Rendiconti
Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL
Memorie di Matematica
108° (1990), Vol. XIV, fasc. 14, pagg. 253-294

AIMÉ FUCHS (*) - RITA GIULIANO ANTONINI (**)

Théorie générale des densités (***)

The General Theory of Densities

ABSTRACT. — This paper is devoted to a systematic treatment of the various notions of arithmetical density introduced on $\mathbf{N}^*$. It contains many results: some of them have been previously published by the two authors, some others are new.

Teoria generale delle densità

SUNTO. — Questo articolo è dedicato ad uno studio sistematico delle varie nozioni di densità aritmetica che sono state introdotte su $\mathbf{N}^*$. In esso, oltre a risultati già pubblicati dai due autori, si trovano alcuni teoremi nuovi,

Le présent article est consacré à une étude systématique de différentes notions de densités que l'on est amené à introduire sur $\mathbf{N}^*$. Certains des résultats présentés ici se trouvent déjà épars dans des articles antérieurs des deux auteurs [3, 4, 7, 8]; nous avons jugé utile de les intégrer et de les regrouper dans une exposition aussi simple et unitaire que possible. D'autres résultats sont nouveaux. Il en est ainsi de l'équivalence des notions de μ-densité arithmétique, analytique et exponentielle (Théorème 5.13), qui fournit un outil très puissant de comparaison de densités. Nous signalons également le Théorème 8.2, qui est à la base de critères d'existence de densités de parties de $\mathbf{N}^*$ qui sont d'une simplicité et d'une efficacité insoupçonnées jusqu'à présent. C'est ainsi que le Critère 8.7 est un critère d'existence de la densité analytique usuelle d'une partie de $\mathbf{N}^*$ qui est d'une rare souplesse; il permet par exemple de montrer en une ligne que la densité analytique usuelle de l'en-

(*) Université Louis Pasteur, Département de Mathématique, Strasbourg.
(**) Dipartimento di Matematica dell'Università di Pisa.
(***) Memoria presentata il 30 agosto 1990 da Giorgio Letta, socio dell'Accademia.

ISSN-0392-4106

semble E_k des entiers admettant k comme premier chiffre dans sa représentation décimale est $\mathrm{Log}_{10}(1 + 1/k)$, $k \in \{1, ..., 9\}$.

1. - Définition générale des densités

Les différentes notions de « densité » qui ont été étudiées dans la littérature peuvent être facilement ramenées à un schéma commun, de la façon suivante. On se donne un ensemble T d'indices, muni d'un filtre $\mathcal{F}$, et une famille $(\mu_t)_{t\in T}$ de mesures positives et bornées sur l'ensemble N^* des entiers strictement positifs. On suppose que, suivant le filtre $\mathcal{F}$, la famille (μ_t) converge vers 1 sur N^*, et vers 0 sur toute partie de N^* réduite à un seul élément (donc aussi sur toute partie finie).

Définition 1.1. *Soit $(\mu_t)_{t\in T}$ une famille de mesures sur N^* vérifiant les hypothèses ci-dessus.*

(*a*) *Etant donnée une partie A de N^*, on s'intéresse à la limite, suivant le filtre $\mathcal{F}$, de la fonction $t \to \mu_t(A)$. Lorsque cette limite existe, on l'appelle la densité de A (relativement à la famille (μ_t)).*

(*b*) *De façon plus générale, si f est une fonction arithmétique réelle (c'est-à-dire une application de N^* dans R), positive, on considère, pour tout t, l'intégrale de f par rapport à μ_t, c'est-à-dire le nombre*

$$\mu_t(f) = \int f\, d\mu_t = \sum_{k\geq 1} f(k)\mu_t(\{k\})$$

et l'on s'intéresse à la limite, suivant le filtre $\mathcal{F}$, de la fonction $t \to \mu_t(f)$. Lorsque cette limite existe, on l'appelle la densité de f (relativement à la famille (μ_t)). Si $f = I_A$ on retrouve la définition (a).

Voici quelques conséquences immédiates de cette définition.

Soit $(\mu_t)_{t\in T}$ une famille quelconque de mesures sur N^* vérifiant les hypothèses ci-dessus.

(i) Toute partie finie (cofinie) de N^* admet, par rapport à (μ_t), une densité nulle (égale à 1).

(ii) Si f est une fonction arithmétique qui tend vers une limite l lorsque $n \to \infty$, alors f admet, par rapport à (μ_t), la densité l.

2. - Les cas classiques

Dans la suite f désignera une fonction arithmétique positive.

Definition 2.1. Densité arithmétique: *La densité arithmétique de f est la limite suivante (si elle existe)*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(k).$$

C'est le cas particulier de la Définition 1.1 obtenu en prenant comme famille de mesures la *suite* $(\mu_n)_{n\geq 1}$ définie par

$$\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k$$

où ε_k désigne la mesure de Dirac sur N^* définie par la masse unité placée au point k. Par conséquent μ_n désigne la loi de probabilité uniforme sur l'intervalle $[1, n]$ des entiers. Le filtre $\mathcal{F}$ est naturellement le filtre constitué par les parties cofinies de N^*.

Définition 2.2. Densité logarithmique. *La densité logarithmique de f est la limite suivante (si elle existe),*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\operatorname{Log} n} \sum_{k=1}^{n} \frac{f(k)}{k}.$$

C'est la densité relative à la *suite* $(\mu_n)_{n\geq 1}$ de mesures définie par

$$\mu_n = \frac{1}{\operatorname{Log} n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon_k}{k}.$$

Définition 2.3. Densité de Scozzafava [9]. *La densité de Scozzafava de f est la limite suivante (si elle existe)*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\operatorname{Log} n} \sum_{k=1}^{n} f(k) \operatorname{Log}\left(1+\frac{1}{k}\right).$$

C'est la densité relative à la *suite* $(\mu_n)_{n\geq 1}$ de mesures définie par

$$\mu_n = \frac{1}{\operatorname{Log} n} \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Log}\left(1+\frac{1}{k}\right)\varepsilon_k.$$

Définition 2.4. Densité logarithmique itérée. *La densité logarithmique itérée de f est la limite suivante (si elle existe)*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\operatorname{Log}\operatorname{Log} n} \sum_{k=2}^{n} \frac{f(k)}{k \operatorname{Log} k}.$$

C'est la densité relative à la *suite* $(\mu_n)_{n\geq 1}$ de mesures définie par

$$\mu_n = \frac{1}{\operatorname{Log}\operatorname{Log} n} \sum_{k=2}^{n} \frac{\varepsilon_k}{k \operatorname{Log} k}.$$

Définition 2.5. Densité de Scozzafava de 2^e espèce. *La densité de Scozzafava de 2^e espèce de f est la limite suivante (si elle existe)*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\operatorname{Log}\operatorname{Log} n} \sum_{k=2}^{n} f(k) \operatorname{Log} \frac{\operatorname{Log}(k+1)}{\operatorname{Log} k}.$$

C'est la densité relative à la *suite* $(\mu_n)_{n\geq 1}$ de mesures définie par

$$\mu_n = \frac{1}{\operatorname{Log}\operatorname{Log} n} \sum_{k=2}^{n} \operatorname{Log}\left(\frac{\operatorname{Log}(k+1)}{\operatorname{Log} k}\right) \varepsilon_k.$$

Définition 2.6. Densité d'Abel. *La densité d'Abel de f est la limite suivante (si elle existe)*

$$\lim_{t\downarrow 0} t \sum_{k\geq 1} f(k) \exp[-t(k-1)].$$

Il s'agit encore d'un cas particulier de la Définition 1.1. Ici la famille $(\mu_t)_{t\in T}$ est définie par

$$T =]0, +\infty[\,, \qquad \mu_t = t \sum_{k\geq 1} \exp[-t(k-1)]\varepsilon_k.$$

Le filtre $\mathcal{F}$ est naturellement le filtre induit sur $]0, \infty[$ par le filtre des voisinages de 0 dans $\mathbf{R}$.

Remarque. Lorsque $t\downarrow 0$ on a $1-\exp[-t] \sim t$. La densité d'Abel de f peut donc également être définie comme la limite (si elle existe)

$$\lim_{t\downarrow 0} (1-\exp[-t]) \sum_{k\geq 1} f(k) \exp[-t(k-1)].$$

En posant $\exp[-t] = x$ on obtient la définition classique

$$\lim_{x\uparrow 1} (1-x) \sum_{k\geq 1} f(k) x^{k-1}.$$

Définition 2.7. Densité analytique ou de Dirichlet. *La densité analytique de f est la limite suivante (si elle existe)*

$$\lim_{t\downarrow 0} t \sum_{k\geq 1} f(k) k^{-(1+t)}.$$

C'est la densité relative à la famille $(\mu_t)_{t\in T}$ où

$$T =]0, +\infty[\,, \qquad \mu_t = t \sum_{k\geq 1} k^{-(1+t)} \varepsilon_k,$$

le filtre $\mathcal{F}$ étant le même que dans la Définition 2.6.

Remarque. Lorsque $t \downarrow 0$ on a $\zeta(1+t) \sim 1/t$, où ζ est la fonction dzêta de Riemann. La densité analytique de f peut donc également être définie comme la limite (si elle existe)

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{\zeta(1+t)} \sum_{k \geq 1} f(k) k^{-(1+t)}.$$

Définition 2.8. Densité analytique de deuxième espèce. *La densité analytique de deuxième espèce de f est la limite suivante (si elle existe)*

$$\lim_{t \downarrow 0} t \sum_{k \geq 2} \frac{1}{k(\operatorname{Log} k)^{1+t}}.$$

3. - Une méthode générale pour construire une densité: la μ-densité

Nous allons considérer un cas particulier du schéma introduit au paragraphe 1 pour la construction d'une densité. Ce cas particulier comprend, entre autres, le cas des densités arithmétique et logarithmique ainsi que celui des densités faisant l'objet des Définitions 2.3, 2.4, 2.5.

Soit μ une mesure positive sur $\mathbf{N}^*$, *de masse totale* $+\infty$, et associons-lui, pour tout n (assez grand pour que $\mu([1, n]) > 0$) la mesure de probabilité μ_n sur $\mathbf{N}^*$ définie par

$$\mu_n = \frac{1}{\mu([1, n])} \sum_{k=1}^{n} \mu(\{k\}) \varepsilon_k. \tag{1}$$

Lorsque $n \to \infty$ la suite (μ_n) converge vers 1 sur $\mathbf{N}^*$ et vers 0 sur toute partie de $\mathbf{N}^*$ réduite à un seul élément (donc aussi sur toute partie finie). Elle vérifie donc les propriétés requises dans le paragraphe 1 pour définir une densité; cette densité ne dépendant que de μ, nous l'appellerons *la μ-densité*. Il est clair que la notion de μ-densité n'est pas modifiée si, dans (1), on remplace $\mu([1, n])$ par un nombre réel $S_n > 0$, la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ vérifiant

$$0 < S_n \uparrow +\infty, \qquad S_n \sim \mu([1, n]) \qquad (n \to \infty).$$

Définition 3.1. *Donnons-nous*

(*a*) μ, *une mesure positive sur* $\mathbf{N}^*$, *de masse totale* $+\infty$.

(*b*) $(S_n)_{n \geq 1}$, *une suite de nombres réels strictement positifs vérifiant*

$$0 < S_n \uparrow +\infty, \qquad S_n \sim \mu([1, n]) \qquad (n \to \infty).$$

Considérons la suite $(\mu_n)_{n \geq 1}$ *de mesures bornées sur* $\mathbf{N}^*$, *définie par*

$$\mu_n = \frac{1}{S_n} \sum_{k=1}^{n} \mu(\{k\}) \varepsilon_k.$$

Soit $f\colon \mathbf{N}^* \to \mathbf{R}^+$ *une fonction arithmétique positive et posons*

$$\mu_n(f) = \int f\,d\mu_n = \frac{1}{S_n}\sum_{k=1}^{n} f(k)\mu(\{k\}).$$

On dit que f admet $l>0$ comme μ-densité si $\mu_n(f) \to l$ lorsque $n \to \infty$.

Nous avons déjà signalé que la notion de densité que nous venons de définir ne dépend pas du choix de la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ vérifiant (*b*); elle ne dépend que de la mesure μ; c'est la raison pour laquelle nous l'appelons *μ-densité*.

Nous nous proposons à présent de montrer que cette notion n'est pas modifiée si l'on remplace μ par une mesure ν telle que l'on ait (pour $n \to \infty$) $\mu(\{n\}) \sim c\nu(\{n\})$ où $c \in]0, +\infty[$. De façon précise nous allons démontrer le théorème suivant:

Théorème 3.2. *Soient μ, ν deux mesures positives sur* $\mathbf{N}^*$, *de masse totale* $+\infty$, *de support* $\mathbf{N}^*$. *Supposons que l'on ait (lorsque $n \to \infty$)*

$$\mu(\{n\}) \sim c\nu(\{n\})$$

pour une constante c convenable (avec $0 < c < +\infty$). Soit d'autre part $f\colon \mathbf{N}^* \to \mathbf{R}^+$ *une fonction arithmétique positive (non nécessairement bornée). Alors, $\forall l > 0$, les deux propriétés suivantes sont équivalentes:*

(*a*) *f admet l comme μ-densité.*

(*b*) *f admet l comme ν-densité.*

Démonstration. Nous allons commencer par démontrer le lemme suivant:

Lemme 3.3 (Cesaro). *Si* $\mu(\{n\}) \sim c\nu(\{n\})$ $(n \to \infty)$, *alors* $\mu([1, n]) \sim c\nu([1, n])$ $(n \to \infty)$.

