Rendiconti
Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL
Memorie di Matematica e Applicazioni
113° (1995), Vol. XIX, fasc. 1, pagg. 1-24

GAETANO FICHERA (*)

L'ultima lezione (**)

Desidero esprimere i miei ringraziamenti a quanti, colleghi, amici, studenti, sono oggi in quest'aula, spinti da un sincero sentimento di amicizia o di devozione verso la mia persona. Sono specialmente grato a quei colleghi che, giungendo da altre sedi, anche lontane, hanno voluto essere oggi presenti.

Apprezzo moltissimo la possibilità che mi è stata concessa di tenere in quest'aula la mia ultima lezione. In questa stessa aula, infatti, io tenni nel 1941, il 18 o il 19 novembre (non riesco a ricordare esattamente il giorno), la mia prima lezione. Mi ero laureato in Matematica qualche settimana prima ed il mio Maestro Mauro Picone, essendo alcuni dei suoi assistenti sotto le armi, mi aveva chiesto di svolgere uno dei corsi di esercitazioni connessi a quello di Analisi Matematica, del quale era il titolare. Fui, ovviamente, lusingato di accettare. Picone, con il «potere» di cui allora disponevano i «baroni» universitari, mi fece *ipso facto* nominare assistente incaricato presso la sua Cattedra, dando così inizio alla mia carriera di insegnante universitario. Tale attività dura da 51 anni, con la sola interruzione degli anni '43, '44 e '45, nei quali gli eventi della guerra mi impegnarono altrimenti. La mia attività didattica si è svolta sempre a Roma, ad eccezione del periodo che va dal '50 al '56, durante il quale, dopo esser divenuto professore di ruolo nel '49, insegnai nella Università di Trieste. Alla mia attività ufficiale vanno aggiunti i periodi, a volte anche abbastanza lunghi, dell'insegnamento da me tenuto in Università o Istituzioni all'estero. Questi incarichi fuori d'Italia, però, mai interferirono con i miei doveri di docente, sia a Roma che a Trieste.

Ritengo di non dover dedicare questa mia ultima lezione del corso di Analisi Superiore ad un argomento tecnico. Il farlo sarebbe una mancanza di cortesia verso i tanti amici, non matematici, oggi presenti in quest'aula. Evitando (per quanto possibile!) di entrare in stretti dettagli tecnici, cercherò di fare, invece, un consuntivo della mia atti-

(*) Indirizzo dell'Autore: Dipartimento di Matematica «Guido Castelnuovo», Università di Roma «La Sapienza», Piazzale Aldo Moro 5, 00185 Roma.

(**) Testo dell'ultima lezione del corso di *Analisi superiore* tenuta il 20 maggio 1992, in occasione del collocamento fuori ruolo, presso il Dipartimento di Matematica «Guido Castelnuovo» dell'Università di Roma «La Sapienza», da Gaetano Fichera, uno dei XL.

vità di ricercatore durante i 51 anni nei quali, come docente, appartengo all'Università.

Per bene inquadrare le scelte da me fatte in campo scientifico e gli argomenti dei quali mi sono occupato, è opportuno che io prima faccia un breve *excursus* su quella che era la situazione della Matematica in Italia all'inizio del secondo conflitto mondiale, quando iniziai la mia attività di ricercatore, e spieghi attraverso quale evoluzione la Matematica italiana avesse raggiunto, in quegli anni, quello stadio. Anni nei quali si era appena vissuto il trauma delle leggi razziali, le quali non avevano più lasciato dubbi sulla qualità morale del regime di allora ed avevano costretto gli Italiani ad assistere all'allontanamento dalla Cattedra di molti dei più grandi Scienziati del tempo.

Quando, alla fine, parlerò del mio contributo, non sarà una sorta di auto-commemorazione, ma piuttosto un felliniano «amarcord», forse un po' disordinato.

Allorché, al principio degli anni '40, iniziai la mia attività di ricercatore, in Italia si concludeva quel periodo, fra le due grandi guerre, nel quale tanti sostanziali mutamenti si erano manifestati nella Matematica italiana. Per spiegare questo, bisogna rifarsi a quello che la Matematica era in Italia prima del conflitto del '14-'18. In verità, la nostra Scienza aveva, dopo Lagrange, conosciuto, in Italia, un lungo periodo di torpore, solo interrotto dall'opera isolata di qualche valente Scienziato, quale l'astronomo Giovanni Plana ed il fisico matematico Gabrio Piola. Ma, a partire dagli anni '60 del secolo scorso, dopo la proclamazione del Regno d'Italia, si ebbe nel nostro Paese uno straordinario risveglio negli studi matematici e sotto la spinta di Uomini illustri, quali Francesco Brioschi, Luigi Cremona, Enrico Betti, Eugenio Beltrami, Felice Casorati e, successivamente, Ulisse Dini, Ernesto Cesaro, Vito Volterra, l'Italia raggiunse una delle prime posizioni, nel contesto internazionale, nel campo della Matematica. L'opera di Eugenio Beltrami e quella successiva di Luigi Bianchi, di Gregorio Ricci-Curbastro, di Tullio Levi-Civita fece primeggiare l'Italia, fino all'epoca del primo conflitto mondiale, nel campo della Geometria Differenziale. Nello stesso lasso di tempo l'Italia si affermava come il Paese dove la Geometria Algebrica, con l'opera di Guido Castelnuovo, di Federigo Enriques e di Francesco Severi, raggiungeva le più alte vette. Ma un altro primato l'Italia raggiunse, in quel periodo, in un campo certamente particolare della Fisica Matematica, ma di grande importanza per le applicazioni e, soprattutto, per le sue connessioni con l'Analisi e, specialmente, con la teoria delle equazioni alle derivate parziali. Intendo riferirmi alla Teoria Matematica dell'Elasticità, alla quale recarono fondamentali contributi Enrico Betti, Eugenio Beltrami, Vito Volterra, Carlo Somigliana. In tempi più recenti, l'opera di Antonio Signorini e di altri è valsa a serbare al nostro Paese una posizione di prestigio in questo settore, al confine fra la Fisica Matematica e l'Analisi.

Per quanto riguarda l'Analisi Matematica, non può dirsi che l'Italia raggiunse, fra il 1860 ed il 1914, gli stessi altissimi livelli conseguiti in questa disciplina in Germania ed in Francia, dove, rispettivamente, operavano Uomini come Bernhard Riemann, Karl Weierstrass, David Hilbert e come Henri Poincaré, Émile Picard, Henri Lebesgue, per citare solo i maggiori. Ma l'opera di Ulisse Dini, di Ernesto Cesaro e soprattutto di Vito

Volterra portò il nostro Paese, anche in questo campo, in una posizione di alto prestigio. È merito, infatti, di Volterra essere stato l'iniziatore, verso la fine del secolo scorso, di quell'importante ramo della Matematica che è l'Analisi Funzionale. Oggi qualcuno avanza delle riserve sul ruolo pionieristico che Volterra ebbe in questa nuova disciplina. Scrive, infatti, Jean Dieudonné nella sua Monografia sulla Storia dell'Analisi Funzionale [1, p. 86]: *We must finally mention the first attempt at «Functional Analysis» of the young Volterra in 1887, to which, under the influence of Hadamard, has been attributed an exaggerated hystorical importance.*

Per rendersi conto di quanto sia eccessiva la severità di tale giudizio sull'opera di Volterra, dato dall'eminente collega francese, bisogna svolgere qualche considerazione. A tal fine occorre mettere a confronto fra loro due diversi atteggiamenti di pensiero da parte di coloro che si occupano di Storia, in generale, e di Storia della Scienza, in particolare. Tali atteggiamenti consistono nella *Revisitation* (adopero la parola inglese che, tradotta in italiano, mal si adegua al concetto da esprimere) e nella *Storia* vera e propria. La *Revisitation* consiste nel riesaminare con la mentalità di oggi, con l'esperienza ed il complesso di nuove acquisizioni che il passare del tempo ci ha reso disponibili, quei temi che appartengono ad un determinato periodo del passato. Questo approccio corrisponde a fare della *Critica storica*, piuttosto che vera e propria *Storia*. La *Storia*, invece, è qualcosa di più sottile e di più difficile. Infatti, il vero storico deve compiere lo sforzo di spogliarsi completamente del modo di pensare attuale e di tutta l'esperienza acquisita nel lasso di tempo fra il momento in cui egli lavora e l'epoca che sta esaminando. Egli deve cercare di ricostruire la mentalità tipica del tempo al quale la sua ricerca si riferisce, liberandosi da tutte le sovrastrutture sorte durante il passare degli anni. Solo in tal modo egli può dare un giudizio obiettivo su una data figura storica e, nel caso di uno Scienziato, valutarne correttamente l'opera.

Per quanto riguarda Volterra, basti dire che il Calcolo delle Variazioni, un capitolo fra i più importanti dell'Analisi Funzionale, era già, prima della sua opera, coltivato da oltre due secoli. Eppure nessuno dei sommi cultori di quella disciplina, Newton, i Bernoulli, Eulero, Lagrange, aveva immaginato di considerare gli integrali, studiati dal punto di vista variazionale, come *funzionali*, nel senso poi introdotto da Volterra con il suo concetto di *funzione di linea*! Oggi, il fatto che gli integrali del Calcolo delle Variazioni siano dei particolari funzionali ci appare come una circostanza del tutto ovvia...

Parlando degli analisti italiani che operarono fra l'inizio del secolo e la prima guerra mondiale, un posto particolare spetta a quella straordinaria meteora che fu Eugenio Elia Levi. Cadde in guerra a soli 34 anni, mentre, tenente del Genio, guidava i suoi soldati alla conquista di una posizione nemica. Se il destino non fosse stato a lui così avverso, egli, sicuramente, sarebbe oggi ricordato come uno dei più grandi analisti di tutti i tempi. In verità, i risultati da lui conseguiti, nella breve stagione della sua vita, sono di eccezionale valore e dureranno a lungo nel tempo.

