Rendiconti
Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL
Memorie di Matematica
108° (1990), Vol. XIV, fasc. 19, pagg. 361-397

ADA BOTTARO ARUFFO (*)

Rappresentazione di multiapplicazioni mediante insiemi compatti di selezioni integrabili (**)

RIASSUNTO. — In questo lavoro vengono date sia condizioni sufficienti sia condizioni necessarie e sufficienti per ottenere che: se X è uno spazio di Banach, $p \in [1, \infty]$ e F è una multiapplicazione misurabile a valori nei sottoinsiemi chiusi e non vuoti di X, allora esiste una famiglia numerabile, densa e relativamente compatta di selezioni in $L^p(\mu, X)$ per F. In particolare viene data un'estensione di un risultato di Cellina e Colombo ([CC]), che studia il caso in cui $X = \boldsymbol{R}^m$.

Representation of Multiapplications by Compact Sets of Integrable Selections

SUMMARY. — In this work we give either sufficient conditions or necessary and sufficient conditions to obtain that: if X is a Banach space, $p \in [1, \infty]$ and F is a measurable multiapplication with values in the non-empty closed subsets of X, then there exists a countable, dense and relatively compact family of selections in $L^p(\mu, X)$ for F. In particular we give an extension of a result of Cellina and Colombo ([CC]), that studied the case in which $X = \boldsymbol{R}^m$.

INTRODUZIONE

Siano $p \in [1, \infty]$, T insieme, $\mathfrak{C}$ σ-algebra su T, $\mu : \mathfrak{C} \to [0, +\infty]$ misura, X spazio di Banach su $\boldsymbol{R}$, $F : T \to 2^X$ a valori chiusi e non vuoti, misurabile e tale che esista $\lambda \in \mathfrak{L}^p(\mu, \boldsymbol{R})$ per la quale risulta

$$\sup\{|x|_X : x \in F(t)\} \leq \lambda(t) \qquad \text{per ogni } t \in T \tag{0}$$

(una multiapplicazione che soddisfa quest'ultima condizione per $p = 1$ viene detta integrabilmente limitata); allora Cellina e Colombo (in [CC], Teorema 1)

(*) Indirizzo dell'Autrice: Dipartimento di Matematica dell'Università, via L. B. Alberti 4, 16132 Genova.

(**) Memoria presentata il 5 novembre 1990 da Giuseppe Scorza Dragoni, uno dei XL.

ISSN-0392-4106

nel caso in cui $X = \boldsymbol{R}^m$ provano che, se $p = \infty$, oppure se $p < \infty$ e μ è σ-finita, esiste un sottoinsieme $\mathcal{F}$ numerabile di $\mathfrak{L}^p(\mu, \boldsymbol{R}^m)$ tale che il corrispondente insieme di $L^p(\mu, \boldsymbol{R}^m)$ sia relativamente compatto e si abbia

$$\overline{\{f(t) : f \in \mathcal{F}\}} = F(t) \qquad \text{per ogni } t \in T.$$

Recentemente Castaing in [C] e Klei in [K] si sono occupati di un problema parzialmente connesso al precedente, caratterizzando in particolare le multiapplicazioni integrabilmente limitate per le quali l'insieme delle selezioni integrabili è relativamente debolmente compatto in $L^1(\mu, X)$, inoltre Klei fornisce un esempio (cfr. [K], osservazione dopo la Proposizione 3.12) in cui si mostra che, neppure per $X = \boldsymbol{R}$, vale rispetto alle topologie forti un risultato analogo a quello provato relativamente alle topologie deboli; in particolare tale esempio mostra che, nelle ipotesi di Cellina e Colombo e anche nell'ipotesi più forte che $\bigcup_{t \in T} F(t)$ sia compatto, l'insieme di tutte le selezioni integrabili non è in generale relativamente compatto (basta cioè considerare $T = [0, 1]$, $\mathfrak{L}$ e μ la σ-algebra e la misura di Lebesgue su $[0, 1]$, $F(t) = [-1, 1]$ per ogni $t \in [0, 1]$ ed il sottoinsieme dell'insieme delle selezioni integrabili di F formato dagli elementi della successione delle funzioni di Rademacher). Utilizzando un risultato dato da Balder in [Ba] (che generalizza un noto teorema di Komlós), si può però far vedere (cfr. Teorema 1.0) che, se $p = 1$, allora, dato un insieme di selezioni integrabili di F, per ogni successione $(f_n)_{n \in N}$ di elementi di questo insieme esistono $f \in L^1(\mu, X)$ ed $(n_k)_{k \in N}$ successione strettamente crescente di naturali tale che per ogni $(k_h)_{h \in N}$ successione strettamente crescente di naturali si abbia che

$$\frac{1}{l+1} \sum_{h=0}^{l} f_{n_{k_h}} \to f \qquad \text{in } L^1(\mu, X).$$

In questo lavoro ci si occupa poi del problema di vedere cosa si può ripetere del risultato di Cellina e Colombo nel caso in cui X ha dimensione infinita.