Démonstration du Lemme. Quitte à remplacer ν par $c\nu$ nous supposerons $c = 1$. Par hypothèse $\forall \varepsilon > 0$ $\exists p(\varepsilon) \in \mathbf{N}^*$ tel que $\forall k > p$

$$(1-\varepsilon)\nu(\{k\}) < \mu(\{k\}) < (1+\varepsilon)\nu(\{k\}).$$

On a alors, $\forall n > p$

$$(1-\varepsilon)\nu([p, n]) < \mu([p, n]) < (1+\varepsilon)\nu([p, n]).$$

On a d'autre part (puisque les mesures μ, ν sont *non bornées*),

$$\mu([1, n]) \sim \mu([p, n]), \qquad \nu([1, n]) \sim \nu([p, n]).$$

Il en résulte

$$(1-\varepsilon) \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{\mu([1,n])}{\nu([1,n])} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{\mu([1,n])}{\nu([1,n])} \leq 1+\varepsilon$$

d'où le Lemme.

Revenons à la démonstration du Théorème 3.2. Quitte à remplacer ν par $c\nu$ nous supposerons $c = 1$. Considérons alors les deux quantités

$$\mu_n(f) = \frac{1}{\mu([1,n])} \sum_{k=1}^{n} f(k)\mu(\{k\}),$$
$$\nu_n(f) = \frac{1}{\nu([1,n])} \sum_{k=1}^{n} f(k)\nu(\{k\}).$$

Nous allons distinguer deux cas.

(*a*) Supposons

$$\sum_{k\geq 1} f(k)\mu(\{k\}) < +\infty \qquad \Big(\text{donc } \sum_{k\geq 1} f(k)\nu(\{k\}) < +\infty\Big).$$

Alors $\mu_n(f) \to 0$, $\nu_n(f) \to 0$ et f admet 0 à la fois comme μ-densité et comme ν-densité.

(*b*) Supposons

$$\sum_{k\geq 1} f(k)\mu(\{k\}) = +\infty \qquad \Big(\text{donc } \sum_{k\geq 1} f(k)\nu(\{k\}) = +\infty\Big).$$

Il résulte du lemme que

$$\frac{\mu_n(f)}{\nu_n(f)} \sim \frac{\sum_{k=1}^{n} f(k)\mu(\{k\})}{\sum_{k=1}^{n} f(k)\nu(\{k\})} = \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{\sum_{k=1}^{n} b_k}$$

où $a_k = f(k)\mu(\{k\})$, $b_k = f(k)\nu(\{k\})$. Or (a_k), (b_k) sont deux suites de nombres positifs vérifiant $\sum_{k\geq 1} a_k = \sum_{k\geq 1} b_k = +\infty$. En outre

$$\frac{a_k}{b_k} = \frac{f(k)\mu(\{k\})}{f(k)\nu(\{k\})} = \frac{\mu(\{k\})}{\nu(\{k\})} \to 1 \qquad (k \to \infty)$$

(pour k tel que $f(k) = 0$ on pose $0/0 = 1$).

Il résulte alors d'un théorème classique de Césaro que

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{\sum_{k=1}^{n} b_k} \to 1 \qquad \text{d'où } \frac{\mu_n(f)}{\nu_n(f)} \to 1 \qquad (n \to \infty)$$

d'où le Théorème.

Exemple. Soient $(a_k)_{k\geq 1}$, $(b_k)_{k\geq 1}$ deux suites convergentes de nombres réels positifs vérifiant

$$a_k \sim b_k \quad (k\to\infty), \qquad \sum_{k\geq 1} a_k = \sum_{k\geq 1} b_k = +\infty .$$

Le Théorème 3.2 s'applique aux deux mesures

$$\mu = \sum_{k\geq 1} b_k \varepsilon_k, \qquad \nu = \sum_{k\geq 1} \operatorname{Log}(1+a_k)\varepsilon_k .$$

En effet, posons

$$s = \lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} b_k, \qquad c = \begin{cases} (1/s)\operatorname{Log}(1+s) & \text{si } s>0, \\ 1 & \text{si } s=0. \end{cases}$$

Alors on a

$$\operatorname{Log}(1+a_k) \sim cb_k \qquad (k\to\infty).$$

Cet exemple nous permet d'établir les Corollaires suivants du Théorème 3.2.

Corollaire 3.4. *Soit f: $\mathbf{N}^* \to \mathbf{R}^+$ une fonction arithmétique à valeurs positives (non nécessairement bornée). Alors, $\forall l>0$, les deux propriétés suivantes sont équivalentes:*

(*a*) *f admet l comme densité logarithmique.*

(*b*) *f admet l comme densité de Scozzafava.*

Démonstration: Prenons $a_k = b_k = 1/k$ et observons que, pour $n\to\infty$, $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} b_k \sim \operatorname{Log} n$.

Corollaire 3.5. *Soit f: $\mathbf{N}^* \to \mathbf{R}^+$ une fonction arithmétique à valeurs positives (non nécessairement bornée). Alors, $\forall l>0$, les deux propriétés suivantes sont équivalentes:*

(*a*) *f admet l comme densité logarithmique itérée.*

(*b*) *f admet l comme densité de Scozzafava de deuxième espèce.*

Démonstration. Prenons $a_k = \operatorname{Log}(1+1/k)/\operatorname{Log} k$, $b_k = 1/(k\operatorname{Log} k)$ $(k\geq 2)$ et observons que, pour $n\to\infty$

$$\sum_{k=2}^{n} a_k \sim \sum_{k=2}^{n} b_k \sim \operatorname{Log}\operatorname{Log} n .$$

4. - Les notions de μ-densité analytique et exponentielle

Nous allons considérer un autre cas particulier du schéma introduit au paragraphe 1, qui comprend, cette fois-ci, le cas de la densité d'Abel et celui de la densité analytique. Soit toujours μ une mesure positive sur $\mathbf{N}^*$, *de masse totale* $+\infty$, et désignons par F sa fonction de répartition

$$F(n) = \mu([1, n[)\,, \qquad n > 1\,, \qquad F(1) = 0\,.$$

Nous supposerons dans ce paragraphe que la suite $(\mu(\{n\}))$ est bornée. Pour tout $t > 0$ associons à μ les deux mesures positives bornées μ_t, ν_t sur $\mathbf{N}^*$ définies par

$$\mu_t = t \sum_{k\geq 1} \mu(\{k\}) \exp[-tF(k)]\varepsilon_k\,, \tag{4.1}$$

$$\nu_t = \sum_{k\geq 1} (\exp[-tF(k)] - \exp[-tF(k+1)])\varepsilon_k\,. \tag{4.2}$$

La mesure ν_t est en outre une mesure de probabilité vérifiant

$$\nu_t([n, +\infty[) = \exp[-tF(n)]\,.$$

Nous remarquons ce qui suit:

1) Lorsque $t\downarrow 0$ chacune des familles $(\mu_t)_{t>0}$, $(\nu_t)_{t>0}$ converge vers 1 sur $\mathbf{N}^*$; ceci est évident pour la famille $(\nu_t)_{t>0}$ puisque, pour tout $t > 0$, ν_t est une mesure de probabilité sur $\mathbf{N}^*$; pour la famille $(\mu_t)_{t>0}$ ceci résulte du théorème taubérien 9.10 que l'on applique pour $a_k = \mu(\{k\})$, $s_k = F(k)$.

2) Lorsque $t\downarrow 0$ chacune des familles $(\mu_t)_{t>0}$, $(\nu_t)_{t>0}$ converge vers 0 sur toute partie de $\mathbf{N}^*$ réduite à un seul élément (donc aussi sur toute partie finie).

Chacune de ces familles vérifie donc les propriétés requises au paragraphe 1 pour définir une densité. Nous appellerons *μ-densité analytique* la densité associée à la suite $(\mu_t)_{t>0}$ et *μ-densité exponentielle* celle associée à la suite $(\nu_t)_{t>0}$.

Remarque 4.3. On est amené à remplacer dans les Définitions 4.1 et 4.2 la suite $(F(k))_{k\geq 1}$ par une suite *croissante* $(S_k)_{k\geq 1}$ de nombres réels strictement positifs vérifiant

$$S_{k+1} - S_k \sim \mu(\{k\})\,. \tag{4.4}$$

Il résulte alors du Lemme 3.3 de Césaro que

$$S_k \sim F(k)\uparrow +\infty \tag{4.5}$$

d'où puisque par hypothèse la suite $(\mu(\{k\}))$ est bornée

$$S_{k+1} = S_k + (S_{k+1} - S_k) \sim S_k . \tag{4.6}$$

DÉFINITION 4.7. *Donnons-nous*

1) *une mesure positive* μ *sur* $\mathbf{N}^*$, *de masse totale* $+\infty$, *et telle que la suite* $(\mu(\{k\}))$ *soit bornée;*

2) *une suite croissante* (S_k) *de nombres réels strictement positifs vérifiant:*

$$S_{k+1} - S_k \sim \mu(\{k\}) .$$

Pour tout nombre réel $t > 0$, *introduisons les deux mesures positives bornées* μ_t, ν_t *sur* $\mathbf{N}^*$ *définies par*

$$\mu_t = t \sum_{k \geq 1} \mu(\{k\}) \exp[-tS_k] \varepsilon_k , \tag{4.8}$$

$$\nu_t = \sum_{k \geq 1} (\exp[-tS_k] - \exp[-tS_{k+1}]) \varepsilon_k . \tag{4.9}$$

Soit $f \colon \mathbf{N}^* \to \mathbf{R}^+$ *une fonction arithmétique à valeurs positives.*

(*a*) f *admet* $l \geq 0$ *comme* μ*-densité analytique si*

$$\mu_t(f) = t \sum_{k \geq 1} f(k) \mu(\{k\}) \exp[-tS_k] \to l \qquad (t \downarrow 0) .$$

(*b*) f *admet* $l \geq 0$ *comme* μ*-densité exponentielle si*

$$\nu_t(f) = \sum_{k \geq 1} f(k) (\exp[-tS_k] - \exp[-tS_{k+1}]) \to l \qquad (t \downarrow 0) .$$

REMARQUE 4.10. Nous montrerons dans la suite (Corollaire 5.9) que les notions de μ-densité analytique et exponentielle ne dépendent pas du choix particulier de la suite croissante (S_k), pourvu qu'elle verifie (4.4). Ces notions ne dépendent donc que de la mesure μ et la terminologie de μ-densité est pleinement justifiée. Nous montrerons également dans la suite (Application 7.2) que ces notions sont équivalentes et nous énoncerons:

THÉORÈME 4.11. *Adoptons les notations et les hypothèses de la Définition* 4.7. *Alors, pour tout* $l \geq 0$, *les deux propriétés suivantes sont équivalentes:*

(*a*) f *admet* l *comme* μ*-densité analytique;*

(*b*) f *admet* l *comme* μ*-densité exponentielle.*

EXEMPLE 4.12. Prenons pour μ la mesure qui compte les points, $\mu(\{k\}) = 1$, et pour suite $(S_k)_{k \geq 1}$ la suite $S_k = F(k) = k - 1$.

On vérifie que la suite $(\mu\{k\})$ est bornée et que $S_{k+1}-S_k = 1 = \mu(\{k\})$.

Soit f: $\mathbf{N}^* \to \mathbf{R}^+$ une fonction arithmétique à valeurs positives. Alors, pour tout $l>0$, les deux propriétés suivantes sont équivalentes:

(*a*) $t\sum_{k\geq 1} f(k)\exp[-t(k-1)] \to l\ (t\downarrow 0)$;

(*b*) $\sum_{k\geq 1} f(k)(\exp[-t(k-1)]-\exp[-tk]) \to l\ (t\downarrow 0)$.

La propriété (*a*) exprime que l est *la densité d'Abel* de f; cette dernière apparaît donc comme la densité analytique associée à la mesure μ qui compte les points. La proprieté (*b*) exprime que l est la densité exponentielle associée à la même mesure.

Exemple 4.13. Prenons pour μ la mesure définie par $\mu(\{k\}) = 1/k$, et pour suite $(S_k)_{k\geq 1}$ la suite $S_k = \operatorname{Log} k \sim F(k) = 1+1/2+\ldots+1/(k-1)$.

On vérifie que la suite $(\mu\{k\})$ est bornée et que

$$S_{k+1}-S_k = \operatorname{Log}\left(1+\frac{1}{k}\right) \sim \frac{1}{k} = \mu(\{k\})\,.$$

Soit f: $\mathbf{N}^* \to \mathbf{R}^+$ une fonction arithmétique à valeurs positives. Alors, pour tout $l>0$, les deux propriétés suivantes sont équivalentes

(*a*) $t\sum_{k\geq 1} f(k)\frac{1}{k^{1+t}} \to l\ (t\downarrow 0)$.

(*b*) $\sum_{k\geq 1} f(k)\left(\frac{1}{k^t}-\frac{1}{(k+1)^t}\right) \to l\ (t\downarrow 0)$.

La propriété (*a*) exprime que l est la densité analytique (ou de Dirichlet) de f; cette dernière apparaît donc comme la densité analytique associée à la mesure $\mu(\{k\}) = 1/k$. La propriété (*b*) exprime que l est la densité exponentielle associée à la même mesure.