Nel periodo fra le due guerre avvenne che la Matematica italiana, nei due campi ove essa aveva primeggiato, la Geometria Differenziale e quella Algebrica, iniziasse una inesorabile decadenza. Nel campo della Geometria Differenziale vi fu, in verità, in Italia, un grande rigoglio di studi, protesi verso la cosiddetta *Geometria Differenziale Proiettiva*, ma tale campo non è mai appartenuto alle grandi correnti di pensiero, lungo le quali la Geometria Differenziale si sviluppava all'estero. Per cercare di spiegare questo, mi permetterò di dire, usando una moderna dizione, che la Geometria Differenziale Proiettiva era una teoria *nata in provetta*. Felix Klein, nel suo celebre *Programma di Erlangen* (1872), aveva dato una luminosa risposta alla domanda: Che cosa è una Geometria? Una Geometria, secondo Klein, è il complesso di tutti gli oggetti di una data classe e delle proprietà di questi, che sono invarianti rispetto ad un gruppo di trasformazioni. In questo quadro la Geometria Differenziale classica si inseriva quale studio di tutte le proprietà, pertinenti agli intorni infinitesimali di un punto su una curva, su una superficie e, in generale, su una varietà a più dimensioni (proprietà differenziali), le quali sono invarianti rispetto al gruppo euclideo. Venne allora spontaneo proporre un *programma* consistente nel ricercare le proprietà differenziali degli intorni di un punto su una varietà di assegnata dimensione, invarianti rispetto al gruppo proiettivo. Tale programma vagheggiava, pertanto, la creazione di una Geometria Differenziale Proiettiva, da riguardare come evoluzione della Geometria Differenziale classica, così come la Geometria Proiettiva lo è di quella Euclidea. Ricerche in questo indirizzo erano state intraprese da Halphen e da Wilczynski, ma fu Guido Fubini che, a partire dal 1914, si adoperò per sistematicamente espletare quel programma. Fubini era, soprattutto, un formidabile analista, dotato di amplissimi interessi. A lui si devono importanti risultati in diversi campi della Matematica. Dotato di una eccezionale capacità algoritmica, egli riuscì, dopo lunghe ricerche, a scoprire due forme differenziali, una quadratica e l'altra cubica, le quali caratterizzano una superficie rispetto al gruppo proiettivo [2], così come le due celebri forme differenziali quadratiche di Gauss la caratterizzano rispetto al gruppo metrico.

Questi invarianti proiettivi si accompagnavano a tanti altri scoperti da Fubini con ricerche nelle quali la maestria analitica spesso prevaleva sull'intuizione geometrica. All'interpretazione geometrica degli invarianti differenziali proiettivi scoperti, si dedicarono intensamente diversi matematici, specialmente italiani, ed in particolare i due eminenti geometri differenzialisti: Alessandro Terracini ed Enrico Bompiani. Specialmente l'opera di quest'ultimo testimonia dello sforzo, spesso immane, per dare un contenuto geometrico a formazioni analitiche astruse, ottenute attraverso calcoli molto laboriosi.

Credo possa onestamente affermarsi che la Geometria Differenziale Proiettiva ha oggi un interesse assai marginale nel contesto della Geometria Differenziale, che invece conobbe all'estero, nel periodo fra le due guerre, grandiosi sviluppi in ben diversi indirizzi, ai quali gli Italiani rimasero estranei.

Sorgono a questo punto le domande: una teoria matematica può proficuamente svilupparsi ed affermarsi, sol perché di essa può *a priori* formularsi un preciso *programma*? Non è, invece, avvenuto, nelle varie teorie matematiche, che la possibilità d'inquadramento in un *programma* si è manifestata *a posteriori*, quando già il corpo della dottrina era ben sviluppato e ricca la messe dei risultati già raggiunti?

Interrogativi, questi, assai affascinanti, che appartengono alla Filosofia della Scienza, ma che non è il caso di discutere oggi.

La Geometria Algebrica iniziò, invece, in Italia, la sua decadenza, non perché avesse imboccato un «dead end», ma perché i metodi, in verità geniali, che i grandi Maestri italiani di questa disciplina avevano escogitato, si erano esauriti e non erano in grado di dare più di quanto avessero già dato. Tali metodi, in Castelnuovo e, specialmente, in Enriques, erano fondati su una profonda intuizione geometrica, che faceva ricercare i risultati attraverso mirabili visioni sintetiche che svelavano, sì, l'essenza dei nuovi concetti, sui quali si stava indagando, ma, sovente, lasciavano qualche perplessità sull'assoluto rigore delle definizioni date e delle dimostrazioni proposte per provare i nuovi teoremi. A questi metodi sintetici, che egli pure largamente impiegò, Severi affiancò metodi di natura più analitica, con una mirabile sintesi fra i procedimenti tipici della Scuola italiana e quelli cosiddetti «trascendenti», basati sull'Analisi Matematica, che, specie i grandi analisti tedeschi e francesi, come Riemann, Weierstrass, Poincaré e Picard, avevano impiegato nello studio della teoria delle funzioni su una varietà riemanniana, studio che ha profondissime connessioni con la Geometria Algebrica.

La presunta mancanza di rigore nell'opera dei grandi geometri algebrici italiani suscitò dure critiche all'estero, specie dopo l'avvento della Scuola iper-rigorista dei Bourbaki.

Personalmente mi trovai ad assistere, nel 1954, durante il Congresso internazionale dei matematici ad Amsterdam, ad un violento scontro fra Francesco Severi, allora già 75-enne, ed André Weil. Quest'ultimo accusava, con violenza, la Scuola italiana di Geometria Algebrica di non avere, in realtà, conseguito i risultati delle teorie da loro coltivate per l'insufficienza, sia delle definizioni date che delle dimostrazioni fornite. Severi non era uomo da lasciarsi strapazzare e rispose, con non minore vivacità, sostenendo che in una teoria quello che conta, non tanto è il rigore delle proposizioni e delle susseguenti dimostrazioni, ma la scoperta di idee nuove e la intuizione dei risultati che le collegano. Ne sorse un acceso diverbio, del quale B. L. Van der Waerden dà un obiettivo resoconto in un suo recente articolo [3].

Ma tutti i ricercatori sanno che le nuove idee di una teoria sorgono dai metodi e dalle tecniche con le quali i problemi di quella teoria si affrontano. Se queste e quelli si esauriscono, è difficile che idee nuove possano germinare. Ciò avvenne, fatalmente, nella Geometria Algebrica italiana. L'Algebra astratta e la Topologia, che all'estero andavano vigorosamente affermandosi, non trovarono validi cultori in Italia, nel periodo fra le due guerre, e poiché da esse scaturivano i nuovi potenti metodi per affrontare i grandi problemi ancora insoluti della Geometria Algebrica, il baricentro di questa si spostò dall'Italia all'estero.

Personalmente ebbi piena coscienza che questo fatto si era, inesorabilmente, verificato, molti anni dopo, nel 1970, a Nizza, al Congresso internazionale dei matematici, allorché, durante la cerimonia inaugurale, venne consegnata la medaglia Fields al giapponese Heisuke Hironaka, allievo di Oskar Zariski, per avere egli risolto il problema dello scioglimento delle singolarità di una varietà algebrica di dimensione arbitraria. Mi vennero allora malinconicamente alla mente le parole, che diverse volte avevo udito da Severi, uno dei miei Maestri nell'Ateneo romano, riferendosi a quel problema: *È un problema posto dagli Italiani e dovrà esser risolto in Italia...*

Ben diversi da quelli della Geometria furono, nel periodo fra le due guerre, gli avvenimenti che riguardarono l'Analisi Matematica in Italia.

Visto che ho testé parlato di Severi, voglio prima esaminare gli importanti contributi dati dagli Italiani, in quel periodo, nel campo delle funzioni analitiche di più variabili complesse. Si devono, infatti, a Severi i più notevoli risultati ottenuti in Italia, in quel campo, fra le due guerre.

Nella teoria delle funzioni di più variabili complesse il problema di maggiore spicco era, in quel lasso di tempo, quello che era sorto dalle celebri ricerche di E. E. Levi, pubblicate sugli Annali di Matematica nel 1910 [4] e nel 1911 [5]. E. E. Levi aveva fatto l'importante scoperta secondo cui un campo dello spazio cartesiano R^4, dove si rappresentano le due variabili complesse $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$, non è, in generale, *campo di olomorfia* per una funzione analitica di z_1 e z_2. Ciò contrariamente a quanto accade per le funzioni analitiche di una sola variabile complessa, per le quali ogni campo di R^2 è campo di olomorfia per qualcuna di esse. E. E. Levi aveva scoperto che condizione *necessaria* perché il campo Ω di R^4 fosse un campo di olomorfia era il verificarsi in ogni punto di $\partial\Omega$ di una certa condizione *analitico-geometrica*, in seguito chiamata *pseudo-convessità*. Si poneva allora il problema di vedere se la condizione di pseudo-convessità di E. E. Levi per $\partial\Omega$ fosse anche *sufficiente* perché Ω fosse un campo di olomorfia. Tale problema vide a lungo impegnati numerosi matematici, finché il giapponese K. Oka, in ricerche apparse fra il 1939 ed il 1953, riuscì a dare risposta a quel difficilissimo quesito (cfr. [6] e Bibliografia ivi citata).

Ma non fu solo questo il problema, nella teoria delle funzioni di più variabili complesse, che vide impegnati i matematici a partire dagli anni '80 del secolo scorso. Poincaré, in una sua importante Memoria del 1883 [7], aveva posto il problema consistente nel determinare le condizioni necessarie e sufficienti alle quali deve soddisfare una funzione U, definita sul contorno $\partial\Omega$ di un campo limitato Ω di R^4, perché esista una funzione 2-armonica u (cioè parte reale di una funzione di z_1 e z_2 olomorfa in Ω) che su $\partial\Omega$ coincida con U. Il problema palesò subito le sue grandi difficoltà, tanto che E. E. Levi, nel 1910, così scriveva: *Quali siano le condizioni cui devono soddisfare tali valori è un problema assai oscuro, nonostante gli sforzi di parecchi studiosi* [4].