Per far ciò, si introduce dapprima la seguente ipotesi:

(1) « per ogni $n \in \boldsymbol{Z}_+$ esistano $N(n) \in \boldsymbol{Z}_+$, $f_{1,n}, \ldots, f_{N(n),n} \in \mathfrak{L}^p(\mu, X)$ e $\lambda_n \in \mathfrak{L}^p(\mu, \boldsymbol{R})$ tali che $|\lambda_n|_{L^p(\mu,\boldsymbol{R})} < \frac{1}{n}$ e $F(t) \subset \bigcup_{i \in \{1,\ldots,N(n)\}} \{x \in X : |x - f_{i,n}(t)|_X < \lambda_n(t)\}$ per q.o. $t \in T$ »

(che costituisce un rafforzamento della (0) (cfr. Lemma 1.1)) e si mostra (Teorema 1.6) che, almeno nel caso in cui X è separabile (ma anche in condizioni un po' meno restrittive), questa è sufficiente per riottenere il risultato di Cellina e Colombo in spazi di Banach. Successivamente ci si occupa di individuare delle condizioni sufficienti a garantire la (1). Nel caso $p = \infty$, si individua una condizione (cfr. Teorema 1.8 e Corollario 1.9), che esprime il fatto che i valori di F sono vicini ad elementi di famiglie numerabili di compatti che sono totalmente limitati « uniformemente » (nel senso precisato dalla Definizione 0.11) e che, aggiunta alla (0), permette di ottenere la (1); mentre si fa vedere (Esempio 1.10) che per lo stesso valore di p il risultato, nelle ipotesi di Cellina e Colombo e con l'ulteriore condizione che F sia a valori compatti, può non valere. Per quanto riguarda invece il caso in cui $p < \infty$, dapprima si prova che (cfr. Teorema 1.11 e Corollario 1.12) se, oltre alle ipotesi di Cellina e Colombo, vale per ogni insieme A di misura finita una condizione dello stesso tipo di quella relativa al caso « $p = \infty$ » su insiemi che crescono ad A in misura allora vale la (1); questo tipo di risultati, insieme ad un teorema di tipo Lusin per le multiapplicazioni e ad un teorema di Berge, permette di provare che (cfr. Teorema 1.14) sotto opportune ipotesi di regolarità sulla misura, nelle ipotesi di Cellina e Colombo, vale la (1). Nell'Osservazione 1.17 si fa vedere come dai risultati precedenti si possa in particolare dedurre il risultato di Cellina e Colombo. Nel § 2, studiando alcune proprietà dei sottoinsiemi relativamente compatti di L^p, si cerca di vedere quanto le condizioni individuate precedentemente sono necessarie per ottenere la tesi e si trovano risultati positivi nel caso $p = \infty$. Il Teorema 2.0 permette ad esempio di dedurre, nel caso $p = \infty$, che tale un « viceversa » del Teorema 1.6 (cfr. anche Osservazione 2.1), mentre con alcuni esempi si mostra che tale « viceversa » non vale nel caso $p < \infty$. Il Teorema del n. 2.5 consente invece di asserire che, almeno in ipotesi di regolarità e di σ-finitezza sulla misura, anche la condizione riguardante le famiglie numerabili di compatti totalmente limitati « uniformemente » è necessaria e anzi, nel Teorema del n. 2.3 si mostra che è necessaria anche una condizione dello stesso tipo, ma un po' più restrittiva.

Desidero ringraziare il Prof. J. P. Cecconi, con cui ho discusso i risultati del presente lavoro.