Exemple 4.14. Prenons pour μ la mesure définie par $\mu(\{k\}) = 1/(k\operatorname{Log} k)$, $k>2$ et pour suite (S_k) la suite

$$S_k = \operatorname{Log}\operatorname{Log} k \sim F(k) = \sum_{i=2}^{k}\frac{1}{i\operatorname{Log} i}\,.$$

On vérifie que la suite (S_k) est bornée et que

$$S_{k+1}-S_k = \operatorname{Log}\frac{\operatorname{Log}(k+1)}{\operatorname{Log} k} = \operatorname{Log}\frac{\operatorname{Log} k+\operatorname{Log}(1+1/k)}{\operatorname{Log} k} =$$

$$= \operatorname{Log}\left(1+\frac{\operatorname{Log}(1+1/k)}{\operatorname{Log} k}\right) \sim \frac{1}{k\operatorname{Log} k} = \mu(\{k\})\,.$$

Soit f: $\mathbf{N}^* \to \mathbf{R}^+$ une fonction arithmétique à valeurs positives. Alors, pour tout $l>0$, les deux propriétés suivantes sont équivalentes:

$$(a)\quad t\sum_{k\geq 2} f(k)\,\frac{1}{k(\operatorname{Log} k)^{1+t}} \to l \quad (t\downarrow 0);$$

$$(b)\quad \sum_{k\geq 2} f(k)\left(\frac{1}{(\operatorname{Log} k)^t}-\frac{1}{(\operatorname{Log}(k+1))^t}\right) \to l \quad (t\downarrow 0).$$

La propriété (a) exprime que l est la densité analytique (ou de Dirichlet) de deuxième espèce de f; cette dernière apparaît donc comme la densité analytique associée à la mesure $\mu(\{k\}) = 1/(k \operatorname{Log} k)$. La propriété (b) exprime que l est la densité exponentielle associée à la même mesure.

5. - Comparaison des notions de μ-densité arithmétique, analytique et exponentielle

Soient μ une mesure positive sur $\mathbf{N}^*$, de masse totale $+\infty$, et $(S_n)_{n\geq 1}$ une suite croissante de nombres réels strictement positifs vérifiant

$$0<S_n\uparrow+\infty\,,\qquad \mu([1,n])\sim S_n\,.$$

Nous avons vu aux paragraphes 3 et 4 que nous pouvions associer à μ les deux familles de mesures positives bornées $(\mu_n)_{n\geq 1}$, $(\mu_t)_{t>0}$ sur $\mathbf{N}^*$ définies par

$$\mu_n = \frac{1}{S_n}\sum_{k=1}^{n}\mu(\{k\})\,\varepsilon_k\,, \tag{5.1}$$

$$\mu_t = t\sum_{k\geq 1}\mu(\{k\})\exp[-tS_k]\,\varepsilon_k\,. \tag{5.2}$$

Ces deux familles sont à la base des notions de μ-densité arithmétique et de μ-densité analytique. Nous nous proposons dans ce paragraphe de comparer ces deux notions.

Théorème 5.3. *Soient μ une mesure positive sur $\mathbf{N}^*$, de masse totale $+\infty$, et $(S_n)_{n\geq 1}$ une suite croissante de nombres réels strictement positifs vérifiant*

$$0<S_n\uparrow+\infty\,,\qquad \mu([1,n])\sim S_n\sim S_{n-1}\,. \tag{5.4}$$

Soit d'autre part f une fonction arithmétique à valeurs positives. Alors, pour tout nombre réel $l>0$, les deux propriétés suivantes sont équivalentes:

$$(a)\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{S_n}\sum_{k=1}^{n} f(k)\mu(\{k\}) = l\,, \tag{5.5}$$

$$(b)\quad \lim_{t\downarrow 0} t\sum_{k\geq 1} f(k)\mu(\{k\})\exp[-tS_k] = l\,. \tag{5.6}$$

En d'autres termes, dans les hypothèses indiquées, les notions de μ-densité arithmétique et de μ-densité analytique coïncident pour la fonction f.

Démonstration. Il suffit d'appliquer le *théorème taubérien* 9.10 aux deux suites de termes généraux

$$a_n = f(n)\mu(\{n\})\,, \qquad s_n = S_n\,.$$

À partir des Théorèmes 4.11 et 5.3 on obtient le théorème général de comparaison des notions de μ-densité arithmétique, analytique et exponentielle.

Théorème 5.7. *Donnons-nous*

μ: *une mesure positive sur* $\mathbf{N}^*$, *de masse totale* $+\infty$, *telle que la suite* $\mu(\{n\})$ *soit bornée;*

$(S_k)_{k\geq 1}$: *une suite croissante de nombres réels strictement positifs vérifiant*

$$S_{k+1} - S_k \sim \mu(\{k\})\,; \tag{5.8}$$

f: *une application* $\mathbf{N}^* \to \mathbf{R}^+$, *à valeurs positives.*

Alors, pour tout $l \geq 0$, les trois propriétés suivantes sont équivalentes:

(1) *f admet l comme μ-densité arithmétique*

$$\mu_n(f) = \frac{1}{S_n}\sum_{k=1}^{n} f(k)\mu(\{k\}) \to l \qquad (n\to\infty)\,;$$

(2) *f admet l comme μ-densité analytique*

$$\mu_t(f) = t\sum_{k\geq 1} f(k)\mu(\{k\})\exp[-tS_k] \to l \qquad (t\downarrow 0)\,;$$

(3) *f admet l comme μ-densité exponentielle*

$$\nu_t(f) = \sum_{k\geq 1} f(k)\big(\exp[-tS_k] - \exp[-tS_{k+1}]\big) \to l \qquad (t\downarrow 0)\,.$$

Démonstration. (2) $\Leftrightarrow$ (3): c'est le Théorème 4.11.

(1) $\Leftrightarrow$ (2): c'est le Théorème 5.3; les hypothèses de ce théorème sont bien vérifiées puisque la condition (5.8) implique les conditions (5.4).

Corollaire 5.9. *À la remarque 4.10 nous avons signalé sans démonstration que les notions de μ-densité analytique et exponentielle ne dépendaient pas du choix particulier de la suite croissante $(S_k)_{k\geq 1}$, pourvu qu'elle vérifie* (5.8). *Or cette propriété est une conséquence directe du Théorème* 5.7. *En effet, d'après ce théorème, les notions* *de μ-densité analytique et exponentielle sont équivalentes à la notion de μ-densité arithmétique; or cette dernière notion est, de façon évidente, indépendante du choix de la suite $(S_k)_{k\geq 1}$ vérifiant* (5.8) $\big($*donc aussi* $S_k \sim \mu([1, k])\big)$.

Exemple 5.10. Prenons $\mu(\{n\}) = 1$, $S_n = n - 1 \sim n$.

Alors les notions de μ-densité arithmétique, analytique et exponentielle coïncident. En d'autres termes, pour toute application $f\colon \mathbf{N}^* \to \mathbf{R}^+$, à valeurs positives, et tout nombre positif $l>0$, les trois propriétés suivantes sont équivalentes:

$$(1)\quad \mu_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(k) \to l \quad (n \to \infty)$$

i.e. f admet l comme densité arithmétique;

$$(2)\quad \mu_t(f) = t \sum_{k\geq 1} f(k) \exp[-t(k-1)] \to l \quad (t \downarrow 0)$$

i.e. f admet l comme densité d'Abel;

$$(3)\quad \nu_t(f) = \sum_{k\geq 1} f(k)(\exp[-t(k-1)] - \exp[-tk]) \to l \quad (t \downarrow 0).$$

Exemple 5.11: Prenons $\mu(\{n\}) = 1/n$, $S_n = \operatorname{Log} n \sim \operatorname{Log}(n+1)$.

Alors les notions de μ-densités arithmétique, analytique et exponentielle coïncident. En d'autres terms, pour toute application $f\colon \mathbf{N}^* \to \mathbf{R}^+$, à valeurs positives, et tout nombre positif $l>0$ les trois propriétés suivantes sont équivalentes:

$$(1)\quad \mu_n(f) = \frac{1}{\operatorname{Log} n} \sum_{k=1}^{n} \frac{f(k)}{k} \to l \quad (n \to \infty)$$

i.e. f admet l comme *densité logarithmique*;

$$(2)\quad \mu_t(f) = t \sum_{k\geq 1} \frac{f(k)}{k^{1+t}} \to l \quad (t \downarrow 0)$$

i.e. f admet l comme *densité analytique* (*de Dirichlet*);

$$(3)\quad \nu_t(f) = \sum_{k\geq 1} f(k)\left(\frac{1}{k^t} - \frac{1}{(k+1)^t}\right) \to l \quad (t \downarrow 0).$$

Remarque. En vertu du Corollaire 3.4 chacune de ces propriétés est encore équivalente à la suivante:

(4) f admet l comme *densité de Scozzafava* au sens de la Définition 2.3.

Exemple 5.12. Prenons

$$\mu(\{n\}) = \frac{1}{n \operatorname{Log} n}, \qquad S_n = \operatorname{Log}\operatorname{Log} n \sim \operatorname{Log}\operatorname{Log}(n+1).$$

Alors les trois notions de μ-densités coïncident. En d'autre termes, pour toute application $f\colon \mathbf{N}^* \to \mathbf{R}^+$ à valeurs positives et tout nombre réel $l > 0$, les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

$$(1)\quad \mu_n(f) = \frac{1}{\operatorname{Log}\operatorname{Log} n} \sum_{k=2}^{n} \frac{f(k)}{k \operatorname{Log} k} \to l \quad (n \to \infty)$$

i.e. f admet l comme densité logarithmique itérée ;

$$(2)\quad \mu_t(f) = t \sum_{k \geq 2} \frac{f(k)}{k \operatorname{Log} k^{1+t}} \to l \quad (t \downarrow 0)$$

i.e. f admet l comme densité analytique (de Dirichlet) de deuxième espèce ;

$$(3)\quad \nu_t(f) = \sum_{k \geq 2} f(k) \left(\frac{1}{(\operatorname{Log} k)^t} - \frac{1}{(\operatorname{Log}(k+1))^t} \right) \to l \quad (t \downarrow 0).$$

Remarque. En vertu du Corollaire 3.5 chacune de ces propriétés est encore équivalente à la suivante :

(4) f admet l comme densité de Scozzafava de deuxième espèce au sens de la Définition 2.5.

Nous allons à présent étudier le cas particulier du Théorème 5.7 où la fonction f est la fonction indicatrice d'une partie A de $\mathbf{N}^*$. On dira que A admet l comme densité (en un sens quelconque) si sa fonction indicatrice I_A admet l comme densité (en ce sens).

Théorème 5.13. *Donnons-nous une mesure positive μ sur $\mathbf{N}^*$ et une suite croissante $(S_k)_{k \geq 1}$ vérifiant les hypothèses du Théorème 5.7. Soit d'autre part A une partie de $\mathbf{N}^*$, supposée ni finie ni cofinie, qui admet donc une représentation de la forme*

$$A = \bigcup_{n \geq 1} [p_n, q_n[$$

où (p_n), (q_n) sont deux suites d'entiers > 0 vérifiant

$$\forall n \geq 1 \quad p_n < q_n < p_{n+1}.$$

Alors, pour tout $l \in [0, 1]$ les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) *A admet l comme μ-densité arithmétique*

$$\mu_n(I_A) = \frac{1}{S_n} \sum_{k \in A \cap [1, n]} \mu(\{k\}) \to l \qquad (n \to \infty) ;$$

(2) *A admet l comme μ-densité analytique*

$$\mu_t(I_A) = t \sum_{k \in A} \mu(\{k\}) \exp[-t S_k] \to l \qquad (t \downarrow 0) ;$$

(3) *$\mathcal{A}$ admet l comme μ-densité exponentielle*

$$\nu_t(I_{\mathcal{A}}) = \sum_{k\geq 1} (\exp[-tS_{p_k}] - \exp[-tS_{q_k}]) \to l \qquad (t\downarrow 0)\,.$$

Parmi ces trois propriétés équivalentes c'est la troisième qui peut être aisée à vérifier dans les applications, et qui peut ainsi servir de critère d'existence d'une μ-densité arithmétique, analytique pour $\mathcal{A}$.

Ainsi, si l'on prend $\mu(\{n\}) = 1/n$, $S_n = \operatorname{Log} n$, cette troisième propriété s'écrit

$$(5.14) \qquad \sum_{k\geq 1}\left(\frac{1}{(p_k)^t} - \frac{1}{(q_k)^t}\right) \to l \qquad (t\downarrow 0)\,.$$

Elle a été utilisée par A. Fuchs et Ph. Nanopoulos [4, Théor. 3.1] comme critère d'existence de la densité analytique (de Dirichlet) de $\mathcal{A}$.

6. - Un théorème de prolongement

Nous nous proposons dans ce paragraphe de décrire un procédé qui, à toute mesure μ (positive, de masse totale $+\infty$) associe une autre mesure ν (également positive et de mesure totale $+\infty$), de telle façon que la ν-densité (arithmétique) prolonge la μ-densité (arithmétique).

De façon précise nous allons démontrer le Théorème suivant:

Théorème 6.1. *Soit μ une mesure positive sur $\mathbf{N}^*$, de masse totale $+\infty$, et F sa fonction de répartition*

$$(6.2) \qquad \mu([1,n]) = F(n)\,, \qquad n\in\mathbf{N}^*\,.$$

Etant donnée une application croissante $h\colon \mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$, telle que $h(x)\uparrow+\infty$ lorsque $x\to\infty$, désignons par ν la mesure positive sur $\mathbf{N}^*$, de masse totale $+\infty$, définie par sa fonction de répartition

$$(6.3) \qquad \nu([1,n]) = h(F(n))\,, \qquad n\in\mathbf{N}^*\,.$$

Supposons que, pour toute suite croissante $(x_n)_{n\geq 1}$ de nombres réels positifs vérifiant les conditions

$$(6.4) \qquad x_n \sim F(n)\,, \qquad (x_n = x_{n+1}) \Leftrightarrow (F(n) = F(n+1))$$

on ait

$$(6.5) \qquad h(x_n)\sim h(F(n))\,,\quad \frac{h(x_{n+1})-h(x_n)}{x_{n+1}-x_n} \sim \frac{h(F(n+1))-h(F(n))}{F(n+1)-F(n)}$$

(où chaque rapport de la forme 0/0 est considéré comme égal à 1).