Analoghe pessimistiche considerazioni aveva, già nel 1905, svolto Tullio Levi-Civita [8]. Tuttavia un giovane matematico italiano, Luigi Amoroso, passato poi agli studi di Economia Matematica, riusciva nel 1911 a dare una risposta, anche se non ottimale, al problema in questione [9]. Egli dimostrò che la funzione U definita su $\partial\Omega$ (supposta pseudo-convessa nel senso di E. E. Levi) è ivi la traccia di una funzione 2-armonica in Ω se e solo se U è soluzione su $\partial\Omega$ di due certe equazioni differenziali lineari del 3° ordine:

$$(1) \qquad K_1 U = 0\,, \quad K_2 U = 0\,,$$

nei parametri locali su $\partial\Omega$, e di un'equazione integro-differenziale su $\partial\Omega$. Questo importante lavoro di Amoroso è oggi completamente ignorato nella letteratura della teoria delle funzioni di più variabili complesse. La questione venne ripresa, nel 1926, da W. Wirtinger che, in una Memoria [10] dedicata a Riemann nel centenario della nascita, impiegando per la prima volta la teoria delle forme differenziali esterne in quella delle funzioni analitiche di più variabili complesse, dimostrò che, se la funzione W, definita su $\partial\Omega$, è ivi la traccia di una funzione olomorfa delle n variabili complesse $z_1, \ldots, z_n$ nel campo Ω di R^{2n}, deve essere su $\partial\Omega$

$$dW \wedge dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n = 0\,. \tag{2}$$

La (2), considerando parametri reali locali $t_1, \ldots, t_{2n-1}$ su $\partial\Omega$, è equivalente alla condizione

$$\text{rango}\ \frac{\partial(W, z_1, \ldots, z_n)}{\partial(t_1, \ldots, t_{2n-1})} = n\,. \tag{3}$$

Il Wirtinger pose il problema di dimostrare che la (2) è sufficiente perché W sia la traccia su $\partial\Omega$ di una funzione olomorfa in Ω ed inoltre di dedurre da (2) le condizioni atte a caratterizzare la traccia U su $\partial\Omega$ della parte reale (funzione n-armonica) di una funzione di $z_1, \ldots, z_n$ olomorfa in Ω.

Tale problema venne affrontato da Severi nel 1931 [11]. Egli, supponendo $n = 2$, $\partial\Omega \in C^\omega$ e $W \in C^\omega$, riuscì a darne completa soluzione. Severi dimostrò dapprima che la (3) è necessaria e sufficiente perché W sia su $\partial\Omega$ la traccia di una funzione olomorfa in Ω. Risolse, cioè, il problema di Dirichlet per il sistema di Cauchy-Riemann in Ω

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}_1} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x_1} + i\frac{\partial w}{\partial y_1}\right) = 0\,, \qquad \frac{\partial w}{\partial \bar{z}_2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x_2} + i\frac{\partial w}{\partial y_2}\right) = 0\,.$$

Successivamente, supponendo la $\partial\Omega$ pseudo-convessa, scrisse la (3) al modo seguente:

$$L_1(U, V) = 0\,, \qquad L_2(U, V) = 0\,, \tag{4}$$

dove $W = U + iV$ (U, V reali) ed L_1 ed L_2 sono operatori differenziali lineari reali del 1° ordine in U e V su $\partial\Omega$. Applicando il metodo delle parentesi di Poisson, riuscì a mostrare che sussistono le (4) se e solo se sono soddisfatte le (1), cioè le equazioni già trovate da Amoroso, che, da sole, pertanto, caratterizzano la traccia U di una funzione 2-armonica u in Ω. Dimostrò, così, che l'ulteriore condizione integro-differenziale fornita da Amoroso è superflua ed è conseguenza delle (1).

Questi importanti risultati di Severi sono, almeno fuori d'Italia, ignorati nella letteratura e non manca chi ha affermato che trattasi di risultati di non grande rilievo. È questo un ulteriore caso di confusione fra *Revisitation* e *Storia*. Per, invece, ben comprendere quale fosse il grado di difficoltà dei problemi affrontati da Severi, all'epoca in cui egli se ne occupò, basta rileggere quanto Wirtinger scriveva a proposito di essi, nella sopra citata Memoria [10]: *...Vielleicht hätte Riemann auch die Ideen zur Ueberwindung dieser Schwierigkeiten gehabt.*

Nel periodo fra le due guerre, in Italia, recarono notevoli contributi alla teoria delle funzioni di più variabili complesse Renato Caccioppoli, Beniamino Segre e, specialmente, Luigi Fantappié. Ma voglio ora solo ricordare l'importante risultato conseguito nel 1938 dall'allora giovanissimo matematico Enzo Martinelli [12] che estese, ad una funzione w di n variabili complesse olomorfa in un campo limitato Ω di C^n, il teorema della rappresentazione integrale di Cauchy, mediante la traccia di w sulla frontiera (sufficientemente regolare) di Ω.

Il teorema di Martinelli venne riscoperto nel 1943 da S. Bochner [13] ed è oggi accolto in tutti i trattati sulla teoria delle funzioni analitiche di più variabili complesse come *teorema di Martinelli-Bochner*.

A Martinelli si debbono anche teoremi di rappresentazione integrale di una funzione olomorfa in un campo Ω mediante i suoi valori su un ciclo di dimensione $n + l$ ($l = 0, \ldots, n - 1$) contenuto nella frontiera di Ω. Risultati di notevole complessità analitica e topologica ai quali, probabilmente, ancora oggi non è stato chiesto tutto quello che essi possono dare [14].

L'Analisi Matematica, fra le due guerre, ebbe in Italia uno straordinario impulso, soprattutto per l'opera di due grandi Maestri: Leonida Tonelli e Mauro Picone, e di tre Scienziati di eccezionale valore: Francesco Tricomi, Renato Caccioppoli e Luigi Fantappié. Mi limiterò unicamente ad accennare all'opera dei primi due, dato che essi, specie il secondo, furono quelli che, assieme a Francesco Severi e ad Antonio Signorini, ebbero su di me maggiore influenza.

Leonida Tonelli è, a buon diritto, considerato l'iniziatore dell'era moderna del Calcolo delle Variazioni. Egli, infatti, studiò i problemi variazionali usando il *metodo diretto*, che consiste nella dimostrazione dell'esistenza del minimo o del massimo di un funzionale con procedimento diretto, senza passare attraverso l'equazione di Eulero del funzionale ed, anzi, fornendo per tale via un teorema di esistenza di una soluzione di essa, sia pure intesa in un senso generalizzato. L'idea del metodo diretto non era nuova. Essa risale a Riemann che, erroneamente, aveva ritenuto di dimostrare, per tal via, l'esistenza della soluzione del problema di Dirichlet per le funzioni armoniche. Sono ben note le critiche mosse da Weierstrass al procedimento di Riemann, le successive obiezioni di Hadamard e di altri, gli sforzi apprezzabili, ma infruttuosi, di Cesare Arzelà per conseguire il risultato enunciato da Riemann ed, infine, la prima rigorosa dimostrazione dovuta a David Hilbert, nel 1900, dell'esistenza del minimo dell'integrale di Dirichlet, relativo ad u campo limitato Ω di R^2, nella classe delle funzioni che assumono su $\partial\Omega$ valori prescritti. Alla ricerca di Hilbert seguirono quelle di Lebesgue, di Fubini e di Beppo Levi, rivolte a dimostrare l'esistenza del minimo per integrali più generali di quello di Dirichlet, aventi come euleriana un'equazione lineare di tipo ellittico (cfr. [17] per la Bibliografia).

Tonelli iniziò, a partire dal 1911, uno studio degli integrali del tutto generali del Calcolo delle Variazioni, sia in forma parametrica che in forma ordinaria, dipendenti da funzioni di una variabile reale. Il suo scopo era quello di fornire per siffatti funzionali un teorema generale, analogo a quello di Weierstrass per le funzioni continue di n variabili reali, che assicura l'esistenza del minimo e del massimo in un compatto di R^n. La convergenza impiegata da Tonelli era quella uniforme delle funzioni da cui dipendeva l'integrale. Purtroppo, gli integrali del Calcolo delle Variazioni continui rispetto a questa convergenza sono una classe assai ristretta; per esempio, perché il classico integrale

$$(5) \qquad \int_A f(x, u, u')\,dx$$

(A = intervallo limitato dell'asse x) sia continuo nella convergenza anzidetta, la f (in opportune ipotesi di regolarità) deve essere funzione lineare di u' [15, p. 349]. Tuttavia, R. Baire aveva osservato che, per l'esistenza del minimo (del massimo) di una funzione di n variabili reali in un compatto K di R^n, basta che la f sia, soltanto, semicontinua inferiormente (superiormente) in K. Tonelli si dedicò, allora, alla ricerca delle condizioni che assicurano la semicontinuità inferiore degli integrali del Calcolo delle Variazioni, quali ad esempio (5), nonché di quelle che forniscono l'esistenza del minimo. Tali condizioni, a parte ulteriori proprietà qualitative, sono, per quanto riguarda l'integrale (5), le seguenti [15, p. 192]:

1) $f(x, u, u')$ è convessa rispetto ad u';

2) $$\lim_{|u'| \to +\infty} \left| \frac{f(x, u, u')}{u'} \right| = +\infty;$$

3) la classe di funzioni $\mathcal{K}$ in cui si ricerca il minimo è *completa*, con ovvio significato da dare a questo aggettivo.

La condizione 2) è verificata se riesce

$$(6) \qquad f(x, u, u') \geqslant c_0 |u'|^{1+\alpha}, \qquad c_0 > 0, \quad \alpha > 0.$$

Segue allora che, se $\{u_n\}$ è una successione minimizzante, si ha

$$(7) \qquad \int_A |u'|^{1+\alpha} dx < L,$$

con L indipendente da n, ciò che, in genere, insieme a qualche condizione che assicura la equilimitatezza di $\{|u_n|\}$ in A, dà luogo, per la completezza di $\mathcal{K}$, all'esistenza del minimo. Ad analoga conclusione si perviene nella più generale ipotesi 2).

Tonelli cercò di estendere questi risultati agli integrali multipli [15, p. 108], ma, purtroppo, il suo approccio si dimostrò sostanzialmente inefficace. Infatti, se si interpreta A come un campo limitato del piano x_1, x_2; u come funzione del punto $x \equiv (x_1, x_2)$; u' come il vettore (u_{x_1}, u_{x_2}); $dx = dx_1 dx_2$ e (5) come un integrale doppio, seguitano a sussistere i risultati fondati su 1), 2), 3), ma essi si rivelano insufficienti a risolvere i problemi più classici e più semplici del Calcolo delle Variazioni per gli integrali doppi. Ad esempio, se si considera l'integrale di Dirichlet

$$\int_A |u'|^2 dx = \int_A (u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2)\, dx,$$

è soddisfatta la (6) con $c_0 = 1$, $\alpha = 1$, ma la (7) (con $\alpha = 1$) non basta ad assicurare la *compattezza* rispetto alla convergenza uniforme, impiegata da Tonelli, di una successione minimizzante, anche se $\{|u_n|\}$ riesce equilimitata in A.

