Rendiconti
Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL
Memorie di Matematica
108° (1990), Vol. XIV, fasc. 11, pagg. 183-193

GIORGIO LETTA - LUCA PRATELLI (*)

Quelques remarques sur les intégrales stochastiques de processus non prévisibles (**)

RÉSUMÉ. — On analyse les relations entre la tribu prévisible, la tribu optionnelle, la tribu progressive et la tribu des ensembles mesurables adaptés. Les résultats obtenus sont appliqués au problème de l'extension de l'intégrale stochastique à certains processus non prévisibles.

Alcune osservazioni sugli integrali stocastici di processi non prevedibili

RIASSUNTO. — Si studiano le relazioni tra la tribù prevedibile, la tribù opzionale, la tribù progressiva e la tribù degli insiemi misurabili adattati. I risultati ottenuti sono utilizzati per estendere la nozione d'integrale stocastico indebolendo la condizione di prevedibilità abitualmente imposta al processo integrando.

INTRODUCTION

Dans la théorie de l'intégration stochastique par rapport à une semimartingale (voir [3]), on n'intègre, habituellement, que des processus prévisibles. Il existe cependant des cas particuliers où la définition de l'intégrale stochastique peut s'étendre de manière naturelle à certains processus non prévisibles: il est bien connu, par exemple, qu'étant donné un processus de Wiener W, l'intégrale stochastique d'Ito $\int H\,dW$ peut être définie pour tout processus borné H qui soit mesurable et adapté.

Une situation analogue est étudiée dans [1], où le processus W est remplacé par une martingale M, continue, de carré intégrable.

Dans le présent article nous nous plaçons dans un cas en peu plus général: celui d'une martingale M, de carré intégrable, *quasi-continue à gauche*, c'est-à-dire telle que le processus croissant $\langle M, M\rangle$ soit continu. Pour une telle mar-

(*) Indirizzo degli Autori: Dipartimento di Matematica, Via Buonarroti 2, I-56100 Pisa.
(**) Memoria presentata il 21 giugno 1990 da Giorgio Letta, socio dell'Accademia.

ISSN-0392-4106

tingale, nous montrons que l'intégrale stochastique $\int H\,dM$ peut être prolongée à tous les processus H bornés progressifs; en outre, dans le cas particulier où la mesure associée à $\langle M, M\rangle$ est absolument continue par rapport à une mesure de la forme $\alpha\otimes P$ (avec α mesure positive et σ-finie dans la tribu borélienne de $]0, \infty[$), l'intégrale stochastique peut être prolongée à tous les processus H bornés mesurables adaptés.

Ces résultats ne sont que des conséquences faciles de résultats de théorie « générale » concernant les relations entre les quatre tribus suivantes: la tribu prévisible $\mathcal{V}$, la tribu optionnelle $\mathcal{O}$, la tribu progressive $\mathcal{P}$ et la tribu $\mathcal{A}$ de tous les ensembles mesurables adaptés. La première partie de l'article est donc consacrée à une analyse des rapports entre ces quatre tribus.

Les résultats de cette analyse sont ensuite appliqués au prolongement de l'intégrale stochastique. On compare enfin l'intégrale stochastique ainsi prolongée à l'intégrale stochastique « compensée » étudiée dans [3].

1. - Hypothèses, notations, rappels

Le langage, les notations et les conventions sont les mêmes que dans [4]. Étant donné un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, nous considérons, sur l'espace

$$]0, \infty] =]0, \infty[\times\Omega\,,$$

la tribu $\mathcal{M} = \mathcal{B}(]0, \infty[)\otimes\mathcal{F}$ (appelée tribu des ensembles *mesurables*), dont nous nous proposons d'étudier les quatre sous-tribus suivantes:

(a) la tribu $\mathcal{V}$ des ensembles *prévisibles* (engendrée par les intervalles stochastiques de la forme $]0, T]$, avec T temps d'arrêt);

(b) la tribu $\mathcal{O}$ des ensembles *optionnels* (engendrée par les intervalles stochastiques de la forme $]0, T[$, avec T temps d'arrêt);

(c) la tribu $\mathcal{P}$ des ensembles *progressifs* (ou progressivement mesurables);

(d) la tribu $\mathcal{A}$ des ensembles mesurables *adaptés*.

