée par la réunion de tous les ensembles infinis appartenant à $\mathcal{G}$.*

La tribu $\mathcal{U}$ est alors $\mathcal{T}$-conditionnellement indépendante de $\mathcal{T}_{I^*}$. Par conséquent, elle coïncide avec $\mathcal{T}$ dès qu'elle est contenue dans $\mathcal{T}_{I^*}$.

Démonstration: Puisque $\mathcal{U}$ contient $\mathcal{T}$, il suffit de démontrer que les opérateurs d'espérance conditionnelle $P^{\mathcal{T}}$, $P^{\mathcal{U}}$ coïncident sur $L^1(\mathcal{T}_{I^*})$. A cet effet, fixons une partie finie K de I^*. Puisque les X_i sont $\mathcal{U}$-conditionnellement indépendantes, et que la partition $\mathcal{G}$ est spéciale, on voit aisément que la condition (4.2) est remplie avec $H = \emptyset$. Le lemme précédent entraîne donc que les opérateurs $P^{\mathcal{T}}$, $P^{\mathcal{U}}$ coïncident sur $L^1(\mathcal{T}_K)$, ce qui suffit (K étant arbitraire) pour démontrer l'assertion.

5. - La tribu $\mathcal{G}$-symétrique

La notion de tribu symétrique (que l'on définit lorsque les variables aléatoires X_i admettent un même espace d'arrivée) peut être généralisée de la manière suivante.

Soit $\mathcal{G}$ une partition de I, telle que, pour chaque élément G de $\mathcal{G}$, les X_i avec $i \in G$ admettent un même espace d'arrivée.

Un événement A sera dit $\mathcal{G}$-*symétrique* si, pour toute permutation σ de I, compatible avec $\mathcal{G}$ et ne déplaçant que deux indices, il existe une fonction réelle f, mesurable sur l'espace d'arrivée de $[X_i]_{i \in I}$, telle que la relation

$$I_A = f \circ [X_i]_{i \in I} = f \circ [X_{\sigma(i)}]_{i \in I} \tag{5.1}$$

soit vérifiée presque sûrement.

Les événements $\mathcal{G}$-symétriques forment une tribu, qu'on appellera la *tribu $\mathcal{G}$-symétrique*. Il est clair que cette tribu est comprise entre $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}_I$. On l'appellera simplement la *tribu symétrique* lorsque $\mathcal{G}$ est la partition banale admettant I comme unique élément.

(5.2) Théorème: *Soit $\mathcal{G}$ une partition spéciale de I, telle que la famille (X_i) soit partiellement échangeable suivant $\mathcal{G}$. Désignons par $\mathcal{S}$ la tribu $\mathcal{G}$-symétrique, et par $\mathcal{H}$ la partition de I induite par $\mathcal{S}$.*

On a alors les conclusions suivantes:

(*a*) *Pour toute permutation σ de I, compatible avec $\mathcal{G}$ et ne déplaçant que deux indices, les deux variables aléatoires $[X_i]_{i \in I}$, $[X_{\sigma(i)}]_{i \in I}$ sont $\mathcal{S}$-équivalentes.*

(*b*) *$\mathcal{S}$ est une tribu de de Finetti au sens faible.*

(*c*) *$\mathcal{G}$ est plus fine que $\mathcal{H}$.*

(*d*) *$\mathcal{S}$ coïncide avec $\mathcal{T}$ lorsque tout élément de $\mathcal{H}$ est infini (donc, en particulier, lorsque tout élément de $\mathcal{G}$ est infini).*

Démonstration: (*a*) Soit σ une permutation de I, compatible avec $\mathcal{G}$, qui ne déplace que deux indices. Etant donné un élément A de $\mathcal{S}$, choisissons une fonction réelle f, mesurable sur l'espace d'arrivée de $[X_i]_{i \in I}$, telle que la relation (5.1) soit vérifiée presque sûrement. Grâce à l'hypothèse d'échangeabilité partielle, la loi de $[X_i]_{i \in I}$ est identique à celle de $[X_{\sigma(i)}]_{i \in I}$. Il en résulte que la loi conjointe de $([X_i]_{i \in I}, I_A)$ est identique à celle de $([X_{\sigma(i)}]_{i \in I}, I_A)$.