Tale difficoltà per gli integrali multipli venne, al principio degli anni '40, superata da C. B. Morrey [16], [17], il quale ricostruì la teoria di Tonelli, abbandonando però la convergenza uniforme e sostituendola con la *convergenza debole in uno spazio di Sobolev*. L'analisi esistenziale per gli integrali multipli del Calcolo delle Variazioni poté così riprendere il suo cammino, ma ben presto l'interesse si spostò dai problemi di esistenza del minimo a quello relativo alle proprietà di regolarità delle funzioni minimizzanti o, in generale, delle estremali (soluzioni dell'equazione di Eulero relativa al funzionale), fino a culminare, nel 1957, nel grande risultato di Ennio De Giorgi [18], il quale, dando risposta ad un problema posto da Hilbert nel 1900, dimostrò che l'integrale (5), considerato in R^n, ha analitiche le sue estremali se $f(x, u, u')$, oltre a soddisfare le ipotesi tipiche per gli integrali multipli regolari del Calcolo delle Variazioni, è funzione analitica di tutti i suoi argomenti.

Mauro Picone, artigliere durante il conflitto del '15-'18, aveva avuto affidato, dal Comando dell'artiglieria italiana, il compito di correggere le vecchie tavole di tiro, che non prevedevano l'impiego dei grossi calibri nei grandi dislivelli alpini. Egli assolse egregiamente questa incombenza, tanto che la sua opera, determinante per il successo dell'artiglieria italiana in quel conflitto, è ricordata in una lapide, apposta nel 1978 nella Scuola d'Artiglieria a Torino, nel giorno del primo anniversario della sua morte.

Ma l'esperienza bellica ebbe anche un decisivo impatto nella mentalità matematica di Picone, portandolo ad attribuire un nuovo e più profondo significato alla frase: *risolvere un problema relativo alle equazioni differenziali*. Con ciò egli intendeva, non solo il conseguimento del teorema di esistenza e di unicità, ma l'istituzione di rigorosi metodi per il calcolo numerico della soluzione incognita. E d'altra parte questo punto di vista si andava, indipendentemente, affermando anche all'estero con l'opera di diversi eminenti analisti. Ma fu Picone il primo a concepire l'idea di un «Istituto per le Applicazioni del Calcolo» che fosse un laboratorio, dove a stretto contatto con le Scienze applicate, i suoi punti di vista potessero trovare attuazione mediante lo studio dei grandi problemi, posti dalla Fisica e dalla Tecnica.

Le sue idee, profondamente innovatrici, incontrarono scarso successo, se non addirittura ostilità, presso quasi tutti i matematici italiani del suo tempo. Ma Picone, con incredibile perseveranza, portò avanti il suo programma, riuscendo a fondare, nel 1927, presso la sua Cattedra di Analisi nell'Università di Napoli, il tanto vagheggiato Istituto per le Applicazioni del Calcolo, il primo sorto nel mondo. Il finanziamento non era, tuttavia, statale, ma fornito da una Banca. Passato Picone a Roma nel 1932, quell'Istituto seguì Picone in questa città e, viste le eccellenti prove che, sotto la sua illuminata guida, aveva già dato, divenne un Istituto del Consiglio Nazionale delle Ricerche, con il nome di *Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo*, assurgendo in breve tempo ad uno dei primissimi posti, in campo mondiale, fra gli Istituti di Matematica applicata.

A poco a poco, l'ostilità verso le nuove idee di Picone si attenuò ed egli e la sua Scuola, alla quale mi onoro di appartenere, dettero inizio, nel volger degli anni, all'Analisi Numerica come disciplina a sé stante, non più ancella dell'Analisi Matematica.

Già nel 1939 le riserve sulle nuove idee di Picone erano in gran parte cadute ed egli fu, in quell'anno, insignito del massimo riconoscimento di allora per uno Scienziato italiano: il Premio Reale, conferitogli dall'Accademia dei Lincei.

Voglio qui riportare le parole che Francesco Severi, che era stato, all'inizio, uno dei maggiori oppositori delle idee di Picone, pronunciò in occasione del giubileo scientifico di questi (15.I.1956): *...il programma che Picone si propose fin da principio, immaginando questo Istituto, è stato magistralmente svolto. Debbo di ciò dare atto al nostro amico e collega, ripetendo pubblicamente un atto di contrizione che più volte ho fatto privatamente con lui...*

Ma il maggiore riconoscimento che l'opera di Picone ebbe, fu quello che egli ottenne, in campo internazionale, nel 1951, allorché l'Italia venne prescelta quale sede per un Centro Internazionale di Calcolo, progettato dall'Unesco. Erano allora in lizza, per esser designate in questa scelta, l'Italia, l'Olanda e la Svizzera, sedi dei tre maggiori Centri di Calcolo allora esistenti in Europa. L'Unesco dette incarico a J. von Neumann di decidere quale delle tre sedi fosse la più idonea. Questi, a sua volta, incaricò H. H. Goldstine, suo valoroso collaboratore nel campo dell'Analisi Numerica, di formulare una proposta per la scelta finale. Goldstine fece invitare, per l'estate del 1951, i tre direttori dei predetti Centri, Mauro Picone, Jan Van der Corput, Eduard Stiefel, presso l'Istituto di Analisi Numerica dell'Università di California, in Los Angeles, onde potessero, in una serie di seminari, esporre i risultati acquisiti ed i programmi di ricerca dei rispettivi Istituti.

Picone, a causa dell'età già avanzata, della difficoltà di parlare e comprendere l'inglese, accresciuta dalla sua limitazione di udito, ritenne di non poter accettare personalmente l'invito e designò me per sostituirlo. Fu un vero fulmine a ciel sereno! Lusingatissimo, da un canto, dell'incarico affidatomi dal Maestro, vedevo con terrore le enormi difficoltà di dovermi, allora appena ventinovenne e da soli due anni giunto alla Cattedra universitaria, cimentare con Scienziati già affermati del calibro di Van der Corput e di Stiefel. Picone, nella sua lungimiranza, mi aveva fatto, fin dall'anno precedente, redigere un'ampia Memoria [19], nella quale riassumevo le teorie ed i risultati ottenuti presso l'Istituto di Calcolo italiano fin dalla sua fondazione. Un impegno che mi costò non lieve fatica. Quella Memoria fu la base per i miei seminari a Los Angeles. Non dimenticherò mai il tremendo stress al quale fui sottoposto in quei tre mesi estivi della mia permanenza in quella città. Van der Corput e Stiefel, poi diventati miei ottimi amici, erano insigni matematici, il primo specialista di teoria dei numeri e di teorie asintotiche, il secondo di topologia. Ma erano analisti numerici di troppo fresca data per poter competere con il grande flusso di pensiero che, in questo campo, Picone e la sua Scuola portavano avanti da almeno trent'anni. Alla fine di quel trimestre, nell'ottobre 1951, Goldstine presentava all'Unesco un rapporto che proponeva l'Italia come sede del Centro Internazionale di Calcolo e che diceva, fra l'altro: *I fisici ed i matematici italiani sono certamente fra i migliori del mondo; l'attività del Centro internazionale sarà grandemente stimolata dalla loro vicinanza. Il nuovo Centro beneficerà grandemente della lunga esperienza dell'Istituto italiano di Calcolo, il quale è un rimarchevole laboratorio di matematica applicata che, dalla sua creazione, datante da un quarto di secolo, funziona sotto la direzione del Prof. M. Picone... Esaminando le diverse pubblicazioni di questo Centro, si resta sorpresi per la vastità di indirizzi che la direzione accorda alle ricerche matematiche e si rimane impressionati dall'ampiezza dei calcoli eseguiti e dalla elevatezza dell'analisi matematica che essi hanno comportato*.

L'Italia, in seguito al rapporto di Goldstine, venne scelta dall'Unesco come sede per il nuovo Centro di Calcolo. Fu un autentico successo per la Matematica italiana e per Picone in particolare. Purtroppo, quel Centro, che ebbe sede in Roma, non si sviluppò mai, per ragioni che nulla avevano a che vedere con l'autentica Scienza. Furono così vanificati gli sforzi di chi tanto si era adoperato per la sua creazione in Italia e deluse le speranze, che in esso erano state riposte, per un'ulteriore crescita scientifica del nostro Paese.

Ma di ciò non è il caso di parlare oggi. Torniamo, invece, all'opera scientifica di Picone.

È impossibile riassumere, ora, i molteplici metodi che egli propose per la soluzione numerica dei problemi relativi alle equazioni differenziali, specie quelle connesse alle applicazioni. Mi limiterò a considerare solo qualcuno dei procedimenti proposti da Picone, scelto fra quelli più espressivi e che permette un facile raffronto con altri metodi teorici o numerici, proposti da altri Autori. Naturalmente mi limiterò ad esaminare un problema particolare. A tal fine si consideri, nel campo limitato Ω di R^2 con frontiera $\partial\Omega$ abbastanza regolare, il problema di Dirichlet per l'equazione a coefficienti reali.

$$(8)\qquad \begin{cases} E(u) \equiv -\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left[a_{ij}(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_j}\right] + c(x)u = f(x), & \text{in } \Omega, \\ u = g(x), & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$

Con $a_{ij}(x) \equiv a_{ji}(x)$ e $a_{ij}(x)\lambda_i\lambda_j > 0$ per ogni $x \in \overline{\Omega}$, $\lambda \equiv (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in R^n$; $c(x) \geq 0$; $a_{ij}(x)$ e $c(x)$, $f(x)$ e $g(x)$ sono funzioni sufficientemente regolari.

Si ponga

$$B(u, v) = \int_\Omega\!\!\int \left[a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j} + cuv\right] dx.$$

Al problema (8), se è $g(x) \equiv 0$, può associarsi il seguente sistema di infinite equazioni integrali

$$B(u, v) = \int_{\Omega} fv\, dx, \tag{9}$$

cui necessariamente deve soddisfare l'incognita u; v è un'arbitraria funzione, abbastanza regolare, nulla su $\partial\Omega$. Se invece $f(x) \equiv 0$, ad (8) si associa il seguente sistema di infinite equazioni integrali

$$B(u, w) = \int_{\partial\Omega} gL(w)\, d\sigma, \tag{10}$$

ove w è un'arbitraria soluzione dell'equazione $E(w) = 0$ ed è $L(w) = a_{ij}\nu_i(\partial w / \partial x_j)$ (ν = versore normale esterno a $\partial\Omega$).