Dans ces conditions, pour toute fonction arithmétique bornée f la relation

(6.6)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\mu([1, n])} \sum_{k=1}^{n} f(k)\mu(\{k\}) \to l$$

implique la relation analogue

(6.7)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\nu([1, n])} \sum_{k=1}^{n} f(k)\nu(\{k\}) \to l .$$

En d'autre termes la ν-densité (arithmétique) prolonge la μ-densité (arithmétique).

Démonstration. Quitte à remplacer f par une fonction du type $g \circ f$, où g est une application linéaire affine de R dans R, on pourra supposer $l = 1$ et $\inf_{n \geq 1} f(n) > 0$.

Posons
$$x_n = \int_{[1, n]} f d\mu .$$

La propriété (6.6) peut alors s'écrire $x_n \sim F(n)$, de sorte que la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ vérifie la première des conditions (6.4). La deuxième de ces conditions est également remplie puisque l'on a
$$x_{n+1} - x_n = f(n+1)[F(n+1) - F(n)] , \qquad f(n+1) > 0 .$$

Les conditions (6.4) étant ainsi vérifiées, l'hypothèse du Théorème entraîne que les conditions (6.5) le sont également. Or la dernière de ces conditions peut s'écrire
$$f(n+1)[b(F(n+1)) - b(F(n))] \sim b(x_{n+1}) - b(x_n) .$$

Il en résulte, en vertu du Lemme 3.3 de Césaro, que
$$\int_{[1, n]} f d\nu \sim b(x_n)$$

donc aussi, en vertu de la première des conditions (6.5),
$$\int_{[1, n]} f d\nu \sim b(F(n)) = \nu([1, n]) .$$

La relation (6.7) est donc vérifiée (avec $l = 1$), ce qui achève la démonstration.

Exemple 6.8. Soit μ une mesure positive sur N*, de masse totale $+\infty$, telle que l'on ait (avec la notation (6.2))
$$F(n) \sim F(n+1) .$$

On voit alors que l'application $b\colon \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ définie par

$$b(x) = \operatorname{Log}(x+1), \qquad x > 0$$

vérifie les conditions du Théorème précédent.

Cas particulier 1. Prenons pour mesure μ celle qui compte les points

$$\mu(\{n\}) = 1, \qquad F(n) = n.$$

La notion de μ-densité se réduit alors à celle de densité arithmétique au sens de la Définition 2.1, et la mesure ν caractérisée par (6.3) est donnée par

$$\nu(\{n\}) = \operatorname{Log}\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

La notion de ν-densité est la densité de Scozzafava au sens de la Définition 2.3. Il résulte alors du Théorème 6.1 que, pour toute fonction arithmétique bornée, la densité de Scozzafava *prolonge* la densité arithmétique.

Or on a vu (Exemple 5.11) que, pour toute fonction arithmétique positive, la densité de Scozzafava est équivalente à la densité analytique au sens de la Définition 2.7. On retrouve aussi le résultat bien connu selon lequel, pour une fonction arithmétique bornée, *la densité analytique prolonge la densité arithmétique.*

Cas particulier 2. Prenons pour mesure μ la masse définie par

$$\mu(\{n\}) = \operatorname{Log}\left(1 + \frac{1}{n}\right), \qquad F(n) = \operatorname{Log}(n+1)$$

de sorte que la μ-densité est celle de Scozzafava au sens de la Définition 2.3. La mesure ν caractérisée par (6.3) est donnée par

$$\nu(\{n\}) = \operatorname{Log}\frac{1 + \operatorname{Log}(n+1)}{1 + \operatorname{Log} n} \sim \operatorname{Log}\frac{\operatorname{Log}(n+1)}{\operatorname{Log} n}.$$

La notion de ν-densité est la densité de Scozzafava des 2^e espèce au sens de la Définition 2.5. Il résulte alors du Théorème 6.1 que, pour toute fonction arithmétique bornée, cette densité prolonge la densité de Scozzafava.

Or on a vu (Exemple 5.12) que, pour toute fonction arithmétique positive, la densité de Scozzafava de 2^e espèce est équivalente à la densité analytique de 2^e espèce au sens de la Définition 2.8. Il en résulte que, pour toute fonction arithmétique bornée, *la densité analytique de 2^e espèce prolonge la densité analytique (de 1re espèce).*

Il est clair que l'on peut itérer ce procédé un nombre arbitraire (fini) de fois. A chaque étape on trouve un prolongement de la densité définie à l'étape précédente.

Signalons enfin un corollaire du Théorème 6.1, dont la démonstration est immédiate.

Corollaire 6.9. *Soit μ une mesure positive sur* $\mathbf{N}^*$, *de masse totale* $+\infty$, *et b une application croissante de* $\mathbf{R}^+$ *dans* $\mathbf{R}^+$ *vérifiant les hypothèses du Théorème* 6.1. *Supposons en outre vérifiée l'hypothèse suivante:*

Pour toute suite croissante $(y_n)_{n\geq 1}$ *de nombres positifs vérifiant les conditions*

$$y_n \sim b(F(n))\,, \qquad (y_n = y_{n+1}) \Leftrightarrow \big(b(F(n)) = b(F(n+1))\big)$$

on a

$$b^{-1}(y_n) \sim F(n)\,, \qquad \frac{b^{-1}(y_{n+1}) - b^{-1}(y_n)}{y_{n+1} - y_n} \sim \frac{F(n+1) - F(n)}{b(F(n+1)) - b(F(n))}\,.$$

Alors (avec les notations du Théorème 6.1), *les notions de μ-densité et de ν-densité sont équivalentes.*

Exemple 6.10. Soit μ une mesure positive sur $\mathbf{N}^*$, de masse totale $+\infty$, telle que l'on ait $F(n) \sim F(n+1)$. Considérons l'application $b\colon \mathbf{R}^* \to \mathbf{R}^+$ définie par

$$b(x) = x^\alpha \qquad (\alpha > 0,\ x > 0)\,.$$

On voit que cette application vérifie les conditions du Corollaire.

Cas particulier 6.11. Prenons pour mesure μ celle qui compte les points

$$\mu(\{n\}) = 1\,, \qquad F(n) = n\,.$$

La densité associée à μ est la densité arithmétique au sens de la Définition 2.1. La mesure ν caractérisée par (6.3) est donnée par

$$\nu(\{n\}) = n^\alpha - (n-1)^\alpha\,.$$

Il résulte alors du Corollaire 6.9 que, pour toute fonction arithmétique bornée, les notions de μ-densité et de ν-densité sont équivalentes.

7. - Un critère général de comparaison

Nous allons démontrer dans ce paragraphe un théorème général de comparaison de densités qui s'avèrera utile dans les applications.

Théorème 7.1. *Soient* $(\mu_t)_{t\in T}$, $(\nu_t)_{t\in T}$ *deux familles de mesures positives bornées sur* $\mathbf{N}^*$, *admettant un même ensemble T comme ensemble d'indices. Soit* $\mathfrak{F}$ *un filtre* *sur T, et supposons que les deux conditions suivantes soient vérifiées:*

(*a*) *chacune des deux familles* (μ_t), (ν_t) *converge vers* 0, *suivant le filtre* $\mathcal{F}$, *sur toute partie de* $\mathbf{N}^*$ *réduite à un seul élément;*

(*b*) *on a* (*suivant le produit du filtre* $\mathcal{F}$ *et du filtre constitué par les parties cofinies de* $\mathbf{N}^*$)

$$\mu_t(\{k\}) \sim \nu_t(\{k\}) .$$

Dans ces conditions, pour toute fonction arithmétique positive f, *les deux fonctions* $t \to \mu_t(f)$, $t \to \nu_t(f)$ *admettent* (*suivant le filtre* $\mathcal{F}$) *les mêmes valeurs d'adhérence dans* $\overline{\mathbf{R}}^+$.

Démonstration. Soit l une valeur d'adhérence pour la fonction $t \to \mu_t(f)$. Il existe un ultrafiltre $\mathcal{U}$ sur T, plus fin que $\mathcal{F}$, tel que l'on ait

$$l = \lim_{t, \mathcal{U}} \mu_t(f) .$$

Posons

$$l' = \lim_{t, \mathcal{U}} \nu_t(f)$$

et montrons que l' coïncide avec l (ce qui prouvera l'assertion du théorème).

Etant donné un nombre réel $\varepsilon > 0$, on peut trouver, d'après l'hypothèse (*b*), un élément F de $\mathcal{F}$, et un entier n, tels que l'on ait:

$$\mu_t(\{k\}) < (1+\varepsilon)\, \nu_t(\{k\}) \qquad \text{pour } t \in F \text{ et } k > n .$$

On a alors

$$\int_{]n, +\infty[} f\, d\mu_t < (1+\varepsilon) \int_{]n, +\infty[} f\, d\nu_t \qquad \text{pour } t \in F .$$

Si, dans cette relation, on passe à la limite par rapport à t, suivant l'ultrafiltre $\mathcal{U}$, on trouve (en tenant compte de l'hypothèse (*a*)), $l < (1+\varepsilon) l'$, d'où $l < l'$ puisque $\varepsilon > 0$ est arbitraire. De façon analogue on démontre l'inégalité opposée.

Application 7.2. Comme cas particulier du Théorème 7.1 nous allons démontrer le Théorème 4.11 établissant l'équivalence des μ-densités analytique et exponentielle. Soit μ une mesure positive sur $\mathbf{N}^*$, de masse totale $+\infty$, et telle que la suite $\mu(\{k\})$ soit *bornée*. Soit d'autre part (S_k) une suite croissante de nombres réels strictement positifs vérifiant $S_{k+1} - S_k \sim \mu(\{k\})$.

Pour tout $t > 0$ on introduit les deux mesures positives bornées sur $\mathbf{N}^*$:

$$\mu_t = t \sum_{k \geq 1} \mu(\{k\}) \exp[-tS_k]\, \varepsilon_k ,$$

$$\nu_t = \sum_{k \geq 1} (\exp[-tS_k] - \exp[-tS_{k+1}])\, \varepsilon_k .$$

Il est facile de voir que l'on a

$$\mu_t(\{k\}) \sim \nu_t(\{k\})$$

lorsque t tend vers 0 et k vers l'infini, c'est-à-dire lorsque $(t, k) \to (0, +\infty)$ suivant le filtre induit sur $]0, +\infty[\times \mathbf{N}^*$ par les voisinages du point $(0, +\infty)$ dans $\overline{\mathbf{R}}^2$. En effet, suivant ce filtre, la fonction

$$(t, k) \mapsto t(S_{k+1} - S_k)$$

converge vers 0, de sorte que l'on a, lorsque $(t, k) \to (0, +\infty)$:

$$\nu_t(\{k\}) = (1 - \exp[-t(S_{k+1} - S_k)]) \exp[-tS_k] \sim$$
$$\sim t(S_{k+1} - S_k) \exp[-tS_k] \sim t\mu(\{k\}) \exp[-tS_k] = \mu_t(\{k\}).$$

Il résulte alors du Théorème 7.1 que, pour toute fonction arithmétique positive f et tout nombre réel $l > 0$ les deux propriétés

$$\mu_t(f) \to l, \qquad \nu_t(f) \to l \qquad \text{(lorsque } t \downarrow 0\text{)}$$

sont équivalentes; c'est le Théorème 4.11.

Application 7.3. Voici un second cas particulier du Théorème 7.1. Soit $\mu = \sum_{k \geq 1} a_k \varepsilon_k$ une mesure positive sur $\mathbf{N}^*$, de masse totale $+\infty$, telle que la suite $(a_k)_{k \geq 1}$ soit convergente. Posons

$$s_n = \mu([1, n]) = \sum_{k=1}^{n} a_k \qquad \uparrow + \infty,$$

$$a = \lim_{k \to \infty} a_k.$$

Associons à μ les deux familles $(\mu_t)_{t>0}$, $(\nu_t)_{t>0}$ de mesure bornées sur $\mathbf{N}^*$, définies de la manière suivante:

$$\mu_t(\{k\}) = ta_{k+1} \exp[-ts_k],$$
$$\nu_t(\{k\}) = \exp[-a] t (\exp[s_{k+1}] - \exp[s_k]) \sum_{n \geq k} a_{n+1} \exp[-(1+t)s_n].$$

On a alors la Proposition suivante:

Proposition 7.4. *Dans les hypothèses précédentes, on a, lorsque le couple (t, k) tend vers $(0, +\infty)$:*

$$\mu_t(\{k\}) \sim \nu_t(\{k\}).$$

DÉMONSTRATION. Posons

$$A = \begin{cases} \dfrac{\exp[a]-1}{a} & \text{si } a > 0\,, \\ 1 & \text{si } a = 0\,. \end{cases}$$

On a alors, lorsque k tend vers l'infini,

$$\exp[s_{k+1}] - \exp[s_k] = \exp[s_k](\exp[a_{k+1}] - 1) \sim \exp[s_k] A a_{k+1}\,.$$

Il suffit donc de vérifier que, lorsque le couple (t, k) tend vers $(0, +\infty)$, on a

$$\exp[-ts_k] \sim \exp[-a] A \exp[s_k] \sum_{n \geqslant k} a_{n+1} \exp[-(1+t)s_n]$$

ou, ce qui revient au même,

$$\exp[-(1+t)s_k] \sim \exp[-a] A \sum_{n \geqslant k} a_{n+1} \exp[-(1+t)s_n]\,.$$

Posons $\exp[-a]A = c$, $1 + t = u$. Il s'agit alors de prouver que, lorsque le couple (u, k) tend vers $(1, +\infty)$, on a

$$\exp[-us_k] \sim c \sum_{n \geqslant k} a_{n+1} \exp[-us_n]\,. \tag{7.5}$$

Remarquons, à cet effet, que l'on a, toujours lorsque $(u, k) \to (1, +\infty)$

$$\exp[-us_n] - \exp[-us_{n+1}] \sim \exp[-us_{n+1}] A a_{n+1} =$$

$$= \exp[-ua_{n+1}] A a_{n+1} \exp[-us_n] \sim c a_{n+1} \exp[-us_n]\,.$$

Par conséquent, étant donné $\varepsilon > 0$, on peut trouver un entier p et un élément δ de $]0, 1[$, tels que, pour tout entier $n > p$ et tout élément u de $]1-\delta, 1+\delta[$, on ait

$$(c - \varepsilon) a_{n+1} \exp[-us_n] < \exp[-us_n] - \exp[-us_{n+1}] < (c + \varepsilon) a_{n+1} \exp[-us_n]\,.$$

On a alors, pour tout élément u de $]1-\delta, +1+\delta[$ et tout entier $k > p$

$$(c - \varepsilon) \sum_{n \geqslant k} a_{n+1} \exp[-us_n] < \exp[-us_k] < (c + \varepsilon) \sum_{n \geqslant k} a_{n+1} \exp[-us_n]$$

ce qui prouve la relation (7.5). La Proposition 7.4 est ainsi démontrée.