On a évidemment

$$\mathcal{V}\subset\mathcal{O}\subset\mathcal{P}\subset\mathcal{A}\subset\mathcal{M}\,.$$

(1.1) Remarque: L'inclusion $\mathcal{P}\subset\mathcal{A}$ est stricte (en général), même si l'on suppose que la loi P est complète et que la filtration $(\mathcal{F}_t)$ vérifie les *hypothèses habituelles*. Pour le voir, il suffit de construire un exemple où ces conditions sont remplies et où il existe une variable aléatoire T, à valeurs dans $]0, \infty]$, qui n'est pas un temps d'arrêt, mais dont la loi est diffuse. En effet, le graphe $[T]$ d'une telle variable aléatoire est un ensemble mesurable adapté, qui n'est pas progressivement mesurable (car son début n'est pas un temps d'arrêt). Un exemple de ce type se trouve dans [1], où il est attribué à M. Barlow.

Suivant le langage de [4], nous appellerons *processus de Stieltjes* un processus Z, nul en 0, tel que, pour tout ω, la trajectoire $Z(\cdot, \omega)$ soit la fonction de répartition d'une mesure de Radon sur R_+.

(1.2) Définition: Etant donné le processus de Stieltjes Z, nous dirons que deux processus H, K (admettant $]0, \infty[$ comme ensemble des temps) sont *équivalents* selon Z si, pour tout ω, les deux trajectoires $H(\cdot, \omega)$, $K(\cdot, \omega)$ sont équivalentes pour la variation totale de la mesure de Radon sur R_+ admettant $Z(\cdot, \omega)$ comme fonction de répartition.

(1.3) Lemme: *Etant donnés un processus de Stieltjes Z adapté et un processus H mesurable borné, considérons l'intégrale stochastique de Stieltjes $\int H\,dZ$, c'est-à-dire le processus de Stieltjes X défini par*

$$X(t, \omega) = \int_{]0, t]} H(s, \omega)\, Z(ds, \omega) \qquad \textit{pour tout } t > 0\,.$$

Les conditions suivantes sont équivalentes:

(*a*) *Il existe un processus K, optionnel borné, qui est équivalent à H selon Z (au sens de* (1.2)).

(*b*) *Il existe un processus K, progressif borné, qui est équivalent à H selon Z.*

(*c*) *X est adapté.*

Démonstration: Il suffit de prouver que (*c*) entraîne (*a*). A cet effet, on pourra supposer Z croissant et $0 < H < 1$.

Il suffit alors de poser

$$K_t = \liminf_n \left[(X_t - X_{t - 1/(n+1)}) / (Z_t - Z_{t-1/(n+1)}) \right],$$

avec la convention $0/0 = 0$ (voir [4], (44.1)).

De façon analogue on démontre le lemme suivant:

(1.4) Lemme: *Etant donnés un processus de Stieltjes Z, adapté et continu, et un processus H mesurable borné, considérons le processus de Stieltjes (continu) $X = \int H\,dZ$.*

Les conditions suivantes sont équivalentes:

(*a*) *Il existe un processus K, prévisible borné, qui est équivalent à H selon Z (au sens de* (1.2)).

(*b*) *Il existe un processus K, progressif borné, qui est équivalent à H selon Z.*

(*c*) *X est adapté.*

(1.5) Remarque: Lorsque la filtration ne vérifie pas les conditions habituelles, il peut arriver que, dans les hypothèses du lemme précédent, le processus H soit adapté, sans pour autant que les conditions équivalentes (*a*), (*b*), (*c*) soient remplies. Un exemple de ce type (concernant le cas où Z est le processus déterministe $(t, \omega) \mapsto t$) se trouve dans [5]. On comparera cet exemple de processus mesurable adapté non progressif avec celui de la Remarque (1.1).