Se $\{v_k\}$ e $\{w_k\}$ sono due sistemi che godono di opportune proprietà di completezza, (9) e (10) danno luogo ai seguenti sistemi di equazioni integrali di Fischer-Riesz

$$B(u_0, v_k) = \int_{\Omega} fv_k\, dx, \quad B(u_1, w_k) = \int_{\Omega} gw_k\, dx,$$

ai quali Picone richiedeva il calcolo delle soluzioni u_0 ed u_1 del problema (8), rispettivamente nei casi $f \equiv 0$ e $g \equiv 0$. Altro sistema di equazioni integrali, connesso al problema (8), è il seguente

$$\int_{\Omega} uE(v)\, dx + \int_{\partial\Omega} vL(u)\, d\sigma = \int_{\Omega} fv\, dx + \int_{\partial\Omega} gL(v)\, d\sigma \tag{11}$$

dove, ora, v è una funzione arbitraria sufficientemente regolare. Anche (11) dà luogo ad un sistema di Fischer-Riesz, cui Picone richiedeva il calcolo numerico di u in Ω e di $L(u)$ su $\partial\Omega$. Si era negli anni '30 quando Picone proponeva questi metodi di calcolo [20]. Le sue idee si intrecciavano con quelle che Sobolev in Russia e Friedrichs in Germania, spinti da filosofie diverse da quelle di Picone, portavano avanti in quegli anni. Questi Autori impiegavano le (9) per definire una *soluzione debole* del problema (8) ($g = 0$), del quale non ricercavano il calcolo della soluzione, ma, piuttosto, la dimostrazione di un teorema di esistenza e unicità. La (11), considerata per funzioni v con supporto in Ω, veniva impiegata da Caccioppoli [21] e, contemporaneamente, da Sobolev [22] per definire una soluzione generalizzata dell'equazione $Eu = f$(*). Essi, stabilendo il prototipo dei *teoremi di regolarizzazione*, provavano che una soluzione generalizzata è una soluzione in senso classico. Tale risultato, riscoperto nel 1940 da Weyl [23] (per $E = \Delta_2$), è oggi noto come *Lemma di Weyl*. Il Weyl dimostrava inoltre che la u, soluzione delle equazioni (9) e nulla su $\partial\Omega$, è la proiezione ortogonale di una qualsiasi

(*) In effetti, Caccioppoli assumeva $E = \Delta_2$ e Sobolev $E = \Delta_2^m$.

funzione U, tale che $E(U) = f$, sulla varietà V delle funzioni nulle su $\partial\Omega$, nello spazio di Hilbert H munito del prodotto scalare $B(u,v)$ [23]. Il *complemento ortogonale* W di V in tale spazio è quello di tutte le soluzioni dell'equazione $E(w) = 0$. Pertanto la (10) definisce la proiezione ortogonale su W di una qualsiasi funzione di H che su $\partial\Omega$ coincide con g. Fra gli anni '40 e gli anni '50, i due metodi fondati su (9) e su (10) e le loro estensioni, segnarono gli indirizzi attraverso i quali si sviluppò la teoria dei problemi al contorno per le equazioni di tipo ellittico. Friedrichs, Sobolev e, successivamente, Gärding, con le rispettive Scuole, seguirono la via indicata dalle (9). Picone, Bergman, Schiffer ed i loro collaboratori quella che derivava dalle (10). Per quanto riguarda le (11), fu molto notevole, a metà degli anni '40, una serie di risultati di Luigi Amerio che, dimostrando l'equivalenza delle equazioni (11) con il problema (7), in un contesto più generale di quello da me ora considerato, pervenne a dimostrare i primi generali teoremi di *regolarizzazione anche sul contorno* per le soluzioni generalizzate delle equazioni differenziali ellittiche [24], [25], [26].

La grande tradizione italiana nel campo della Teoria Matematica dell'Elasticità ebbe in Antonio Signorini un suo insigne continuatore. Non parlerò qui, ora, del contributo che egli diede, fra i primissimi, al sorgere ed all'affermarsi della Teoria non lineare dell'Elasticità, ma desidero ricordare un importante capitolo della Fisica Matematica e dell'Analisi da lui originato con la proposta di un fondamentale problema, di tipo del tutto nuovo, oggi noto come *problema di Signorini*: l'equilibrio di un solido elastico appoggiato ad una superficie rigida. È questo il validissimo prototipo dei problemi fisici e meccanici, relativi a condizioni di *vincolo unilaterale*. Il problema al contorno non lineare ad esso connesso è del tutto eterodosso rispetto ai problemi classici (vincoli bilaterali), dato che non è possibile precisare *a priori* le parti del contorno dove vale un tipo di condizioni: appoggio del solido sulla superficie, o il tipo alternativo: distacco del solido dalla superficie. Signorini lo chiamò: *problema con ambigue condizioni al contorno*. La prima formulazione, da parte di Signorini, di questo tipo di problemi risale al 1933 [27]. Quella definitiva al 1959, in un magistrale corso di lezioni da lui tenuto presso l'Istituto di Alta Matematica [28].

Spero di essere riuscito a tracciare un quadro sufficientemente ampio e completo di quegli aspetti della Matematica italiana che maggiormente ispirarono i contributi scientifici da me dati, durante mezzo secolo di attività di ricerca.

Ancorché molti argomenti siano strettamente connessi gli uni agli altri, una divisione fra i varî capitoli della mia attività di ricerca può essere così presentata:

1) *Teoria Matematica dell'Elasticità*.

Il mio interesse in questo campo risale alla fine degli anni '40, allorché, estendendo i metodi di Picone, specie quelli fondati su equazioni quali (9) e (10), attaccai i problemi classici della Statica Elastica, riuscendo a dare per la prima volta il teorema di esistenza per il cosiddetto *problema misto* [29], [30].

In epoca molto posteriore fui severamente impegnato nelle ricerche connesse al *problema di Signorini*, al quale ho prima accennato. Per esso riuscii a dimostrare nel 1963 [31], [32] i teoremi di esistenza e di unicità, dando inizio alla teoria delle cosiddette *diseguaglianze variazionali* ([33 p. 307], [34 p. 282], [35 p. 115]). Di essa si sono, successivamente, occupati numerosissimi studiosi ed è solo da rammaricare che alcuni fra loro non siano stati, in questa teoria, storici tanto accurati quanto hanno dimostrato di essere ricercatori valenti.

Altri argomenti della Teoria dell'Elasticità, che hanno costituito per me attraenti campi di ricerca, sono stati la teoria della propagazione delle onde in un mezzo elastico [36], la dimostrazione di un teorema di massimo modulo [37], il problema di Saint-Venant [38], [39], i problemi di sforzi piani [40], nell'ambito dei quali sono lieto di avere ispirato importanti lavori alla mia allieva Caterina Cassisa [41] ed all'illustre collega ed amico carissimo Walter Hayman [42].

Recentemente mi sono occupato dei materiali elastici con memoria, stimolato a considerare questo argomento dal compianto e diletto amico Dario Graffi. Ho avuto soprattutto l'intento di dare forma matematica accettabile al cosiddetto fenomeno della «Fading Memory» [43], [44], [45], [46]. I punti di vista, da me portati avanti in queste ricerche, hanno originato una «Tavola rotonda», organizzata da Giuseppe Grioli, presso l'Accademia dei Lincei, nel 1986. Ad essa parteciparono diversi fra i maggiori Fisici matematici italiani [47].

2) *Equazioni alle derivate parziali e Teoria dell'Approssimazione.*

Questi studî, in gran parte connessi con quelli di Teoria dell'Elasticità, mi hanno portato ad essere fra i primissimi a sistematicamente impiegare l'Analisi Funzionale, non solo nell'indagine esistenziale dei problemi al contorno per equazioni alle derivate parziali, ma anche nei problemi di calcolo delle soluzioni o, più in generale, di approssimazione delle funzioni [48], [49], [50], [51], [52], [53]. Desidero ricordare i miei lavori, credo i primi sull'argomento, sul *metodo di dualità* nella teoria dei problemi al contorno [54], [55 p. 751], [56 p. 219] e le mie ricerche sulle equazioni lineari ellittico-paraboliche del 2° ordine [57], [58], [59], [60], [61 p. 199], che dettero luogo alla, per me preziosa, collaborazione con la Prof. Olga Oleinik della Università di Mosca [62]. Una collaborazione iniziata da oltre trent'anni e che è continuata nel tempo, malgrado le difficoltà, esistenti fra noi, di comunicazione e di incontro per le contrastanti politiche presenti, fino ad un recente passato, nei nostri rispettivi Paesi.

Uno degli strumenti essenziali, oltre all'Analisi Funzionale, da me impiegati nella teoria delle equazioni alle derivate parziali e, specialmente, nei problemi di approssimazione, è stata la Teoria del Potenziale, considerata nell'ambito dell'integrazione secondo Lebesgue e della teoria della misura [63], [29]. Spesso mi sono trovato nella situazione di dovere estendere, in questo più ampio contesto, diversi dei classici risultati di quella teoria [64 p. 113].

3) *Calcolo degli autovalori*.

È questo un problema che mi ha appassionato fin dai tempi nei quali lavoravo nell'Istituto di Calcolo di Picone. A contatto quotidiano con tecnici ed ingegneri, mi ero reso conto dell'interesse centrale che questo problema riveste per le applicazioni. Ed era vivo il mio cruccio nel constatare che, mentre il classico metodo di Rayleigh-Ritz riusciva a dare, nei problemi più classici e più importanti, un'approssimazione *per eccesso*, ben poco si sapeva per quanto concerneva quella *per difetto*.

Allo studio di questo problema mi sono sistematicamente dedicato a partire dal 1964. L'idea direttrice, nell'affrontare il problema del calcolo degli autovalori, era quella che mi veniva da quanto, ragazzo, avevo ascoltato da uno dei miei Maestri, Francesco Severi: «*Quando studiate un problema, se volete rapidamente orientarvi, la prima cosa che dovete fare è determinare il gruppo più ampio di trasformazioni rispetto al quale il problema è invariante*».

Con questo in mente e dopo aver limitato la classe di operatori da studiare a quella costituita da operatori dotati di un inverso compatto e positivo, classe certamente particolare, ma che contiene quasi tutti i problemi di autovalori che si incontrano nella Fisica Matematica classica e nella Scienza delle Costruzioni, potei stabilire che il gruppo, di cui parlava Severi, era il gruppo unitario in uno spazio di Hilbert. Considerai allora gli autovalori, del generico operatore da me studiato, come un *sistema completo di invarianti* dell'operatore stesso rispetto al gruppo unitario, cioè un sistema completo di *invarianti ortogonali*, e mi chiesi se non fosse possibile determinare un diverso sistema di invarianti ortogonali, *esplicitamente calcolabili*, dal quale poi dedurre il calcolo del primo sistema di invarianti, cioè degli autovalori. Potei in ricerche, durate diversi anni, portare a termine questo programma [65], [66]. I risultati da me ottenuti non sono rimasti ignorati nella letteratura internazionale [67 p. 357], [68 p. 322], [69 p. 118], [70 p. 115]. I metodi sviluppati condussero ad ottenere teoremi di struttura per gli *operatori di Green* relativi agli operatori differenziali considerati ed a, sostanzialmente, porre su nuove basi la teoria dei sistemi di equazioni lineari alle derivate parziali di tipo ellittico. Ritengo questi punti di vista ancora suscettibili di assai ampi ed interessanti sviluppi.