Remarquons maintenant que, pour toute fonction arithmétique positive f, on a

$$\nu_t(f) = \exp[-a]\, t \sum_{k \geqslant 1} f(k)(\exp[s_{k+1}] - \exp[s_k]) \sum_{n \geqslant k} a_{n+1} \exp[-(1+t)s_n] =$$

$$= \exp[-a]\, t \sum_{n \geqslant 1} (a_{n+1} \exp[-ts_n]) \exp[-s_n] \sum_{k=1}^{n} f(k)(\exp[s_{k+1}] - \exp[s_k])$$

c'est-à-dire

$$\nu_t(f) = \mu_t(g)$$

où g désigne la fonction arithmétique définie par

$$g(n) = \exp\left[-(s_n + a)\right] \sum_{k=1}^{n} f(k)(\exp[s_{k+1}] - \exp[s_k]) .$$

Il résulte alors de la Proposition 7.4 et du Théorème 7.1 que, pour tout $l > 0$, les trois propriétés suivantes sont équivalentes:

(*a*) $\lim\limits_{t \downarrow 0} \mu_t(g) = l$;

(*b*) $\lim\limits_{t \downarrow 0} \nu_t(f) = l$;

(*c*) $\lim\limits_{t \downarrow 0} \mu_t(f) = l$.

Considérons la fonction arithmétique Hf définie par

$$Hf(n) = \exp\left[-s_{n+1}\right] \sum_{k=1}^{n} f(k)(\exp[s_{k+1}] - \exp[s_k]) .$$

La condition (*a*) est évidemment remplie dans le cas où l'on a

(*d*) $\lim\limits_{n \to \infty} Hf(n) = l$

cette dernière condition pouvant être interprétée en disant que f admet l comme densité arithmétique associée à la mesure positive

$$\nu = \sum_{k \geq 1} (\exp[s_{k+1}] - \exp[s_k])\, \varepsilon_k . \tag{7.6}$$

On obtient finalement la Proposition suivante:

Proposition 7.7. *Soit $\mu = \sum_{k \geq 1} a_k \varepsilon_k$ une mesure positive sur $\mathbf{N}^*$, de masse totale $+\infty$, telle que la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ soit convergente. Posons $s_n = \mu([1, n]) = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Associons à μ la mesure positive ν sur $\mathbf{N}^*$ définie par*

$$\nu = \sum_{k \geq 1} (\exp[s_{k+1}] - \exp[s_k])\, \varepsilon_k .$$

Alors, pour toute fonction arithmétique positive f, la densité analytique associée à μ est un prolongement de la densité arithmétique associée à ν.

Exemple 7.8. Prenons pour μ la mesure définie par $\mu(\{n\}) = a_n$ avec

$$a_1 = 0\,, \quad a_{n+1} = \mathrm{Log}\left(1 + \frac{1}{n}\right), \quad n \geq 1\,, \quad s_n = \mu([1, n]) = \mathrm{Log}\, n .$$

La mesure ν associée est définie par $\nu(\{n\}) = 1$ et l'on a donc, pour *toute fonction arithmétique positive* f:

$$Hf(n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(k),$$

$$\mu_t(\{k\}) = t \operatorname{Log}\left(1 + \frac{1}{k}\right) \frac{1}{k^t} \sim t k^{-(1+t)}.$$

Il résulte alors de la Proposition 7.7 que la densité *analytique* (ou de Dirichlet) est un prolongement de la densité *arithmétique* usuelle.

Remarque. On peut donner à la Proposition 7.7 une forme plus frappante. Il résulte des hypothèses faites et du Théorème 5.7 que les notions de μ-densité arithmétique et analytique sont équivalentes. La Proposition 7.7 peut alors être exprimée comme suit:

Théorème 7.9. *Soit* $(s_n)_{n \geq 1}$ *une suite strictement croissante vérifiant*

1) $0 < s_n \uparrow + \infty$,
2) *la suite* $(s_n - s_{n-1})$ *est convergente.*

Pour toute fonction arithmétique positive f *et tout* $l > 0$ *considérons les deux propriétés*

(a) $\mu_n(f) = \frac{1}{s_n} \sum_{k=1}^{n} f(k)(s_k - s_{k-1}) \to l \ (n \to \infty)$,

(b) $\nu_n(f) = \frac{1}{\exp[s_n]} \sum_{k=1}^{n} f(k)(\exp[s_k] - \exp[s_{k-1}]) \to l \ (n \to \infty)$.

Alors (b) *implique* (a).

En faisant $s_n = \operatorname{Log} n$, puis $s_n = \operatorname{Log} \operatorname{Log} n$, et en tenant compte des Corollaires 3.4 et 3.5 on trouve que, pour toute fonction arithmétique *positive*

1) la densité logarithmique est un prolongement de la densité arithmétique;
2) la densité logarithmique itérée est un prolongement de la densité logarithmique;

puis, en tenant compte des équivalences du paragraphe 5

1) la densité analytique est un prolongement de la densité d'Abel;
2) la densité analytique de 2e espèce est un prolongement de la densité analitique de 1re espèce.

8. - Quelques critères d'existence d'une densité pour des parties de $\mathbf{N}^*$

Dans ce paragraphe nous désignerons par A une partie de $\mathbf{N}^*$, supposée ni finie ni cofinie, qui peut donc être représentée par la réunion disjointe de ses « composantes connexes », c'est-à-dire par

$$A = \bigcup_{n\geq 1} [p_n, q_n[$$

où $(p_n)_{n\geq 1}$, $(q_n)_{n\geq 1}$ désignent deux suites d'entiers strictement positifs vérifiant

$$\forall n \geq 1 \quad p_n < q_n < p_{n+1}$$

et où $[p_n, q_n[= \{k \in \mathbf{N}^* : p_n \leq k < q_n\}$ désigne la n^e « composante connexe » de A.

On désignera d'autre part par μ une mesure positive sur $(\mathbf{N}^*, \mathfrak{T}(\mathbf{N}^*))$, de masse totale $+\infty$, de support $\mathbf{N}^*$, et de fonction de répartition F

$$F(n) = \mu([1, n[) , \quad n > 1 ; \qquad F(1) = 0 .$$

Par hypothèse on a $F(n) \uparrow \infty$ $(n \to \infty)$.

Définition. *Posons*

$$T(n) = \frac{1}{\mu([1, n])} \int_{[1,n]} I_A \, d\mu = \frac{1}{F(n+1)} \sum_{i=1}^{n} I_A(i)(F(i+1) - F(i)) .$$

On dit que l'ensemble A admet le réel $l \in [0, 1]$ comme μ-densité si $T(n) \to l$ $(n \to \infty)$; on désignera la μ-densité de A, si elle existe, par $\delta_\mu(A)$.

On introduit de même les μ-densités supérieure et inférieure définies par

$$\bar{\delta}_\mu(A) = \limsup_{n\to\infty} T(n) ,$$

$$\underline{\delta}_\mu(A) = \liminf_{n\to\infty} T(n) .$$

Théorème 8.2. *Soient $A = \bigcup_{n\geq 1} [p_n, q_n[$ une partie de $\mathbf{N}^*$, ni finie ni cofinie, et μ une mesure positive sur $(\mathbf{N}^*, \mathfrak{T}(\mathbf{N}^*))$, de masse totale $+\infty$ et de support $\mathbf{N}^*$; désignons par F sa fonction de répartition et posons*

$$\varrho_k = F(q_k) - F(p_k) , \qquad \sigma_k = F(q_k) - F(q_{k-1}) , \qquad k \geq 1 , \ (q_0 = 1) .$$

Alors on a

$$\bar{\delta}_\mu(A) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \varrho_k}{\sum_{k=1}^{n} \sigma_k},$$

$$\underline{\delta}_\mu(A) = \liminf_{n\to\infty} \frac{F(q_{n-1})}{F(p_n)} \frac{\sum_{k=1}^{n-1} \varrho_k}{\sum_{k=1}^{n-1} \sigma_k}.$$

Démonstration. Considérons la suite de terme général $T(n)$ définie ci-dessus. Nous allons calculer sa limite supérieure et sa limite inférieure.

(*a*) $\bar{\delta}_\mu(A) = \limsup_{n\to\infty} T(n) = \limsup_{n\to\infty} T(q_n - 1)$.

Or on a

$$T(q_n - 1) = \frac{1}{F(q_n)} \sum_{i=1}^{q_n - 1} I_A(i)(F(i+1) - F(i)) =$$

$$= \frac{1}{F(q_n)} \sum_{k=1}^{n} \Big(\sum_{i=p_k}^{q_k - 1} (F(i+1) - F(i)) \Big) = \frac{1}{F(q_n)} \sum_{k=1}^{n} (F(q_k) - F(p_k)) = \frac{\sum_{k=1}^{n} \varrho_k}{\sum_{k=1}^{n} \sigma_k}.$$

(*b*) $\underline{\delta}_\mu(A) = \liminf_{n\to\infty} T(n) = \liminf_{n\to\infty} T(p_n - 1)$.

Or on a

$$T(p_n - 1) = \frac{1}{F(p_n)} \sum_{i=1}^{(q_{n-1})-1} I_A(i)(F(i+1) - F(i)) =$$

$$= \frac{1}{F(p_n)} \sum_{k=1}^{n-1} \Big(\sum_{i=p_k}^{q_k - 1} (F(i+1) - F(i)) \Big) = \frac{1}{F(p_n)} \sum_{k=1}^{n-1} (F(q_k) - F(p_k)) =$$

$$= \frac{F(q_{n-1})}{F(p_n)} \frac{1}{F(q_{n-1})} \sum_{k=1}^{n-1} (F(q_k) - F(p_k)) = \frac{F(q_{n-1})}{F(p_n)} \frac{\sum_{k=1}^{n-1} \varrho_k}{\sum_{k=1}^{n-1} \sigma_k}.$$

Ce théorème admet quelques corollaires.

Corollaire 8.3. *Reprenons les notations du Théorème 8.2 et soit l un réel $\in]0, 1]$. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes:*

(1) *A admet l comme μ-densité;*

(2) (*a*) $F(p_n) \sim F(q_{n-1})$ $(n \to \infty)$,

(*b*) $\Big(\sum_{k=1}^{n} \varrho_k / \sum_{k=1}^{n} \sigma_k \Big) \to l$ $(n \to \infty)$.

Si $l = 0$, alors la condition (1) *équivaut à la condition* (2*b*).

COROLLAIRE 8.4. *Reprenons les notations du Théorème* 8.2 *et soit l un réel* $\in\,]0, 1]$.

Supposons vérifiées les deux propriétés suivantes:

(*a*) $F(p_n) \sim F(q_{n-1})$ $(n \to \infty)$;

(*b*) $\varrho_n / \sigma_n \to l$ $(n \to \infty)$.

Alors l'ensemble A *admet* l *comme* μ-*densité*.
Si $l = 0$, *alors la seule condition* (*b*) *implique que* $\delta_\mu(A) = 0$.

DÉMONSTRATION. Le Corollaire 8.4 résulte du Corollaire 8.3 en vertu du Lemme suivant de Césaro.

LEMME. *Soient* (a_n), (b_n) *deux suites de nombres positifs tels que* $\sum_{n \geq 1} b_n = +\infty$. *Si* $a_n / b_n \to l$, *alors* $(a_1 + \ldots + a_n)/(b_1 + \ldots + b_n) \to l$.

Il suffit à présent d'observer que les suites (ϱ_n), (σ_n) vérifient les hypothèses du Lemme.

REMARQUE 8.5: Reprenons les notations du Corollaire 8.3.

(1) Supposons (2*b*) vérifiée avec $l = 0$; il résulte alors du théorème que $\delta_\mu(A) = 0$, et ceci indépendamment de l'hypothèse (2*a*).