2. - Relations entre les tribus $\mathcal{V}$, $\mathcal{O}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{A}$

Rappelons que, selon les conventions de [4], un temps d'arrêt prévisible ne prend jamais la valeur 0. Rappelons aussi que, si T est un temps d'arrêt prévisible, la tribu $\mathcal{F}_{T-}$ est constituée par les éléments A de $\mathcal{F}_T$ tels que le temps d'arrêt T_A soit prévisible. Par conséquent, pour que $\mathcal{F}_{T-}$ coïncide avec $\mathcal{F}_T$, il faut et il suffit que tout temps d'arrêt dont le graphe est contenu dans celui de T soit prévisible (en d'autres termes: il faut et il suffit que toute partie progressive du graphe de T soit prévisible).

(2.1) Théorème: *Supposons que la filtration $(\mathcal{F}_t)$ vérifie les conditions habituelles de* [4]. *Soit Z un processus de Stieltjes croissant et prévisible, et désignons par μ la mesure associée à Z. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(*a*) *Tout ensemble progressif est équivalent, pour la mesure μ, à un ensemble prévisible.*

(*b*) *Pour tout temps d'arrêt T prévisible, dont le graphe est contenu dans $\{\Delta Z \neq 0\}$, on a $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_{T-}$.*

(*c*) *Toute partie progressive de l'ensemble $\{\Delta Z \neq 0\}$ est prévisible.*

Démonstration: (*a*) $\Rightarrow$ (*b*). Soit T un temps d'arrêt prévisible, avec $[\![T]\!] \subset \{\Delta Z \neq 0\}$, et soit S un temps d'arrêt dont le graphe est contenu dans celui de T. D'après l'hypothèse (*a*), $[\![S]\!]$ est équivalent, pour la mesure μ, à un ensemble prévisible. On peut supposer que cet ensemble est contenu dans $[\![T]\!]$: il est donc à son tour le graphe d'un temps d'arrêt U prévisible. Puisque μ charge toute partie de $[\![T]\!]$ mesurable et non évanescente, $[\![U]\!]$ coïncide avec $[\![S]\!]$ à un ensemble évanescent près. Il en résulte (grâce aux conditions habituelles) que $[\![S]\!]$ est prévisible.

(*b*) $\Leftrightarrow$ (*c*). Cette équivalence résulte aussitôt du fait que l'ensemble $\{\Delta Z \neq 0\}$ est une réunion dénombrable de graphes de temps d'arrêt prévisibles.

(*c*) $\Rightarrow$ (*a*). La mesure prévisible μ est la somme de deux mesures prévisibles positives α, β concentrées sur les ensembles $\{\Delta Z = 0\}$, $\{\Delta Z \neq 0\}$ respectivement. Soit H un ensemble progressif. En appliquant (1.4), on trouve un ensemble G prévisible, équivalent à H pour la mesure α. On peut naturellement supposer $G \subset \{\Delta Z = 0\}$. Il résulte de l'hypothèse (*c*) que l'ensemble

$H \cap \{\Delta Z \neq 0\}$ est prévisible. Il en est donc de même de l'ensemble

$$G \cup (H \cap \{\Delta Z \neq 0\}) .$$

Puisque celui-ci est équivalent à H pour la mesure μ, l'assertion est prouvée.

Dans l'énoncé qui suit, les conditions habituelles sur la filtration n'interviennent pas. Il s'agit d'un énoncé « sans probabilité ».

(2.2) Théorème: *Soit $\mathfrak{I}$ le σ-idéal de $\mathcal{O}$ constitué par les réunions dénombrables de graphes de temps d'arrêt à valeurs dans* $]0, \infty]$.
On a alors

$$\mathcal{O} \subset \mathcal{P} \vee \mathfrak{I}$$

(où le second membre désigne la tribu engendrée par $\mathcal{P} \cup \mathfrak{I}$).

Démonstration: La tribu $\mathcal{O}$ est engendrée par les intervalles stochastiques de la forme $]0, T[$, avec T temps d'arrêt. Il suffit donc de remarquer que la relation

$$]0, T[=]0, T] \cap ([T] \cap]0, \infty[)^c$$

exprime l'intervalle stochastique $]0, T[$ comme intersection d'un ensemble prévisible et du complémentaire d'un élément de $\mathfrak{I}$.