Connesso al calcolo degli autovalori è quello, ancora più difficile, consistente nel calcolo delle rispettive molteplicità geometriche. Lo studio di questo problema ha richiesto un'analisi ancora più raffinata. Il più ampio *gruppo d'invarianza* è, in questo caso, quello che io ho chiamato delle *roto-omotetie* di uno spazio di Hilbert. Una roto-omotetia è il prodotto di una trasformazione unitaria per una omotetia. Ottenuto un sistema di *invarianti roto-omotetici* (esplicitamente calcolabili), ho potuto dare metodi di calcolo per le sopra menzionate molteplicità [71]. L'applicazione più interessante è stata quella relativa al calcolo dei numeri di Betti di una varietà riemanniana, quando come «dati» si assumono un *atlante* della varietà ed i relativi *omeomorfismi di passaggio* [72], [73]. Ciò è possibile in virtù del classico teorema di Hodge, che permette di considerare i numeri di Betti come molteplicità geometriche dell'autovalore nullo degli operatori di Laplace-Beltrami, relativi alle forme esterne.

Di grande interesse sono state per me le applicazioni numeriche dei metodi, cui ho accennato, al calcolo degli autovalori di problemi concreti, nei quali quei metodi hanno dimostrato tutta la loro potenza. Mi è gradito ricordare i risultati ottenuti in collaborazione con Maria A. Sneider [74], [75] e con altri [76]. Voglio anche ricordare quelli teorici ottenuti da un'altra mia valorosa allieva, Lucilla Bassotti [71], relativi alla decomposizione ottimale di un problema di autovalori in problemi relativi a sottospazi invarianti, allorché il problema iniziale ha un gruppo di simmetrie. Questi risultati della Bassotti hanno importanti risvolti applicativi, dato che essi consentono, in molti problemi di calcolo, l'uso ottimale di un computer.

4) *Calcolo delle variazioni.*

Allorché, fra il 1959 ed il 1963, studiavo il problema di Signorini, mi resi conto che per l'indagine di esso bisognava estendere in una ben determinata direzione i teoremi di semicontinuità per gli integrali multipli del calcolo delle variazioni di Tonelli e di C. B. Morrey. Questa estensione venne conseguita in [32], [78], [79]. I risultati da me ottenuti furono poi ripresi da diversi Autori [80], [81], [82]. Sarebbe interessante confrontare i miei teoremi con quelli successivamente ottenuti da J. Ball [83].

5) *Analisi complessa e forme differenziali esterne.*

Questo campo della Matematica ha sempre esercitato su di me grande attrattiva. Nell'Anno Accademico 1956-57 seguivo, all'Istituto di Alta Matematica a Roma, il corso che Francesco Severi dedicava alle funzioni analitiche di più variabili complesse: l'ultimo che egli tenne! Ancorché Severi fosse già avanti negli anni ed, ormai, di malferma salute, quel corso aveva tutti i caratteri della genialità che caratterizzò la figura scientifica di quel grande matematico. Fra i problemi che egli pose, vi fu quello di estendere il suo antico risultato, caratterizzante la traccia W sulla frontiera di un campo Ω di una funzione analitica w di n variabili complesse, abbandonando le ipotesi di analiticità da lui assunte per W e per $\partial\Omega$. Mi occupai subito di questo problema e riuscii a risolverlo dopo alcuni mesi di ricerche. Esposi, con grande soddisfazione di Severi, i miei risultati in un seminario che egli mi invitò a tenere nell'ambito del suo corso. Avevo dimostrato che, anche nelle ipotesi assai generali da me assunte, la traccia W su $\partial\Omega$ di una funzione $w(z_1, \dots, z_n)$ olomorfa in Ω è caratterizzata dalla (2). Ma non assumendo su W alcuna ipotesi di differenziabilità, dovetti scrivere la (2) in *forma debole*, ciò che rese piuttosto delicata la dimostrazione del teorema [84]. Occorre dire che, fuori d'Italia, questo risultato e quello precedente di Severi vengono, per un malinteso, attribuiti a S. Bochner, che mai si è occupato di tale problema [85].

Molti altri argomenti della teoria delle funzioni di più variabili complesse hanno attratto la mia attenzione [86], [87], [88], [89], [90], [91], [92], [93], [94]. Di essi non posso qui ora parlare. Debbo però dire che le mie ricerche in questo campo hanno avuto scarsa notorietà nella letteratura internazionale. Ritengo che il motivo di ciò risieda nel fatto che i metodi da me impiegati, basati sugli strumenti classici dell'Analisi, quale, ad esempio, la Teoria del Potenziale, sono assai lontani da quelli che, ormai da diverso tempo, sono impiegati nella Teoria delle funzioni analitiche di più variabili complesse. Anche se, abbastanza recentemente, qualche Autore ha affermato che, in quella teoria, i metodi della «hard analysis» dovrebbero tornare ad avere il sopravvento su quelli di carattere algebrico-topologico [95 p. V].

Per studiare i problemi connessi con le funzioni analitiche di più variabili complesse ho, ovviamente, impiegato anche la Teoria delle forme differenziali esterne. È questa una teoria per la quale, a differenza di tanti miei Colleghi analisti, ho sempre avuto una straordinaria predilezione. Non ne conoscevo l'esistenza fino al 1945.

Nel 1944 ero nel carcere di Teramo, dove i nazi-fascisti mi avevano rinchiuso perché, dopo lo sbandamento dell'esercito italiano (cui appartenevo come allievo-ufficiale), seguito all'armistizio dell'8 settembre 1943, avevo disatteso il bando di richiamo alle armi promulgato da Mussolini dopo la fondazione della repubblica di Salò. Avevo invece tentato, nell'inverno del '44, di attraversare la linea del fronte in Abruzzo (oh la meravigliosa incoscienza dei venti anni!) per raggiungere gli Alleati nel meridione d'Italia. Catturato dai Tedeschi, ero stato condannato a morte, da un tribunale militare nazi-fascista, per «diserzione in tempo di guerra» e tradotto in quel carcere in attesa di esecuzione della sentenza. Vi rimasi dal marzo ai primi di giugno del 1944, fino a quando gli Alleati ruppero il fronte, costringendo i Tedeschi ad una precipitosa ritirata. Mi trascinarono con loro verso il nord. Qualche mese dopo, a Verona, riuscii ad evadere, alla vigilia di essere trasferito in Germania. Orbene, negli allucinanti giorni vissuti a Teramo in una cella, per non cedere a disperati pensieri, mi concentravo su questioni di Matematica. Prima della mia partenza per andare sotto le armi (1.II.1943), avevo avuto occasione di leggere la famosa Memoria di Enrico Betti, dove, per la prima volta, vengono definiti quei numeri (i numeri di Betti!) che indicano gli ordini di connessione topologica, delle varie dimensioni, di un complesso n-dimensionale. Null'altro sapevo di Topologia combinatoria e delle tematiche connesse. Cercavo allora di determinare a quali problemi di integrazione di sistemi differenziali alle derivate parziali quei numeri potessero essere collegati, in analogia a quanto avviene nella dimensione 1 (connessione lineare). Mi ero così ricostruita, per mio conto, una molto rudimentale teoria delle forme differenziali esterne, che appuntavo su un quadernetto, avuto in dono dal Cappellano del carcere.

Rientrato a Roma nel 1945 ed esposta la mia teoria ad Enzo Martinelli, questi, dopo avermi ascoltato con molto affetto e benevolenza, mi informò, con delicatezza, che le cose cui io avevo pensato erano ben note e mi consigliò di leggere la celebre Monografia di Elia Cartan, aggiungendo, inoltre, che i problemi che io avevo tentato di elaborare erano già stati posti dallo stesso Cartan ed esaurientemente studiati da Georges de Rham. Non mi dolsi di ciò, anzi, ne fui lieto: le mie idee erano giuste e, dopotutto, la Matematica mi aveva aiutato a superare tre mesi fra i più difficili della mia vita!

Questi ricordi possono spiegare perché per quella teoria io senta un affetto particolare e fra le mie ricerche io abbia particolare predilezione per quelle, portate avanti molti anni dopo e rimaste purtroppo quasi ignorate, nelle quali, usando i princìpi di dualità dell'Analisi funzionale, riesco a determinare le formule di «maggiorazione a priori», relative alle forme esterne, alle quali sono equivalenti i teoremi di esistenza di de Rham e di Hodge [96], [97].

Non ho mancato di consigliare ai miei allievi lo studio della Teoria delle forme differenziali esterne e diversi di loro ne hanno fatto buon uso. Voglio qui ricordare le importanti ricerche di Maria Pia Colautti [98] e di Luciano De Vito [99], [100], nelle quali quella teoria ha un ruolo essenziale.

Connesso alla Teoria delle funzioni di una variabile complessa, nell'indirizzo dei grandi matematici georgiani N. I. Muskhelishvili e I. N. Vekua, è un mio lavoro, relativo alle equazioni lineari ellittiche di ordine superiore nel piano, nel quale estendo ad equazioni di ordine $2n$ il concetto di *potenziale di semplice strato* [101]. Questo lavoro ha avuto un inatteso successo, dato che oggi viene considerato il punto di partenza per le ricerche di Analisi Numerica fondate sui cosiddetti *boundary integral methods* [102], [103]. I miei studi in questo campo sono stati proseguiti dal mio allievo Paolo Emilio Ricci [104]. Altre estensioni, ad ampio raggio, sta cercando di ottenere un altro mio giovane allievo, Alberto Cialdea, che si propone, non solo l'estensione dei miei metodi agli spazi R^n, ma la costruzione di una teoria, su arbitrarie varietà differenziabili, di equazioni relative ad operatori pseudo-differenziali, nelle quali le incognite ed i termini noti siano forme differenziali esterne di gradi non necessariamente coincidenti. È un programma assai suggestivo, specie se esso riuscirà a comprendere varietà anche non compatte. Gli interessanti risultati, già ottenuti da Cialdea [105], [106] [107], [108], lasciano ben sperare per un suo esauriente espletamento.