(2) Supposons (2*b*) vérifiée avec $l > 0$, mais non (2*a*); alors A n'admet pas de μ-densité. Toutefois, si $(F(q_{n-1})/F(p_n)) \to r \in [0, 1[$, on a $\bar{\delta}_\mu(A) = l$, $\underline{\delta}_\mu(A) = rl$; c'est une conséquence directe du Théorème 8.2.

Reprenons les notations du Corollaire 8.4.

(1) Supposons (*b*) vérifiée avec $l = 0$; alors $\delta_\mu(A) = 0$, et ceci indépendamment de l'hypothèse (*a*).

(2) Supposons (*b*) vérifiée avec $l > 0$, mais non (*a*); alors A n'admet pas de μ-densité. Toutefois, si $(F(q_{n-1})/F(p_n)) \to r \in [0, 1[$, on a $\bar{\delta}_\mu(A) = l$, $\underline{\delta}_\mu(A) = rl$.

Nous allons à présent appliquer le Corollaire 8.4 à différentes mesures μ et nous obtiendrons aussi des critères d'existence de différentes sortes de densités.

(1) *Critère d'existence d'une densité arithmétique pour* A.

Prenons pour μ la mesure qui compte les points de $\mathbf{N}^*$

$$\mu(\{n\}) = 1\,, \quad F(n) = n - 1\,, \quad n \geq 1\,,$$

$$T(n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} I_A(i)\,.$$

La μ-densité se réduit à la densité arithmétique $d(\cdot)$.

Critère 8.6. *Soit* $A = \bigcup_{n\geq 1} [p_n, q_n[$ *une partie de* $\mathbf{N}^*$, *ni finie ni cofinie et posons*

$$\varrho_n = q_n - p_n\,, \quad \sigma_n = q_n - q_{n-1}\,, \quad n \geq 1\,,\ (q_0 = 0)\,.$$

Soit l *un réel:* $0 < l < 1$ *et supposons vérifiées les deux propriétés suivantes:*

(*a*) $p_n \sim q_{n-1}$ $(n \to \infty)$,

(*b*) $\varrho_n/\sigma_n \to l$ $(n \to \infty)$.

Alors A *admet* l *comme densité arithmétique:* $d(A) = l$.
Si $l = 0$, *alors la seule condition* (*b*) *implique que* $d(A) = 0$.

Exemple 1. $A = \bigcup_{n\geq 1} [2n-1, 2n[$ (ensemble des entiers > 0 impairs)

$$\left|\begin{array}{ll} p_n = 2n-1\,, & q_n = 2n\,, \\ \varrho_n = q_n - p_n = 1\,, & \sigma_n = q_n - q_{n-1} = 2\,. \end{array}\right.$$

On vérifie que

(*a*) $p_n \sim q_{n-1}$;

(*b*) $\varrho_n/\sigma_n = 1/2$.

Donc A admet la densité arithmétique $d(A) = 1/2$.
L'exemple 1 est un cas très particulier du suivant: (cf. [10]).

Exemple 2. $A = \bigcup_{k\geq 1} [P(k), Q(k)[$ où $P(k)$, $Q(k)$ sont des polynômes à coefficients entiers > 0 en k. On voit facilement que

— *si* $d^\circ(P) > d^\circ(Q)$, *alors, à partir d'un certain rang, chacun des intervalles* $[P(k), Q(k)[$ *est vide,* A *est fini et* $d(A) = 0$.

— *si* $d^\circ(P) < d^\circ(Q)$, *alors, à partir d'un certain rang, chacun des intervalles* $[P(k), Q(k)[$ *chevauche le suivant,* A *est cofini et* $d(A) = 1$.

La condition $d^\circ(P) = d^\circ(Q)$ est donc une condition nécessaire pour qu'à partir d'un certain rang tous les intervalles $[P(k), Q(k)[$ soient non vides et disjoints, c'est-à-dire pour qu'il existe $k_0 \in \mathbf{N}^*$ tel que

$$\text{(C)} \qquad \forall k > k_0 \quad P(k) < Q(k) < P(k+1)\,.$$

Appelons ce cas le cas *régulier*; A est alors ni fini ni cofini.

Cherchons les conditions que doivent remplir les polynômes P, Q (en dehors de l'égalité de leurs degrés) pour qu'on soit dans le cas régulier. Posons

$$\left|\begin{array}{l} P(k) = ak^n + o(k^n) \\ Q(k) = a'k^n + o(k^n) \end{array}\right. \qquad \text{où } n \in \mathbf{N}^* \text{ est le degré } de\ P\ et\ de\ Q\,.$$

La condition (C) implique

$$ak^n + o(k^n) < a'k^n + o(k^n) < a(k+1)^n + o(k^n),$$

d'où l'on déduit $a \leq a'$, $a' \leq a$ c'est-à-dire $a = a'$.

Tenant compte de cette condition, posons

$$\left|\begin{aligned} P(k) &= ak^n + bk^{n-1} + o(k^{n-1}), \\ Q(k) &= ak^n + ck^{n-1} + o(k^{n-1}). \end{aligned}\right.$$

La condition (C) implique les deux conditions suivantes:

$$\left|\begin{aligned} & bk^{n-1} + o(k^{n-1}) < ck^{n-1} + o(k^{n-1}), \\ & (c - na)k^{n-1} + o(k^{n-1}) < bk^{n-1} + o(k^{n-1}), \end{aligned}\right.$$

d'où l'on déduit $b \leq c$, $c - na \leq b$, c'est-à-dire

$$\text{(C')} \qquad 0 \leq \frac{c-b}{na} \leq 1 .$$

Cette condition est une condition nécessaire pour que l'on ait (C), mais elle n'est *pas* suffisante (prendre $P(k) = k^2 + 1$, $Q(k) = k^2$). On obtient une condition suffisante en remplaçant dans (C') les signes d'inégalités faibles par les signes d'inégalités strictes, c'est-à-dire en remplaçant (C') par

$$(C'') \qquad 0 < \frac{c-b}{na} < 1 .$$

Nous nous placerons dans ce cas. Posons donc

$$\left|\begin{aligned} p_k &= P(k) = ak^n + bk^{n-1} + o(k^{n-1}) \\ q_k &= Q(k) = ak^n + ck^{n-1} + o(k^{n-1}) \end{aligned}\right. \qquad 0 < \frac{c-b}{na} < 1,$$

$$\left|\begin{aligned} \varrho_k &= q_k - p_k = (c-b)k^{n-1} + o(k^{n-1}), \\ \sigma_k &= q_k - q_{k-1} = nak^{n-1} + o(k^{n-1}). \end{aligned}\right.$$

On vérifie que

(*a*) $p_k \sim q_{k-1}$ $(k \to \infty)$,

(*b*) $\varrho_k/\sigma_k \to (c-b)/na$ $(k \to \infty)$.

Il en résulte que A admet la densité arithmétique $d(A) = \dfrac{c-b}{na}$.

Exemple 3. $A = \bigcup_{k \geq 1} [p_k, q_k]$, où

$$\left|\begin{aligned} p_k &= 10^{P(k)}, \qquad P(k) = ak + b, \\ q_k &= 10^{Q(k)}, \qquad Q(k) = ak + c. \end{aligned}\right.$$

On suppose que a, b, c sont des nombres réels vérifiant :

(1) $a>0$;

(2) $\forall k \geq 1$ p_k et q_k sont des entiers ≥ 1;

(3) $0<\dfrac{c-b}{a}<1$.

Posons

$$\left|\begin{array}{l} \varrho_k = q_k - p_k = 10^{ak+c} - 10^{ak+b}, \\ \sigma_k = q_k - q_{k-1} = 10^{ak+c} - 10^{a(k-1)+c}. \end{array}\right.$$

On vérifie

(a) $q_{k-1}/p_k = 10^{-a(1-(c-b)/a)} < 1$;

(b) $\varrho_k/\sigma_k = (1-10^{-(c-b)})/(1-10^{-a}) > 0$.

Il en résulte que A n'admet *pas* de densité arithmétique, mais que

$$\bar{d}(A) = \frac{1-10^{-(c-b)}}{1-10^{-a}},$$

$$\underline{d}(A) = 10^{-a(1-(c-b)/a)}\frac{1-10^{-(c-b)}}{1-10^{-a}},$$

(cf. Remarque 8.5).

Exemple 4. $A = \bigcup_{k \geq 1} [p_k, q_k[$ où

$$\left|\begin{array}{ll} p_k = 10^{P(k)}, & P(k) = ak^n + bk^{n-1} + o(k^{n-1}), \\ q_k = 10^{Q(k)}, & Q(k) = ak^n + ck^{n-1} + o(k^{n-1}). \end{array}\right.$$

On suppose que a, b, c, n sont des nombres réels vérifiant :

(1) n est un entier ≥ 2;

(2) $a>0$;

(3) $\forall k \geq 1$ p_k et q_k sont des entiers ≥ 1;

(4) $0<\dfrac{c-b}{na}<1$.

Posons

$$\varrho_k = q_k - p_k, \qquad \sigma_k = q_k - q_{k-1}.$$

On vérifie :

(a) $\dfrac{q_{k-1}}{p_k} = 10^{-[\underbrace{(na+b-c)}_{>0}k^{n-1}+o(k^{n-1})]} \to 0 \ (k\to\infty)$;

(b) $\dfrac{\varrho_k}{\sigma_k} = \dfrac{1-10^{[Q(k)-P(k)]}}{1-10^{-[Q(k)-Q(k-1)]}} = \dfrac{1-10^{-[(c-b)k^{n-1}+o(k^{n-1})]}}{1-10^{-[nak^{n-1}+o(k^{n-1})]}}$.

Puisque $n \geq 2$ on a $\varrho_k/\sigma_k \to 1$ $(k\to\infty)$.

Il en résulte que A n'admet *pas* de densité arithmétique, mais que

$$\bar{d}(A) = 1\,, \qquad \underline{d}(A) = 0\,,$$

(cf. Remarque 8.5).

Exemple 5. Soit m un entier >2; considérons

$$A = \bigcup_{n \geq 1} [m^{2n}, m^{2n+1}[\,.$$

A est l'ensemble des entiers >1 qui, dans le système de base m, s'écrivent avec un nombre impair de chiffres. Pour $m = 2$ c'est l'ensemble de Kubilius.

Posons

$$\left|\begin{array}{l} \varrho_n = q_n - p_n = (m-1)\,m^{2n}\,, \\ \sigma_n = q_n - q_{n-1} = (m^2-1)\,m^{2n-1}\,. \end{array}\right.$$

On vérifie

(a) $\dfrac{q_{n-1}}{p_n} = \dfrac{1}{m} < 1$;

(b) $\dfrac{\varrho_n}{\sigma_n} = \dfrac{m}{m+1} > 0$.

Il en résulte que A n'admet pas de densité arithmétique, mais que

$$\bar{d}(A) = \frac{m}{m+1}\,,$$

$$\underline{d}(A) = \frac{1}{m}\,\frac{m}{m+1} = \frac{1}{m+1}\,.$$

(cf. Remarque 8.5).

Exemple 6.

$$A = \bigcup_{n \geq 1} [k10^n, (k+1)10^n[\,, \qquad k \in \{1, \dots, 9\}\,,$$

A est l'ensemble des entiers >0 qui, dans la représentation décimale, admettent k comme premier chiffre.

Posons

$$\left|\begin{array}{l} \varrho_n = q_n - p_n = 10^n\,, \\ \sigma_n = q_n - q_{n-1} = 9(k+1)10^{n-1}\,. \end{array}\right.$$

On vérifie

(a) $\dfrac{q_{n-1}}{p_n} = \dfrac{1}{10}\,\dfrac{k+1}{k} < 1$;

(b) $\dfrac{\varrho_n}{\sigma_n} = \dfrac{10}{9}\,\dfrac{1}{k+1} > 0$.

Il en résulte que A n'admet *pas* de densité arithmétique, mais que

$$\bar{d}(A) = \frac{10}{9}\frac{1}{k+1},$$

$$\underline{d}(A) = \frac{1}{10}\frac{k+1}{k}\cdot\frac{10}{9}\frac{1}{k+1} = \frac{1}{9k}$$

(cf. Remarque 8.5).

(2) *Critère d'existence d'une densité analytique pour A.*

Prenons $\mu(\{n\}) = \mathrm{Log}\,(1+1/n)$, $F(n) = \mathrm{Log}\,n$, $n>1$; alors

$$T(n) = \frac{1}{\mathrm{Log}\,(n+1)}\sum_{i=1}^{n} I_A(i)\,\mathrm{Log}\left(1+\frac{1}{i}\right).$$

La densité μ se réduit à la densité de Scozzafava. On sait [Ex. 5.11, Rem.] que le fait que A admet l comme densité de Scozzafava équivaut au fait que *A admet l comme densité analytique δ.*

Critère 8.7. *Soit $A = \bigcup_{n>1} [p_n, q_n[$ une partie de $\mathbf{N}^*$, ni finie ni cofinie, et posons*

$$\varrho_n = \mathrm{Log}\,q_n - \mathrm{Log}\,p_n\,, \quad \sigma_n = \mathrm{Log}\,q_n - \mathrm{Log}\,q_{n-1}\,, \qquad n>1\,,\ (q_0 = 1)\,.$$

Soit l un réel: $0<l<1$ et supposons vérifiées les deux propriétés suivantes

(*a*) $\mathrm{Log}\,p_n \sim \mathrm{Log}\,q_{n-1}$ $(n \to \infty)$;

(*b*) $\varrho_n/\sigma_n \to l$ $(n \to \infty)$.

Alors A admet l comme densité analytique: $\delta(A) = l$.
Si $l = 0$, alors la seule condition (b) implique $\delta(A) = 0$.