Le théorème suivant exige les hypothèses habituelles sur la filtration (qui interviennent pour assurer l'existence de la projection optionnelle):

(2.3) Théorème: *Désignons par $\mathfrak{J}$ le σ-idéal de la tribu $\mathcal{M}$ constitué par les ensembles mesurables A qui vérifient la relation*

$$P(\omega : (t, \omega) \in A) = 0$$

pour tout $t > 0$. Supposons en outre que la filtration $(\mathcal{F}_t)$ vérifie les conditions habituelles.
On a alors

$$A \subset \mathcal{O} \vee \mathfrak{J} .$$

Démonstration: Soit H un processus adapté (mesurable borné), et désignons par K sa projection optionnelle.

Pour tout nombre réel $t > 0$, la variable aléatoire K_t est une version de l'espérance conditionnelle de H_t par rapport à $\mathcal{F}_t$: elle est donc équivalente à H_t pour la mesure P. En d'autres termes, l'ensemble $\{H \neq K\}$ appartient au σ-idéal $\mathfrak{J}$.

Cela suffit pour conclure.

3. - Applications aux intégrales stochastiques

Dans ce paragraphe on suppose que la filtration $(\mathcal{F}_t)$ vérifie les conditions habituelles. En outre, chacune des martingales considérées est supposée nulle en 0, réglée, continue à droite.

(3.1) Définition: Une martingale M de carré intégrable est dite *quasi-continue à gauche* si $\langle M, M\rangle$ possède un représentant continu.

(3.2) Proposition: *Pour une martingale M de carré intégrable, les conditions suivantes sont équivalentes:*

(*a*) *M est quasi-continue à gauche.*

(*b*) *L'ensemble $\{\Delta M \neq 0\}$ a une intersection évanescente avec tout graphe de temps d'arrêt prévisible (autrement dit: il est prévisiblement négligeable, au sens de* [4], p. 84).

(*c*) *L'ensemble $\{\Delta M \neq 0\}$ est une réunion dénombrable de graphes de temps de arrêt totalment inaccessibles.*

Démonstration: L'ensemble $\{\Delta M \neq 0\}$ est la réunion des graphes d'une suite (T_n) de temps d'arrêt: par conséquent, pour qu'il soit prévisiblement négligeable, il faut et il suffit que chacun de ces graphes soit prévisiblement négligeable, c'est-à-dire que chacun des T_n soit un temps d'arrêt totalement inaccessible. L'équivalence des conditions (*b*), (*c*) est ainsi démontrée.

Pour prouver l'équivalence des conditions (*a*), (*b*), désignons par Z un processus de Stieltjes, croissant et prévisible, qui soit un représentant de $\langle M, M\rangle$, c'est-à-dire tel que $M^2 - Z$ soit une martingale. On a alors, pour tout temps d'arrêt T prévisible,

$$\int_{\{T<\infty\}} \Delta_T Z\, dP = \int_{\{T<\infty\}} \Delta_T M^2\, dP = \int_{\{T<\infty\}} (\Delta_T M)^2\, dP . \tag{3.3}$$

La condition (*b*) signifie que, pour tout temps d'arrêt prévisible T, le dernier membre de (3.3) est nul. La condition (*a*) signifie que l'ensemble $\{\Delta Z \neq 0\}$ est évanescent: mais, comme cet ensemble est une réunion dénombrable de graphes de temps d'arrêt prévisibles, elle revient simplement à imposer que, pour tout temps d'arrêt T prévisible, le premier membre de (3.3) soit nul. L'équivalence des conditions (*a*), (*b*) est donc évidente.

(3.4) Proposition: *Soit T un temps d'arrêt prévisible, tel que l'on ait $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_{T-}$. Alors, pour toute martingale M de carré intégrable, l'ensemble $[\![T]\!] \cap \{\Delta M \neq 0\}$ est évanescent.*

Démonstration: L'ensemble $[\![T]\!] \cap \{\Delta M > 0\}$ est une partie progressive de $[\![T]\!]$: c'est donc le graphe d'un temps d'arrêt S prévisible. Ce graphe est évanescent, car dans le cas contraire on aurait

$$\int_{\{s<\infty\}} \Delta_s M \, dP > 0 \, .$$

En remplaçant M par $-M$, on voit que l'ensemble $[\![T]\!] \cap \{\Delta M < 0\}$ est, lui aussi, évanescent.