Tralascio di parlare di diverse mie altre ricerche relative alla Teoria della Misura e dell'Integrale, all'Analisi Numerica, alla Storia della Matematica. Voglio solo aggiungere che la mia attività di ricerca è stata sempre intimamente connessa a quella di docente, la quale ultima, ritengo di poter affermare, è andata ben oltre le lezioni ufficiali tenute in un'aula.

Tutto ciò dura da oltre cinquant'anni. Un periodo che, malgrado tante avverse vicissitudini, è stato per me straordinariamente bello, ma che ora mi appare brevissimo, così vivi e presenti sono nel mio spirito e nel mio ricordo gli avvenimenti vissuti, le persone incontrate, le ansie e le gioie, che solo la ricerca scientifica e la guida dei giovani allievi possono dare.

Ed ora che, per l'età raggiunta, una parte importante della mia attività si è conclusa per sempre, quella del mio insegnamento ufficiale, quasi con stupore mi vien fatto di pensare

...ed è subito sera.

BIBLIOGRAFIA

[1] J. Dieudonné, *History of Functional Analysis*, North-Holland, Mathem. Studies, 49 (1981).

[2] G. Fubini - E. Čech, *Introduction à la géometrie projective différentielle des surfaces*, Gauthier-Villars, Paris (1931).

[3] B. L. Van der Waerden., *Francesco Severi and the Foundation of Algebraic Geometry*, Symposia Mathematica, XXVII, I.N.d'A.M., Academic Press, London & New York (1986).

[4] E. E. Levi, *Studî sui punti singolari essenziali delle funzioni analitiche di due o più variabili complesse*, Ann. Mat., 17 (1910), 61-68.

[5] E. E. Levi, *Sulle ipersuperficie dello spazio a 4 dimensioni che possono essere frontiera del campo di esistenza di una funzione analitica di due variabili complesse*, Ann. Mat., 18 (1911), 69-80.

[6] L. Hörmander, *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables*, Van Nostrand Co. Inc., Princeton-Toronto-London (1966).

[7] H. Poincaré, *Sur les fonctions de deux variables*, Acta Mathem., 2 (1883), 97-113.

[8] T. Levi Civita, *Sulle funzioni di due o più variabili complesse*, Rend. R. Accad. Lincei, XIV, 2° (1905) 492-499.

[9] L. Amoroso, *Sopra un problema al contorno*, Rend. Circ. Matem. Palermo, XXXIII (1912), 75-85.

[10] W. Wirtinger, *Zur formalen Theorie der Funktionen von mehreren komplexen Veränderlichen*, Math. Ann., 97 (1927), 357-375.

[11] F. Severi, *Risoluzione generale del problema di Dirichlet per le funzioni biarmoniche*, Rend. R. Acc. Lincei, XIII (1931), 795-804.

[12] E. Martinelli, *Alcuni teoremi integrali per le funzioni analitiche di più variabili complesse*, Atti R. Accad. d'Italia, Mem. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat., IX, p. 1° (1938), 269-283.

[13] S. Bochner, *Analytic and meromorphic continuation by means of Green's formula*, Ann. Math., XLIV (1943), 652-673.

[14] E. Martinelli, *Introduzione elementare alla teoria delle funzioni di variabili complesse con particolare riguardo alle rappresentazioni integrali*, Acc. Naz. Lincei, Contributi del Centro Linceo Interdisc., 67 (1984).

[15] L. Tonelli, *Opere scelte*, Un. Mat. Ital., Ediz. Cremonese, Roma, Vol. III (1962).

[16] C. B. Morrey Jr., *Multiple integral problems in the calculus of variations and related topics*, Univ. of Calif. Publ. in Math. new ser., I (1943), 1-130.

[17] C. B. Morrey, Jr., *Multiple Integrals in the Calculus of Variations*, Grund. Math. Wiss. Einzeldarst., Bd. 130, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1966).

[18] E. De Giorgi, *Sulla differenziabilità e l'analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari*, Mem. Acc. Sci. Torino, 3 (1957), 25-43.

[19] G. Fichera, *Risultati concernenti la risoluzione delle equazioni funzionali lineari dovuti all'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo*, Mem. Acc. Naz. Lincei, VIII, v. III, sez. I (1950), 3-81.

[20] M. Picone, *Appunti di Analisi superiore*, Rondinella, Napoli (1940).

[21] R. Caccioppoli, *Sui teoremi di esistenza di Riemann*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, 6 (1937), 177-187.

[22] S. L. Sobolev, *On a certain boundary value problem for polyharmonic equations*, Mat. Sbornik, 2, 44 (1937), 465-500. Trad. inglese Amer. Math. Soc. Transl. 2, 33 (1963).

[23] H. Weyl, *The method of orthogonal projection in potential theory*, Duke Math. J., 7 (1940) 411-444.

[24] L. Amerio, *Sull'integrazione dell'equazione $\Delta_2 u - \lambda^2 u = f$ in un dominio di connessione qualsiasi*, Rend. Ist. Lombardo, 78 (1944-45), 1-24.

[25] L. Amerio, *Sull'integrazione dell'equazione $\Delta_{2k} u = f$*, Ann. Matem., 24 (1945), 119-138.

[26] L. Amerio, *Sul calcolo delle soluzioni dei problemi al contorno per le equazioni lineari del secondo ordine di tipo ellittico*, Amer. J. Math., 69 (1947), 447-489.

[27] A. Signorini, *Sopra alcune questioni di Elastostatica*, Atti Soc. Progr. Sci., XXI Riunione, II (1933), 3-8.

[28] A. Signorini, *Questioni di elasticità non linearizzata o semi-linearizzata*, Rend. Mat. Appl., 18 (1959), 1-45.

[29] G. Fichera, *Sull'esistenza e sul calcolo delle soluzioni dei problemi al contorno relativi all'equilibrio di un corpo elastico*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, 3, 4 (1950), 35-99.

[30] G. Fichera, *Alcuni recenti sviluppi della teoria dei problemi al contorno per le equazioni alle derivate parziali*, Atti Convegno Inter. Eq. Der. Parz. Trieste (1954), Ed. Cremonese, Roma, 174-227.

[31] G. Fichera, *Sul problema di Signorini con ambigue condizioni al contorno*, Rend. Acc. Naz. Lincei, VIII, 24 (1963), 138-142.

[32] G. Fichera, *Problemi elastostatici con vincoli unilaterali: il problema di Signorini con ambigue condizioni al contorno*, Mem. Acc. Naz. Lincei, VIII, 7 (1964), 91-140.

[33] J. L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod & Gauthier-Villars, Paris (1969).

[34] S. S. Antman, *The influence of elasticity on analysis: modern developments*, Bull. Amer. Math. Soc., 9 (1983), 267-291.

[35] P. D. Panagiotopoulos, *Inequality Problems in Mechanics and Applications*, Birkhäuser, Boston-Basel-Stuttgart (1985).

[36] G. Fichera, *Sulla propagazione delle onde in un mezzo elastico*, in *Continuum Mechanics and Related Problems of Analysis*, Mosca (1972), 567-574.

[37] G. Fichera, *Il teorema del Massimo Modulo per l'Equazione dell'Elastostatica Tridimensionale*, Arch. Rat. Mech. Anal., 7 (1961), 373-387.

[38] G. Fichera, *Il principio di Saint-Venant: intuizione dell'ingegnere e rigore del matematico*, Rend. Matem. Appl., 10 (1977), 1-24.

[39] G. Fichera, *Remarks on Saint-Venant's Principle*, Acad. Nauk USSR, Istituto Steklov, Volume in onore di I. N. Vekua, Mosca (1978), 543-554.

[40] C. Cassisa - G. Fichera, *A mechanical interpretation of the brothers Riesz theorems*, in *Elasticity. Mathematical Methods and Applications*, edited by G. Eason, R. W. Ogden, Ellis Horwood Publ., Chichester, U.K. (1990), 35-48.

[41] C. Cassisa, *Sui problemi analitici piani originati dalla ricerca degli stati di tensione piana in un cilindro elastico*, Mem. Acc. Naz. Lincei, VIII, 17 (1982), 5-27.

[42] W. K. Hayman, *A conformal mapping problem arising in elasticity*, I) Mem. Acc. Naz. Lincei, VIII, 17 (1982), 33-56; II) IMA Jour. Appl. Math., 31 (1983), 91-111.

[43] G. Fichera, *Avere una memoria tenace crea gravi problemi*, Arch. Rat. Mech. Anal., 70 (1979), 101-112.

[44] G. Fichera, *Sul principio della memoria evanescente*, Rend. Sem. Matem. Univ. Padova, 68 (1982), 245-259.

[45] G. Fichera, *Sui materiali elastici con memoria*, Rend. Acc. Naz. Lincei, VIII, 82 (1988), 473-478.

[46] G. Fichera, *I difficili rapporti fra l'Analisi funzionale e la Fisica matematica*, Rend. Mat. Acc. Lincei, IX, 1 (1990), 161-170.

[47] D. Graffi - P. G. Bordoni - G. Capriz - M. Fabrizio - B. Lazzari - A. Morro - G. Fichera, *Tavola rotonda sul tema «Continui con Memoria»*, (9-V-1986), Centro Linceo Interdisc., 81, Acc. Naz. Lincei (1990).

[48] G. Fichera, *Teoremi di completezza sulla frontiera di un dominio per taluni sistemi di funzioni*, Ann. Mat., IV, 27 (1948), 1-28.

[49] G. Fichera, *Teoremi di completezza connessi all'integrazione dell'equazione*, $\Delta_4 u = f$, Giornale di Matem. di Battaglini, 4, 77 (1947), 184-199.

[50] G. Fichera, *Approximation of analytic functions by rational functions with prescribed poles*, Comm. Pure Appl. Math., 23 (1970), 359-370.

[51] G. Fichera, *Uniform approximation of continuous functions by rational functions*, Ann. Mat. IV, 84 (1970), 375-386.

[52] G. Fichera, *Approximation of the eigenvectors of a positive compact operator and estimate of the error*, Ann. Mat., IV, 108 (1976), 367-377.

[53] G. Fichera, *The problem of the completeness of systems of particular solutions of partial differential equations*, in *Numerical Mathematics*, edited by R. Ansorge, K. Glashoff, B. Werner ISNM 49, Birkhäuser Verlag, Basel (1979), 25-41.