Corollaire 8.8. *Supposons que les deux suites (p_n), (q_n) vérifient*

$$\frac{q_n}{p_n} \to \alpha\,, \quad \frac{p_n}{q_{n-1}} \to \beta \qquad (n \to \infty)$$

avec $\alpha, \beta \in [1, +\infty[$, l'un au moins de ces nombres étant différent de 1. Alors

(*a*) $\mathrm{Log}\,p_n \sim \mathrm{Log}\,q_{n-1}$ $(n \to \infty)$;

(*b*) $\dfrac{\varrho_n}{\sigma_n} = \dfrac{\mathrm{Log}\,(q_n/p_n)}{\mathrm{Log}\,(q_n/q_{n-1})} = \dfrac{\mathrm{Log}\,(q_n/p_n)}{\mathrm{Log}\,((q_n/p_n)\,(p_n/q_{n-1}))} \to \dfrac{\mathrm{Log}\,\alpha}{\mathrm{Log}\,(\alpha\beta)}$ $(n \to \infty)$.

Il en résulte que A admet la densité analytique $\delta(A) = \mathrm{Log}\,\alpha/\mathrm{Log}\,(\alpha\beta)$.

On retrouve un résultat de A. Fuchs et Ph. Nanopoulos [4].

Le Critère 8.7 est une simple application du Corollaire 8.4 à la mesure μ définie par $\mu(\{n\}) = \text{Log}(1 + 1/n)$. On peut obtenir un autre critère, dû à R. Giuliano [8], en appliquant à cette mesure le Corollaire 8.3. Ce corollaire fournit le résultat suivant:

Soit l un réel: $0 < l \leq 1$; alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes:

(1) *A admet l comme densité analytique;*

(2) *a)* $\text{Log}\, p_n \sim \text{Log}\, q_{n-1}$,

b) en posant

$$\varrho_n = \text{Log}\, q_n - \text{Log}\, p_n\,, \qquad \sigma_n = \text{Log}\, q_n - \text{Log}\, q_{n-1}\,, \qquad n > 1\,,\ (q_0 = 1)$$

on a

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} \varrho_k}{\sum_{k=1}^{n} \sigma_k} \to l\,, \quad \text{c.à.d.}\ \frac{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \varrho_k}{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sigma_k} \to l \qquad (n \to \infty)\,.$$

Si $l = 0$, alors la condition (1) *équivaut à* (2*b*).

En particulier, si les deux suites (ϱ_n), (σ_n) convergent au sens de Césaro vers des limites α, β (avec $\beta > 0$), alors la propriété (2*b*) est vérifiée avec $l = \alpha/\beta$. Il en résulte le critère suivant:

Critère 8.9 (R. Giuliano). *Supposons que les deux suites (p_n), (q_n) vérifient les deux propriétés suivantes:*

(i) $q_n/p_n \to r$ $(r > 1)$ $(n \to \infty)$;

(ii) $(q_n)^{1/n} \to \varrho$ $(\varrho > 1)$ $(n \to \infty)$.

Alors A admet la densité analytique $\delta(A) = \text{Log}\, r/\text{Log}\, \varrho$.

Démonstration. Il suffit de montrer que, dans les hypothèses faites, les propriétés (2*a*) et (2*b*) ci-dessus sont vérifiées.

1) Il résulte de i) que $\text{Log}\, p_n \sim \text{Log}\, q_n$ et de ii) que $\text{Log}\, q_n \sim n\, \text{Log}\, \varrho$, d'où aussi $\text{Log}\, q_n \sim \text{Log}\, q_{n-1}$. Il en résulte que $\text{Log}\, p_n \sim \text{Log}\, q_{n-1}$.

2) $\varrho_n = \text{Log}\,(q_n/p_n) \to \text{Log}\, r$, d'où aussi $\varrho_n \to \text{Log}\, r$ au sens de Césaro;

$$\sigma_n = \text{Log}\, q_n - \text{Log}\, q_{n-1}\,,$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sigma_k = \frac{1}{n}\,\text{Log}\, q_n = \text{Log}\,[(q_n)^{1/n}] \to \text{Log}\, \varrho\,,$$

c'est-à-dire $\sigma_k \to \text{Log}\, \varrho$ au sens de Césaro, d'où le résultat.

REMARQUE 8.10. En vertu de i) la condition ii) peut être remplacée par la suivante:

(ii') $(p_n)^{1/n} \to \varrho \ (\varrho > 1)$.

En effet $(p_n)^{1/n} = (p_n/q_n)^{1/n}(q_n)^{1/n}$; or, d'après i), $(p_n/q_n)^{1/n} \sim 1$, d'où $(p_n)^{1/n} \sim$ $\sim (q_n)^{1/n}$.

Nous allons à présent reprendre les exemples considérés lors de l'étude de la densité arithmétique et les étudier du point de vue de la densité analytique. Nous avons vu que les ensembles $\mathcal{A}$ des Exemples 1, 2 admettaient des densités arithmétiques; en leur appliquant le Critère 8.7 on montre qu'ils admettent également une densité analytique qui coïncide avec la densité arithmétique. Nous porterons notre attention sur les ensembles des Exemples 3, 4, 5, 6, qui n'admettraient pas de densité arithmétique et nous allons leur appliquer le Critère 8.7 pour voir s'ils admettent une densité analytique.

EXEMPLE 3. $\mathcal{A} = \bigcup_{k \geq 1} [p_k, q_k[$, où

$$\left| \begin{array}{ll} p_k = 10^{P(k)}, & P(k) = ak + b\,, \\ q_k = 10^{Q(k)}, & Q(k) = ak + c\,. \end{array} \right.$$

On suppose que a, b, c sont des nombres réels vérifiant:

(1) $a > 0$;

(2) $\forall k > 1$ p_k et q_k sont des entiers >1;

(3) $0 < \dfrac{c-b}{a} < 1$.

Posons

$$\varrho_k = \operatorname{Log} q_k - \operatorname{Log} p_k = (c-b) \operatorname{Log} 10\,,$$
$$\sigma_k = \operatorname{Log} q_k - \operatorname{Log} q_{k-1} = a \operatorname{Log} 10\,.$$

On vérifie

(a) $\dfrac{\operatorname{Log} p_k}{\operatorname{Log} q_{k-1}} = \dfrac{ak+b}{a(k-1)+c} \to 1 \ (k \to \infty)$,

c'est-à-dire $\operatorname{Log} p_k \sim \operatorname{Log} q_{k-1}$;

(b) $\dfrac{\varrho_k}{\sigma_k} = \dfrac{c-b}{a}$.

Il en résulte que $\mathcal{A}$ admet la densité analytique $\delta(\mathcal{A}) = \dfrac{c-b}{a}$.

EXEMPLE 4. $\mathcal{A} = \bigcup_{k \geq 1} [p_k, q_k[$, où

$$\left| \begin{array}{ll} p_k = 10^{P(k)}, & P(k) = ak^n + bk^{n-1} + o(k^{n-1})\,, \\ q_k = 10^{Q(k)}, & Q(k) = ak^n + ck^{n-1} + o(k^{n-1})\,. \end{array} \right.$$

On suppose que a, b, c, n sont des nombres réels vérifiant :

(1) n est un entier $\geqslant 2$;

(2) $a > 0$;

(3) $\forall k \geqslant 1$ p_k et q_k sont des entiers $\geqslant 1$;

(4) $0 < \dfrac{c-b}{na} < 1$.

Posons

$$\left\{ \begin{array}{l} \varrho_k = \operatorname{Log} q_k - \operatorname{Log} p_k = [(c-b)k^{n-1} + o(k^{n-1})] \operatorname{Log} 10 \,, \\ \sigma_k = \operatorname{Log} q_k - \operatorname{Log} q_{k-1} = [nak^{n-1} + o(k^{n-1})] \operatorname{Log} 10 \,. \end{array} \right.$$

On vérifie

(a) $\dfrac{\operatorname{Log} p_k}{\operatorname{Log} q_{k-1}} = \dfrac{P(k)}{Q(k-1)} \to 1 \ (k \to \infty)$,

c'est-à-dire $\operatorname{Log} p_k \sim \operatorname{Log} q_{k-1}$;

(b) $\dfrac{\varrho_k}{\sigma_k} \to \dfrac{c-b}{na} \ (k \to \infty)$.

Il en résulte que $\mathcal{A}$ admet la densité analytique $\delta(\mathcal{A}) = \dfrac{c-b}{na}$.

Exemple 5. $\mathcal{A} = \bigcup\limits_{k \geqslant 1} [m^{2k}, m^{2k+1}[$, m entier $\geqslant 2$.

C'est un cas particulier de l'Exemple 3 avec $a = 2 \operatorname{Log} m$, $b = 0$, $c = \operatorname{Log}_{10} m$. L'ensemble $\mathcal{A}$ admet donc la densité analytique $\delta(\mathcal{A}) = (c-b)/a = 1/2$. On constate qu'elle est indépendante de m.

Nous avons vu que $\mathcal{A}$ n'admettait pas de densité arithmétique, mais que $\bar{d}(\mathcal{A}) = m/(m+1)$, $\underline{d}(\mathcal{A}) = 1/(m+1)$.

Exemple 6. $\mathcal{A} = \bigcup\limits_{n \geqslant 1} [k10^n, (k+1)10^n[$, $k \in \{1, \ldots, 9\}$.

C'est encore un cas particulier de l'Exemple 3 avec $a = 1$, $b = \operatorname{Log}_{10} k$, $c = \operatorname{Log}_{10}(k+1)$. L'ensemble $\mathcal{A}$ admet donc la densité analytique $\delta(\mathcal{A}) = (c-b)/a = \operatorname{Log}_{10}(1 + 1/k)$. Ceci résoud le fameux problème du premier chiffre.

Nous allons étudier un dernier exemple que l'on pourra comparer à le Exemple 4.

Exemple 7.

$$\mathcal{A} = \bigcup_{k \geqslant 1} [p_k, q_k[\,,$$

$$p_k = 10^{(10^{P(k)})}, \qquad q_k = 10^{(10^{Q(k)})},$$

où $P(k)$, $Q(k)$ sont des polynômes de degré $n \in \mathbf{N}^*$ en k vérifiant les hypothèses de l'Exemple 4.

Un simple calcul montre que

(*a*) $\dfrac{\operatorname{Log} q_{k-1}}{\operatorname{Log} p_k} = 10^{-\underbrace{(a+b-c)}_{>0}k^{n+1}+o(k^{n+1})}$, d'où l'on déduit

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\operatorname{Log} q_{k-1}}{\operatorname{Log} p_k} = \begin{cases} = 10^{-\underbrace{(a+b-c)}_{>0}} < 1 & \text{si } n=1, \\ 0 & \text{si } n>1. \end{cases}$$

La propriété (*a*) du Critère 8.7 n'est donc pas remplie.

(*b*) En posant $\varrho_k = \operatorname{Log} q_k - \operatorname{Log} p_k$, $\sigma_k = \operatorname{Log} q_k - \operatorname{Log} q_{k-1}$, on a

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\varrho_k}{\sigma_k^*} = \begin{cases} \dfrac{1-10^{(c-b)}}{1-10^{-a}} > 0 & \text{si } n=1, \\ 1 & \text{si } n>1. \end{cases}$$

L'ensemble A n'admet donc de densité analytique en aucun cas, mais il résulte du Théorème 8.2 que:

— pour $n=1$

$$\bar{d}(A) = \frac{1-10^{-(c-b)}}{1-10^{-a}}, \qquad \underline{d}(A) = 10^{-(a+b-c)}\bar{d}(A);$$

— pour $n>1$

$$\bar{d}(A) = 1, \qquad \underline{d}(A) = 0.$$

(3) *Critère d'existence d'une densité analytique de 2^e^ espèce pour A.*

Prenons

$$\mu(\{n\}) = \operatorname{Log}\operatorname{Log}(n+1) - \operatorname{Log}\operatorname{Log} n,$$

$$F(n) = \operatorname{Log}\operatorname{Log} n - \operatorname{Log}\operatorname{Log} 2 \sim \operatorname{Log}\operatorname{Log} n.$$

La densité μ se réduit alors à la densité de Scozzafava de 2^e^ espèce. On sait (Ex. 5.12, Rem.) que le fait que A admet l comme densité de Scozzafava de 2^e^ espèce équivaut au fait que *A admet l comme densité analytique de 2^e^ espèce.*

Le Théorème 8.2 fournit le Critère suivant:

Critère 8.11. *Soit $A = \bigcup_{n\geq 1} [p_n, q_n[$ une partie de $\mathbf{N}^*$, ni finie ni cofinie, et posons*

$$\begin{cases} \varrho_n = \operatorname{Log}\operatorname{Log} q_n - \operatorname{Log}\operatorname{Log} p_n \\ \sigma_n = \operatorname{Log}\operatorname{Log} q_n - \operatorname{Log}\operatorname{Log} q_{n-1} \end{cases} \qquad n>1, \ (q_0 = 1).$$

Soit l un réel: $0<l<1$ et supposons vérifiées les deux propriétés suivantes

(*a*) $\operatorname{Log}\operatorname{Log} p_n \sim \operatorname{Log}\operatorname{Log} q_{n-1}$ $(n \to \infty)$.

(*b*) $\varrho_n/\sigma_n \to l$ $(n \to \infty)$.

Alors A admet l comme densité analytique de 2^e^ espèce.
Si $l=0$, alors la seule condition (b) implique que cette densité est nulle.