(3.5) Proposition: *Soit T un temps d'arrêt prévisible, tel que l'on ait $\mathcal{F}_T \neq \mathcal{F}_{T-}$. On peut alors construire une martingale M, bornée et non évanescente, qui soit un processus de Stieltjes purement discontinu et qui ne saute que sur $[\![T]\!]$, c'est-à-dire telle que l'on ait*

$$\{\Delta M \neq 0\} \subset [\![T]\!] \, .$$

Démonstration: Soit A un élément de $\mathcal{F}_T$ n'appartenant pas à $\mathcal{F}_{T-}$. Choisissons une version V, à valeurs dans $[0, 1]$, de l'espérance conditionnelle de I_A par rapport à $\mathcal{F}_{T-}$, et posons

$$M(t, \omega) = (I_A(\omega) - V(\omega)) \, I_{[\![T, \infty[\![}(t, \omega) \, .$$

La martingale M ainsi définie répond à la question.

(3.6) Définition: On dit que la filtration $(\mathcal{F}_t)$ est *quasi-continue à gauche* si on a $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_{T-}$ pour tout temps d'arrêt T prévisible.

(3.7) Proposition: *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(*a*) *La filtration $(\mathcal{F}_t)$ est quasi-continue à gauche.*

(*b*) *Toute martingale de carré intégrable est quasi-continue à gauche.*

Démonstration: Supposons la condition (*a*) remplie, et soit M une martingale de carré intégrable. Il résulte de (3.4) que, pour tout temps d'arrêt T prévisible, l'ensemble $[\![T]\!] \cap \{\Delta M \neq 0\}$ est évanescent. La martingale M vérifie donc la condition (*b*) de (3.2), de sorte qu'elle est quasi-continue à gauche.

Supposons maintenant que la condition (*a*) ne soit pas remplie, c'est-à-dire qu'il existe un temps d'arrêt T prévisible, tel que l'on ait $\mathcal{F}_T \neq \mathcal{F}_{T-}$. On voit alors que la martingale M construite dans (3.5) n'est pas quasi-continue à gauche (car elle ne vérifie pas la condition (*b*) de (3.2)).

Rappelons maintenant la définition de l'intégrale stochastique par rapport à une martingale de carré intégrable. Etant donnée une telle martingale M (avec $M_0 = 0$), désignons par μ la mesure associée à $\langle M, M \rangle$ (mesure qui est définie dans la tribu $\mathcal{M}$ de tous les ensembles mesurables), et considérons sa restriction $\mu|\mathcal{U}$ à la tribu prévisible. On définit alors (voir [4], 33.5) une isométrie

$$H \mapsto \int H\,dM$$

de l'espace $\mathfrak{L}^2(\mu|\mathcal{V})$ dans l'espace de Hilbert des martingales de carré intégrable (considérées à indistinguabilité près). Cette isométrie est caractérisée par le fait qu'elle coïncide avec l'intégrale stochastique élémentaire sur toutes les combinaisons linéaires finies de processus de la forme $I_{]s,T]}$, avec S, T temps d'arrêt. Considérons maintenant une sous-tribu $\mathcal{K}$ de la tribu $\mathcal{M}$ des ensembles mesurables, et supposons que tout élément de $\mathcal{K}$ soit équivalent, pour la mesure μ, à un ensemble prévisible. Cette hypothèse se traduit par la relation

$$\mathcal{K} \subset \mathcal{V} \vee \overset{-1}{\mu}(0),$$

où $\overset{-1}{\mu}(0)$ désigne l'idéal de $\mathcal{M}$ constitué par les ensembles mesurables qui sont négligeables pour la mesure μ.

Il est clair que, dans ces conditions, tout élément H de $\mathfrak{L}^2(\mu|\mathcal{K})$ est équivalent, pour la mesure μ, à un élément K de $\mathfrak{L}^2(\mu|\mathcal{V})$, de sorte qu'on peut définir (sans ambiguïté) l'intégrale stochastique de T par rapport à M, simplement en posant

$$\int H\,dM = \int K\,dM.$$

Voilà un cas particulier de la situation précédente:

(3.8) Théorème: *Supposons que la martingale M, de carré intégrable, soit quasi-continue à gauche, et désignons par μ la mesure associée à $\langle M, M\rangle$.*

Tout ensemble progressif est alors équivalent, pour la mesure μ, à un ensemble prévisible:

$$\mathcal{S} \subset \mathcal{V} \vee \overset{-1}{\mu}(0).$$

Par conséquent, l'intégrale stochastique $\int H\,dM$ peut être définie pour tout processus H appartenant à $\mathfrak{L}^2(\mu|\mathcal{S})$ (et notamment pour tout processus H progressif borné).