[54] G. Fichera, *Sulla teoria generale dei problemi al contorno per le equazioni differenziali lineari*, Nota I, Rend. Acc. Lincei, VIII, 21 (1956), 46-55; Nota II *ibid*., 156-172.

[55] J. M. Berezanskii, *Expansion in eigenfunctions of selfadjoint operators*, Transl. of Math. Mon., V. 17, Amer. Math. Soc., Providence, R.I. (1968).

[56] J. L. Lions - E. Magenes, *Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications*, Vol. I, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1972).

[57] G. Fichera, *Sulle equazioni differenziali lineari ellittico-paraboliche del secondo ordine*, Mem. Acc. Naz. Lincei, VIII, 5 (1956), 1-30.

[58] G. Fichera, *On a unified theory of boundary value problems for elliptic-parabolic equation of second order*, in *Boundary Problems, Differential Equations*, edited by R. Langer, Univ. of Wisconsin Press, Madison, Wis. (1960), 97-120.

[59] J. J. Kohn - L. Nirenberg, *Degenerate elliptic-parabolic equations of second order*, Comm. Pure Appl. Math., 20 (1967), 797-872.

[60] R. S. Phillips - L. Sarason, *Elliptic-parabolic equations of the second order*, J. Math. Mech., 17 (1967), 891-817.

[61] H. M. Lieberstein, *Theory of Partial Differential Equations*, Acad. Press, New York-London (1972).

[62] O. A. Oleinik - E. V. Radkevic, *Second Order Equations with Nonnegative Characteristic Form*, Amer. Math. Soc., Providence, R.I. (1973). Edizione russa originale 1971. Edizione italiana 1974. Edizione cinese 1984.

[63] G. Fichera, *Applicazione della teoria del potenziale di superficie ad alcuni problemi di analisi funzionale lineare*, Gior. Mat. Battaglini, IV, 78 (1948-49), 71-80.

[64] M. M. Günter, *Die Potentialtheorie und ihre Anwendung auf Grundaufgaben der Mathematischen Physik*, B. G. Teubner, Leipzig (1957).

[65] G. Fichera, *Metodi e risultati concernenti l'analisi numerica e quantitativa*, Mem. Acc. Naz. Lincei, VIII, 12 (1974), 1-202.

[66] G. Fichera, *Numerical and Quantitative Analysis.*, Surveys and References Works in Mathem. 3, Pitman, London-S. Francisco-Melbourne (1978).

[67] S. G. Mikhlin, *Metodi variazionali della Fisica Matematica* (in russo), Letteratura Fisico-Matematica, Nauka, Mosca (1970).

[68] R. P. Gilbert - R. G. Newton (Editors), *Analytic Methods in Mathematical Physics*, Gordon & Breach, New York-London-Paris (1970).

[69] A Weinstein - W. Stenger, *Methods of Intermediate Problems for Eigenvalues, Theory and Ramification*, Mathem. in Science and Engin., 89, Academic Press, New York-London (1972).

[70] H. F. Weinberger, *Variational Metods for Eigenvalue Approximation*, Reg. Conf. Ser. Appl. Mathem. 15, SIAM, Philadelphia (1974).

[71] G. Fichera, *Invarianza rispetto al gruppo unitario e calcolo degli autovalori*, Ist. Naz. Alta Matem. Symposia Mathematica, X (1972), 255-264.

[72] M. P. Colautti, *Sul calcolo dei numeri di Betti di una varietà differenziabile nota per mezzo di un suo atlante*, Rend. Mat. Appl., 22 (1963), 543-556.

[73] G. Fichera, *Betti numbers of differentiable manifolds and multiplicity of eigenvalues*, Serdica Bulgaricae Mathematicae Publicationes, 5 (1979), 203-207.

[74] G. Fichera - M. A. Sneider, *Distribution de la charge électrique dans le voisinage des sommets et des arêtes d'un cube*, C.R. Acad. Sci. Paris, 278A (1974), 1303-1306.

[75] G. Fichera - M. A. Sneider, *Un problema di autovalori proposto da Alexander M. Ostrowski*, Rend. Mat. Appl., 8 (1975), 201-224.

[76] L. de Vito - G. Fichera - A. Fusciardi - M. Schaerf, *Sul calcolo degli autovalori della piastra quadrata incastrata lungo il bordo*, Rend. Acc. Naz. Lincei, VIII, 40 (1966), 725-733.

[77] L. Bassotti, *Operatori lineari T-invarianti rispetto ad un gruppo di congruenze*, Ann. Mat., IV, 148 (1987), 173-205. Trad. in russo: Uspehi Mathematischi Nauk, 43, (1988), 57-85.

[78] G. Fichera, *Semicontinuity of multiple integrals in ordinary form*, Arch. Rat. Mech. Anal., 17 (1964), 339-352.

[79] G. Fichera, *Semicontinuità ed esistenza del minimo per una classe di integrali multipli*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl., 12 (1967), 1217-1220.

[80] F. E. Browder, *Remarks on the direct method of the calculus of variations*, Arch. Rat. Mech. Anal., 20 (1965), 251-258.

[81] L. Cesari - D. E. Cowles, *Existence theorems in multidimensional problems of optimization with distributed and boundary controls*, Arch. Rat. Mech. Anal., 4, (1972), 321-355.

[82] S. S. Antman, *The Theory of Rods*, in *Handbuch der Physik*, Bd. VIa/2, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1972), 641-703.

[83] J. M. Ball, *Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity*, Arch. Rat. Mech. Anal., 63 (1977), 337-403.

[84] G. Fichera, *Caratterizzazione della traccia, sulla frontiera di un campo, di una funzione analitica di più variabili complesse*, Rend. Acc. Naz. Lincei, VIII, 22 (1957), 706-715.

[85] G. Fichera, *I teoremi di Severi e di Severi-Kneser per le funzioni analitiche di più variabili complesse e loro ulteriori sviluppi*, Conferenze del Sem. Mat. Univ. Bari, 238 (1991), 13-25.

[86] G. Fichera, *Problemi di valori al contorno per le funzioni pluriarmoniche*, Actes 6ᵉ Congr. du Group. Mathém. d'Expression Latine, Luxembourg (1981), Gauthier-Villars, 139-151.

[87] G. Fichera, *Su un teorema di L. Amoroso nella teoria delle funzioni analitiche di più variabili complesse*, Rev. Roumain. Math. Pures Appl., 27 (1982), 327-333.

[88] G. Fichera, *I contributi di Francesco Severi e di Guido Fubini alla teoria delle funzioni di più variabili complesse*, in *Atti del Convegno Matematico in Celebrazione di G. Fubini e F. Severi*, Acc. Sci. Torino (1982), 23-44.

[89] G. Fichera - M. A. Sneider, *Pluriharmonic functions in the unit ball of* R^{2n}, Rend. Mat. e delle sue Appl., 2 (1982), 627-641.

[90] G. Fichera, *Valori al contorno delle funzioni pluriarmoniche: estensione allo spazio* R^{2n} *di un teorema di L. Amoroso*, Rend. Sem. Mat. Fis. Milano, 52 (1982), 23-34.

[91] G. Fichera, *Sul teorema di Cauchy-Morera per le funzioni analitiche di più variabili complesse*, Rend. Acc. Naz. Lincei, VIII, 74 (1983), 336-350.

[92] G. Fichera, *Sul fenomeno di Hartogs per gli operatori lineari alle derivate parziali*, Rend. Ist. Lombardo A, 117 (1983), 199-211.

[93] G. Fichera, *Unification of global and local existence theorems for holomorphic functions of several complex variables*, Mem. Acc. Naz. Lincei, VIII, 18 (1986), 61-83.

[94] G. Fichera, *Conditions for holomorphy of* L^1_{loc} *functions*, in *Partial Differential Equation and Related Subjects*, edited by M. Miranda, Pitman Res. Notes in Math., 269, Longman (1992), 96-124.

[95] W. Rudin, *Function Theory in the Unit Ball of* C^n, Grundleh. Math. Wissen., 241, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin (1980).

[96] G. Fichera, *Spazi lineari di k-misure e di forme differenziali*, Proc. Inter. Symp. on Linear Spaces, Jerusalem 1960, Jerusalem Acad. Press, The Israel Acad., Pergamon Press, London, 175-226.

[97] G. Fichera, *Teoria assiomatica delle forme armoniche*, Rend. Mat. Appl., 20 (1961), 147-171.

[98] M. P. Colautti, *Sui problemi variazionali di un corpo elastico incompressibile*, Mem. Acc. Naz. Lincei, VIII, 8 (1967), 291-343.

[99] L. de Vito, *Sopra una congettura di Mikhlin relativa ad una estensione della diseguaglianza di M. Riesz alle superficie*, Rend. Mat. Appl., 23 (1964), 273-297.

[100] L. de Vito - I. Mazzaroli, *Sui fondamenti della Meccanica dei sistemi continui*, Mem. Acc. Naz. Lincei, VIII, VII (1965), 205-301.

[101] G. Fichera, *Linear elliptic equations of higher order in two independent variables and singular integral equations, with applications to anisotropic inhomogeneous elasticity*, in *Partial Differential Equations and Continuum Mechanics*, edited by R. E. Langer, The Univ. of Wisconsin Press, Madison, Wis. (1961), 55-80.

[102] G. Hsiao - R. C. Maccamy, *Solutions of boundary value problems by integral equations of the first kind*, SIAM Rev., 15, 1 (1973), 687-705.

[103] L. Marino - R. Piva (Eds.), *Boundary Integral Methods*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1990).

[104] P. E. Ricci, *Sui potenziali di semplice strato per le equazioni ellittiche di ordine superiore*, Rend. Mat. Appl. 7 (1974), 1-39.

[105] A. Cialdea, *Sul problema della derivata obliqua per le funzioni armoniche e questioni connesse*, Rend. Acc. Naz. XL, Mem. Mat., 12 (1988), 1-20.

[106] A. Cialdea, *The simple layer potential for the biharmonic equation in n variables*, Rend. Acc. Naz. Lincei, IX, 2 (1991), 115-127.

[107] A. Cialdea, *A multiple-layer potential theory alternative to Agmon's*, Arch. Rat. Mech. Anal., 120 (1992), 345-362.

[108] A. Cialdea, *The multiple layer potential for the biharmonic equation in n variables*, Rend. Acc. Naz. Lincei, IX, 3 (1992), 241-259.

Direttore responsabile: Prof. A. Ballio - Autorizz. Trib. di Roma n. 7269 dell'8-12-1959
«Monograf» - Via Collamarini, 5 - Bologna