Exemples. Nous avons vu que chacun des ensembles des Exemples 1, ..., 6 admettait une densité analytique, mais que l'ensemble de l'Exemple 7 n'en admettait *pas*.

Le Critère 8.11 permet de montrer que:

(1) chacun des ensembles des Exemples 1, ..., 6 admet une densité analytique de deuxième espèce, qui est égale à sa densité analytique,

(2) l'ensemble de l'Exemple 7 admet une densité analytique de deuxième espèce égale à $(c-b)/na$.

Remarque. Soit $A = \bigcup_{k\geq 1} [p_k, q_k[$. Nous avons vu que:

(1) Si p_k, q_k sont des polynômes en k de même degré, A admet une densité arithmétique.

(2) Si p_k, q_k sont des exponentielles du type $10^{P(k)}$, $10^{Q(k)}$, où P, Q sont des polynômes de même degré, A n'admet pas de densité arithmétique, mais admet une densité analytique.

(3) Si p_k, q_k sont des exponentielles d'exponentielles: $10^{(10^{P(k)})}$, $10^{(10^{Q(k)})}$ où P, Q sont des polynômes de même degré, A n'admet ni densité arithmétique, ni densité analytique, mais admet une densité analytique de deuxième expèce.

On voit que l'on peut itérer sans difficulté.

9. - Théorèmes taubériens

Commençons par faire l'observation suivante:

Soient μ la mesure de Lebesque sur $\mathbf{R}^+$ et F sa fonction de répartition; on a

$$\frac{F(x)}{x} = 1\,, \qquad x>0\,. \tag{9.1}$$

La transformée de Laplace de μ est donnée par $g(t) = \int_0^\infty \exp[-tx]\,dx = 1/t$ $(t>0)$ d'où

$$tg(t) = 1\,, \qquad t>0\,. \tag{9.2}$$

Les relations (9.1) et (9.2) sont à l'origine des théorèmes taubériens, dont le théorème suivant est un exemple.

THÉORÈME 9.3. *Soient* μ *un mesure positive sur* $\mathbf{R}^+$, F *sa fonction de répartition*: $F(x)=\mu([0,x])$, $x>0$, *et* g *sa transformée de Laplace*:

$$g(t)=\int_{[0,+\infty[}\exp[-tx]\,d\mu(x)\,.$$

On suppose $g(t)$ *finie pour tout* $t>0$.

Alors, pour tout nombre réel $l>0$, *les deux propriétés suivantes sont équivalentes*:

(9.4) (*a*) $\dfrac{F(x)}{x}\to l \qquad (x\to+\infty)$;

(9.5) (*b*) $tg(t)\to l \qquad (t\downarrow 0)$.

Ce théorème est un cas particulier du Théorème 9.13 pour $c=l$, $\varrho=1$, $l(\cdot)=1$. Nous allons en donner une démonstration directe, adaptée d'après celle du Théorème 9.13.

DÉMONSTRATION. $(a)\Rightarrow(b)$. Supposons que l'on ait (*a*); on peut écrire, de façon équivalente,

$$\forall y>0 \qquad \frac{F(yx)}{yx}\to l \qquad (x\to+\infty)\,,$$

ou encore

$$\forall y>0 \qquad \frac{F(yx)}{x}\to ly \qquad (x\to+\infty)\,. \tag{9.6}$$

Or, $\forall x>0$, l'application $y\mapsto F(yx)/x$ est la fonction de répartition d'une mesure positive μ_x sur $\mathbf{R}^+$; d'autre part l'application $y\mapsto ly$ est la fonction de répartition de la mesure $l\lambda$ sur $\mathbf{R}^+$, où λ désigne la mesure de Lebesgue. La relation (9.6) exprime alors que l'on a, au sens de la convergence des fonctions de répartition:

$$\mu_x\to l\lambda \qquad (x\to\infty)\,. \tag{9.7}$$

Désignons par $\hat{\mu}_x(s)$, $\hat{\lambda}(s)$ les transformées de Laplace des mesures μ_x, λ. On a trivialement

$$\hat{\mu}_x(s)=\frac{1}{x}\,g\!\left(\frac{s}{x}\right), \qquad \hat{\lambda}(s)=\frac{1}{s}\,. \tag{9.6}$$

Or, d'après le Lemme 9.9 ci-dessous, la fonction $x\to\hat{\mu}_x(1)$ est bornée. Il résulte alors du Théorème de continuité pour transformées de Laplace (cf. [2], vol. II 1966, p. 410, Théorème 2*a*) que

$$\forall s > 1 \quad \hat{\mu}_x(s) \to l\hat{\lambda}(s) \qquad (x \to \infty),$$

c'est-à-dire

(9.8) $$\forall s > 1 \quad \frac{1}{x} g\left(\frac{s}{x}\right) \to l \frac{1}{s} \qquad (x \to \infty).$$

Prenons $s = 2$ et $2/x = t$; il vient

$$t g(t) \to l \qquad (t \downarrow 0),$$

ce qui est la propriété (*b*).

(*b*) $\Rightarrow$ (*a*). Supposons que l'on ait (*b*); cette propriété est équivalente à (9.8). Or le premier membre est la transformée de Laplace de $F(yx)/x$ et le second membre la transformée de Laplace de ly; en outre le premier membre est borné pour $s = 1$. Le Théorème de continuité donne alors (9.6); en faisant $y = 1$ on obient (*a*).

Lemme 9.9. *Si la propriété* (*a*) *est vérifiée, alors la fonction* $x \mapsto \hat{\mu}_x(1) = (1/x) g(1/x)$, $(x > 0)$ *est bornée.*

Démonstration. On a pour tout $x > 0$

$$g\left(\frac{1}{x}\right) = \left\{\int_0^x + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{2^{n-1}x}^{2^n x}\right\} \exp\left[-\frac{y}{x}\right] dF(y) < F(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left[-2^{n-1}\right] F(2^n x),$$

d'où, pour x assez grand,

$$< (l+\varepsilon)\left\{x + \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left[-2^{n-1}\right] 2^n x\right\};$$

$$\frac{1}{x} g\left(\frac{1}{x}\right) < (l+\varepsilon)\left\{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left[-2^{n-1} 2^n\right\} < +\infty.$$

Le Théorème 9.3 comporte comme cas particulier le Théorème suivant.

Théorème 9.10. *Soient* $(a_n)_{n \geq 1}$, $(s_n)_{n \geq 1}$ *deux suites de nombres réels positifs, dont la seconde vérifie les conditions*

(9.11) $$0 < s_n \uparrow +\infty, \qquad s_n \sim s_{n+1}.$$

Posons, pour tout $t > 0$

(9.12) $$g(t) = \sum_{k \geq 1} a_k \exp\left[-t s_k\right]$$

et supposons $g(t)$ *finie pour tout* $t > 0$.

Alors, pour tout $l>0$, les deux propriétés suivantes sont équivalentes:

(*a*) $\dfrac{1}{s_n}\sum_{k=1}^{n} a_k \to l \ (n\to\infty)$;

(*b*) $tg(t)\to l \ (t\downarrow 0)$.

Démonstration. Considérons la mesure positive μ sur R^+ définie par

$$\mu=\sum_{k\geq 1} a_k \varepsilon_{s_k}$$

et désignons par F sa fonction de répartition. La fonction g définie par (9.12) est la transformée de Laplace de μ. Il résulte alors du Théorème 9.3 que la condition (*b*) équivaut à la suivante

$$\frac{F(x)}{x}\to l \qquad (x\to+\infty).$$

Il suffit donc de vérifier que cette dernière condition équivaut à la condition (*a*). A cet effet, remarquons que l'on a

$$F(x)=\mu([1,x])=\sum_{k:s_k\leq x} a_k.$$

Par conséquent, si pour tout nombre positif x assez grand, on désigne par n_x l'(unique) entier déterminé par la relation

$$s_{n_x}<x<s_{n_x+1},$$

on a

$$F(x)=F(s_{n_x})=\sum_{k=1}^{n_x} a_k$$

d'où l'encadrement

$$\frac{1}{s_{n_x+1}}\sum_{k=1}^{n_x} a_k\leq\frac{F(x)}{x}\leq\frac{1}{s_{n_x}}\sum_{k=1}^{n_x} a_k.$$

La conclusion résulte alors du fait que l'on a

$$\lim_{x\to\infty} n_x=+\infty \quad \text{et} \quad s_n\sim s_{n+1}.$$

Nous donnons finalement le théorème taubérien général suivant:

Théorème 9.13. *Soient μ une mesure positive sur R^+, F sa fonction de répartition: $F(x)=\mu([1,x])$, $x>0$, et g sa transformée de Laplace*

$$g(t)=\int_{[0,+\infty[}\exp[-tx]\,d\mu(x).$$

On suppose $g(t)$ finie pour tout $t>0$.

Soient d'autre part c, ϱ des nombres ≥ 0 et $l(\cdot)$ une fonction à variation lente, c'est-à-dire une fonction mesurable $[a, +\infty[\, \mapsto \mathbf{R}^{*+}$ vérifiant

$$\forall \lambda > 0 \quad \frac{l(\lambda x)}{l(x)} \to 1 \qquad (x \to +\infty).$$

Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes:

$$(9.14) \quad (a) \ F(x) \sim c \frac{x^{\varrho}}{\Gamma(1+\varrho)} l(x) \ (x \to \infty);$$

$$(9.15) \quad (b) \ g(t) \sim c \frac{1}{t^{\varrho}} l\left(\frac{1}{t}\right) \ (t \downarrow 0).$$

Remarque. Pour $c = 0$ la relation (9.14) doit être interprétée comme signifiant $F(x) = o\big(x^{\varrho}(l(x))\big)$, $x \to \infty$; remarque analogue pour (9.15).

Ce théorème a une longue histoire; il est connu sous le nom de théorème taubérien de Hardy-Littlewood-Karamata. On en trouve dans la littérature plusieurs démonstrations dans des cas plus ou moins particuliers [1, vol. I, p. 103], [2, vol. II, p. 421, Théorème 2], [5, p. 283-284]. La dernière en date, qui est aussi la plus générale, suit les lignes de la démonstration du Théorème 9.3; on la trouvera dans [6, Théorème 1.7.1, p. 37].

Donnons pour terminer une application du Théorème 9.13.

Définition 9.16. *Une fonction arithmétique f admet l comme densité « série-logarithmique » si*

$$(9.17) \qquad \lim_{x \uparrow 1} \frac{-1}{\operatorname{Log}(1-x)} \sum_{n \geq 1} f(n) \frac{x^n}{n} = l.$$

Proposition 9.18. *Pour toute fonction arithmétique positive f et tout nombre réel $l \geq 0$ les deux propriétés suivantes sont équivalentes:*

(a) f admet l comme densité logarithmique;

(b) f admet l comme densité « série-logarithmique ».

Démonstration. Prenons $\mu(\{n\}) = f(n)/n$; alors la propriété (a) s'écrit

$$9.19) \qquad F(x) = \sum_{k=1}^{[x]} \frac{f(k)}{k} \sim l \operatorname{Log} x, \qquad (x \to \infty).$$

(Si $l = 0$ ceci doit être interprété comme signifiant $F(x) = o(\operatorname{Log} n)$, $x \to \infty$.) C'est la propriété 9.14 avec $c = l$, $\varrho = 0$, $l(x) = \operatorname{Log} x$ ($\operatorname{Log} x$ est bien à variation lente). D'après le Théorème 9.13 la propriété (9.19) équivaut donc à

$$(9.20) \qquad g(t) = \sum_{n \geq 1} \exp[-tn] \frac{f(n)}{n} \sim l \operatorname{Log}\left(\frac{1}{t}\right), \qquad (t \downarrow 0)$$

c'est-à-dire, en posant $\exp[-t] = x$, $1 - t \sim x$ $(t \downarrow 0)$,

$$\sum_{n \geq 1} f(n) \frac{x^n}{n} \sim -l \operatorname{Log}(1-x), \qquad (x \uparrow 1). \tag{9.21}$$

Or ceci est la propriété (*b*).

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. D. T. A. Elliot, *Probabilistic Number Theory*, Springer (1979).

[2] W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, J. Wiley (1966).

[3] A. Fuchs - G. Letta, *Sur le problème du premier chiffre décimal*, Boll. U.M.I., (6) 2-B (1984), pp. 451-461.

[4] A. Fuchs - Ph. Nanopoulos, *Mesures invariantes par translation, classes de Dynkin, first-digit problem*, Advances in Mathematics, vol. 55, N. 1 (janvier 1985).

[5] G. H. Hardy, *Divergent Series*, Oxford (1949).

[6] N. H. Bingham - C. M. Goldie - J. L. Teugels, *Regular Variation*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Cambridge Univ. Press (1987).

[7] R. Giuliano Antonini, *Sulla nozione astratta di densità in* $\mathbf{N}^*$ *e sul problema della prima cifra decimale*, Note di Matematica, IV (1984), pp. 97-111.

[8] R. Giuliano Antonini, *Comparaison de densités arithmétiques*, Rend. Accad. Naz. Sci. XL, Mem. Mat., 104° (1986), X, 12, pp. 153-163.

[9] R. Scozzafava, *Un esempio concreto di probabilità non-σ-additiva: la distribuzione della prima cifra significativa dei dati statistici*, Boll. U.M.I., (5) 18-A (1981), pp. 403-410.

[10] P. Diaconis, *Weak and strong averages in probability and the theory of numbers*, Thèse, Harvard Univ., Cambridge, Mass. (1974).

Direttore responsabile: Prof. A. Ballio - Autorizz. Trib. di Roma n. 7269 dell'8-12-1959
«Monograf» - Via Collamarini, 5 - Bologna