Démonstration: Il suffit d'appliquer (2.1) en prenant pour Z un représentant de $\langle M, M\rangle$.

Le résultat précédent, énoncé dans le cas particulier d'une martingale M *continue* (et avec une démonstration différente) figure dans le livre [1]. Dans ce même livre, on montre (par un exemple dû à Martin Barlow) que, dans les hypothèses du théorème précédent, la relation

$$\mathcal{A} \subset \mathcal{V} \vee \overset{-1}{\mu}(0)$$

n'est pas toujours vraie, même si la martingale M est continue. En revanche, on montre que cette inclusion est vraie si la mesure μ est absolument continue par rapport à $\lambda \otimes P$, où λ désigne la mesure de Lebesgue dans la tribu $\mathcal{B}(]0, \infty[)$. Nous démontrerons un résultat un peu plus général:

(3.9) Théorème: *Soit M une martingale de carré intégrable, telle que la mesure μ associée à $\langle M, M \rangle$ soit absolument continue par rapport à une mesure du type $\alpha \otimes P$, où α est une mesure positive et σ-finie dans la tribu $\mathcal{B}(]0, \infty[)$. On a alors*

$$\mathcal{A} \subset \mathcal{O} \vee \overset{-1}{\mu}(0).$$

Si l'on suppose en plus que la martingale M est quasi-continue à gauche (ce qui est toujours le cas lorsque la mesure α est diffuse), on a aussi

$$\mathcal{A} \subset \mathcal{U} \vee \overset{-1}{\mu}(0).$$

Démonstration: L'idéal $\overset{-1}{\mu}(0)$ contient évidemment l'idéal $\mathfrak{J}$ considéré dand le Théorème (2.3). On a donc, grâce à ce théorème,

$$\mathcal{A} \subset \mathcal{O} \vee \mathfrak{J} \subset \mathcal{O} \vee \overset{-1}{\mu}(0).$$

Il en résulte, lorsque la martingale M est quasi-continue à gauche,

$$\mathcal{A} \subset \mathcal{O} \vee \overset{-1}{\mu}(0) \subset \mathcal{P} \vee \overset{-1}{\mu}(0) \subset \mathcal{U} \vee \overset{-1}{\mu}(0),$$

où la dernière inclusion est due à (3.8).

4. - Comparaison avec l'intégrale stocastique compensée

Il existe une autre manière de prolonger l'intégrale stochastique relative à une martingale de carré integrable. La théorie de l'intégrale stochastique « compensée » permet en effet d'intégrer tout processus mesurable borné (même non adapté!). Nous nous proposons, dans ce paragraphe, de comparer ce deuxième procédé d'extension de l'intégrable stochastique avec celui qui a été étudié dans le paragraphe précédent. Nous verrons que les deux procédés coïncident dans le cas d'une martingale continue, mais qu'ils sont distincts en général (voir Remarque (4.4) ci-dessous).

Commençons par rappeler rapidement la définition de l'intégrale stochastique compensée (en renvoyant pour les détails à [3]).

Supposons que la filtration vérifie les conditions habituelles. Etant donnée une martingale M de carré intégrable, considérons la mesure $\mu_{[M,M]}$ associée à la variation quadratique $[M, M]$. Si H est un élément de $\mathfrak{L}^2(\mu_{[M,M]})$, on peut considérer, sur l'espace de Hilbert des martingales de carré intégrable, la forme linéaire ℓ definie par

$$\ell(N) = \int H \, d\mu_{[M,N]},$$

où $\mu_{[M,N]}$ désigne la mesure associée à la variation mutuelle $[M, N]$.