L'assertion (a) est donc démontrée.

(b) Puisque $\mathcal{S}$ contient $\mathcal{T}$, il suffit (grâce à (4.3)) de prouver que la famille (X_i) est $\mathcal{S}$-faiblement échangeable. A cet effet, considérons une partie L de I, finie et admettant au moins deux éléments.

Puisque la partition $\mathcal{G}$ est spéciale, il existe un élément k de L tel que l'ensemble de $\mathcal{G}$ auquel k appartient soit infini. Montrons que la partition de L formée par les ensembles $H = L \setminus \{k\}$, $K = \{k\}$ possède la propriété (4.2) (avec $\mathcal{S}$ à la place de $\mathcal{U}$).

Etant donné un élément J de $\mathfrak{J}$, choisissons dans J un indice j (différent de k) tel que j et k appartiennent au même élément de $\mathcal{G}$. Désignons en outre par σ la permutation de I qui déplace seulement k et j. Il résulte de (a) que les deux variables aléatoires $[X_i]_{i \in L}$, $[X_{\sigma(i)}]_{i \in L}$ sont $\mathcal{S}$-équivalentes. L'assertion est donc prouvée.

(c) Il s'agit de prouver que, pour tout couple k, j d'indices appartenant à un même élément de $\mathcal{G}$, les deux variables aléatoires X_k, X_j sont $\mathcal{S}$-équivalentes. Or ceci résulte immédiatement de (a).

(d) Désignons par I^* la réunion de tous les ensembles infinis appartenant à $\mathcal{H}$. Si tous les ensembles appartenant à $\mathcal{H}$ sont infinis (ce qui arrive notamment lorsque tous les ensembles appartenant à $\mathcal{G}$ sont infinis), alors on a $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}_I = \mathcal{T}_{I^*}$, d'où $\mathcal{S} = \mathcal{T}$ grâce à (4.5).

(5.3) Corollaire: *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(a) *Il existe une partition spéciale $\mathcal{G}$ de l'ensemble I, telle que la famille (X_i) soit partiellement échangeable suivant $\mathcal{G}$.*

(b) *Il existe une tribu de de Finetti au sens faible.*

(c) *La tribu terminale $\mathcal{T}$ est une tribu de de Finetti au sens faible.*

(d) *La famille (X_i) est faiblement échangeable.*

En outre, si ces conditions sont remplies, alors $\mathcal{T}$ est l'unique tribu de de Finetti au sens faible contenue dans $\mathcal{T}_{I^*}$, où I^* désigne la réunion des ensembles infinis appartenant à la partition de I induite par $\mathcal{T}$.

Démonstration: L'implication $(a) \Rightarrow (b)$ résulte du théorème précédent. L'équivalence des conditions (b), (c), (d) résulte de (4.3). L'implication $(d) \Rightarrow (a)$ résulte de (4.5).

De façon analogue on obtient le corollaire suivant, relatif au cas des familles échangeables, qui contient notamment les théorèmes de de Finetti et de Hewitt-Savage.

(5.4) Corollaire: *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(a) *La famille (X_i) est échangeable.*

(b) *Il existe une tribu de de Finetti.*

(*c*) *La tribu terminale* $\mathcal{T}$ *est de de Finetti.*

(*d*) *La famille* (X_i) *est faiblement échangeable, et les* X_i *sont deux à deux* $\mathcal{T}$*-équivalentes.*

En outre, si ces conditions sont remplies, alors $\mathcal{T}$ *est l'unique tribu de de Finetti contenue dans* $\mathcal{T}_I$ (*de sorte qu'elle coïncide avec la tribu symétrique*).

BIBLIOGRAPHIE

[1] G. Letta, *Sur les théorèmes de Hewitt-Savage et de de Finetti*, Sém. de Prob. XXIII. Springer LN in Math. 1372 (1989), 531-535.

[2] P. Manganelli, *Leggi condizionali, indipendenza condizionale, scambiabilità*, Tesi di laurea Univ. di Pisa 1990.