Puisque cette forme linéaire est continue, elle peut être représentée sous la forme

$$\ell(N) = (N|L),$$

où L est une martingale de carré intégrable (déterminée par H à indistinguabilité près). On désigne cette martingale par $H \cdot M$, et on l'appelle *l'intégrale stochastique compensée* de H par rapport à M. Elle coïncide avec l'intégrale stochastique « classique » $\int H \, dM$ dans le cas où H est prévisible.

(4.1) Proposition: *Supposons que la martingale M (de carré intégrable) soit continue. Etant donné un processus H mesurable borné, désignons par K sa projection prévisible.*

On a alors

$$H \cdot M = K \cdot M = \int K \, dM.$$

Démonstration: Il suffit de remarquer que le processus H et sa projection prévisible K définissent la même forme linéaire sur l'espace des martingales de carré intégrable, car les mesures (prévisibles) de la forme $\mu_{[M,N]}$ ne distinguent pas H de K.

(4.2) Proposition: *Dans les mêmes hypothèses, supposons H optionnel. Alors l'intégrale stochastique $\int H \, dM$ (définie à l'aide de (3.8)) coïncide avec l'intégrale stochastique compensée $H \cdot M$.*

Démonstration: On sait que l'ensemble où H diffère de sa projection prévisible K est une réunion dénombrable de graphes de temps d'arrêt: par conséquent, il est négligeable pour la mesure associée à $\langle M, M \rangle$. Il en résulte

$$\int H \, dM = \int K \, dM = H \cdot M,$$

où la dernière égalité est due à la proposition précédente.

(4.3) Proposition: *Supposons que la martingale M (de carré intégrable) soit continue, et que la mesure μ associée au processus $\langle M, M \rangle$ soit absolument continue par rapport à une mesure de la forme $\alpha \otimes P$, où α est une mesure positive et σ-finie dans $\mathcal{B}(]0, \infty[)$.*

Alors, pour tout processus H mesurable, adapté et borné, l'intégrale stochastique $\int H dM$ (définie à l'aide de (3.9)) coïncide avec l'intégrale stochastique compensée $H \cdot M$.

Démonstration: Désignons par K la projection optionnelle de H. En raisonnant comme dans (2.3), on voit que le processus K est équivalent à H pour la mesure $\alpha \otimes P$, donc aussi pour la mesure μ. Il en résulte

$$\int H\,dM = \int K\,dM = K \cdot M = H \cdot M\,,$$

où la dernière égalité est due au fait que H et K admettent la même projection prévisible.

(4.4) Remarque: Dans la Proposition (4.2), l'hypothèse que la martingale M soit continue ne peut pas être remplacée par l'hypothèse que M soit quasi-continue à gauche.

Supposons en effet que cette hypothèse plus faible soit remplie, mais que le processus ΔM ne soit pas évanescent. Il existe alors un temps d'arrêt T, tel que le graphe de T soit contenu dans l'ensemble $\{\Delta M \neq 0\}$ et ne soit pas évanescent. Le processus optionnel $H = I_{[T]}$ est négligeable pour la mesure associée à $\langle M, M \rangle$. Par conséquent, l'intégrale stochastique $\int H\,dM$ définie à l'aide de (3.8) est nulle. Par contre, l'intégrale stochastique compensée $H \cdot M$ n'est pas nulle, car la forme linéaire ℓ définie par H sur l'espace des martingales de carré intégrable vérifie la relation

$$\ell(M) = \int H\,d\mu_{\langle M,M \rangle} = \int_{\{T<\infty\}} (\Delta_T M)^2\,dP \neq 0\,.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] K. L. Chung - R. J. Williams, *Introduction to Stochastic Integration*, Birkhäuser, Boston (1990).
[2] C. Dellacherie - P.-A. Meyer, *Probabilités et potentiel*, Chap. I-IV, Hermann, Paris (1975).
[3] C. Dellacherie - P.-A. Meyer, *Probabilités et potentiel*, Chap. V-VIII, Hermann, Paris (1980).
[4] G. Letta, *Martingales et Intégration Stochastique*, Quaderni Scuola Normale Superiore, Pisa (1984).
[5] G. Letta, *Un exemple de processus mesurable adapté non progressif*, Sém. Prob. XXII, Springer, Berlin (1988).