0. - Notazioni e preliminari

0.0. Notazioni: Se Z è uno spazio vettoriale su $\boldsymbol{R}$ e se $E \subset Z$, si indica con $\mathrm{sp}(E)$ il sottospazio vettoriale di Z generato da E. Siano Z, W spazi vettoriali topologici su $\boldsymbol{R}$ in dualità. Allora $\langle z, w \rangle_{Z \times W} = \langle w, z \rangle_{W \times Z}$ indica il prodotto di dualità tra $z \in Z$ e $w \in W$; $w(Z)$ indica la topologia debole su Z indotta dalla dualità con il duale continuo di Z; se (Z, d) è uno spazio metrico, se $A \subset Z$ e se $\varepsilon \in \boldsymbol{R}_+$ si indica $A_\varepsilon = \{z \in Z : d(z, A) < \varepsilon\}$; se Z è uno spazio normato su $\boldsymbol{R}$ allora $|z|_Z$ indica la norma in Z di $z \in Z$, $s(Z)$ indica la topologia forte su Z, $S_Z(a, r) = \{z \in Z : |z - a|_Z < r\}$ $(a \in Z,\ r > 0)$, con « sfera chiusa di centro a e di raggio r » si intende l'insieme $\{z \in Z : |z - a|_Z < r\}$ $(a \in Z,\ r > 0)$; se T è un insieme, $\mathcal{L}$ è una σ-algebra su T, $E \in \mathcal{L}$, allora $\mathcal{L}|_E$ indica la σ-algebra indotta su E da $\mathcal{L}$. Si abbrevierà s.c.i. per indicare « semicontinua inferiormente », s.c.s. per indicare « semicontinua superiormente ». Se E, F sono insiemi, $G \subset E$, allora card E indica la cardinalità di E, 2^E indica l'insieme delle parti di E; $1_G\colon E \to \boldsymbol{R}$ indica la funzione tale che

$$1_G(e) = \begin{cases} 1 & \text{se } e \in G \\ 0 & \text{se } e \in E \setminus G \end{cases}; \qquad \text{se } f\colon E \to F \text{ è un'applicazione},$$

allora $f|_G$ indica la restrizione di f a G; se $\Gamma\colon E \to 2^F$ è una multiapplicazione, allora gph Γ indica il grafico di Γ, $\Gamma|_G$ indica la restrizione di Γ a G e, se $H \subset F$, $\Gamma^-(H) = \{e \in E\colon \Gamma(e) \cap H \neq \emptyset\}$. Sia V spazio vettoriale topologico su $\boldsymbol{R}$; se $A \subset V$, allora $\overline{\text{co}}\, A$ indica la chiusura dell'involucro convesso di A. Se (Z, ζ) è uno spazio topologico, allora $\mathcal{B}(\zeta)$ indica la σ-algebra di Borel su (Z, ζ).

0.1. Definizione: Siano $\mathfrak{L}$ σ-algebra su T, (Z, ζ) spazio topologico, $f\colon T \to Z$. Allora f si dice $\mathfrak{L}$-misurabile se $f^{-1}(A) \in \mathfrak{L}$ per ogni $A \in \zeta$. Se inoltre $\mu\colon \mathfrak{L} \to [0, +\infty]$ è una misura, allora f si dice μ-misurabile se è $\mathfrak{L}$-misurabile e se esistono $N \in \mathfrak{L}$ con $\mu(N) = 0$ e S sottospazio separabile di Z tali che $f(T \setminus N) \subset S$.

0.2. Definizioni: Siano (T, τ) spazio topologico, $\mathfrak{L}$ σ-algebra su T, $\mu\colon \mathfrak{L} \to [0, +\infty]$ misura. Allora si dice che:

a) μ è internamente regolare se per ogni $A \in \mathfrak{L}$ ed $\varepsilon > 0$ vale la seguente condizione

(0.2.0) esiste $K_{A,\varepsilon}$ compatto e chiuso in τ, $K_{A,\varepsilon} \in \mathfrak{L}$ tale che $K_{A,\varepsilon} \subset A$, $\mu(A \setminus K_{A,\varepsilon}) < \varepsilon$;

b) μ è internamente regolare sugli insiemi di misura finita se la condizione (0.2.0) è verificata per ogni $A \in \mathfrak{L}$ con $\mu(A) < +\infty$ e per ogni $\varepsilon > 0$.

0.3. Definizione: Siano $\mathfrak{L}$ σ-algebra su T, $\mu\colon \mathfrak{L} \to [0, +\infty]$ misura, $q \in [1, \infty]$, Z spazio di Banach su $\boldsymbol{R}$. Allora si indica con $\mathfrak{L}^q(\mu, Z)$ [risp. $L^q(\mu, Z)$] lo spazio delle [risp. lo spazio delle (classi di equivalenza di)] applicazioni $z\colon T \to Z$ che siano μ-misurabili e tali che

$$t \in T \mapsto |z(t)|_Z^q \in \boldsymbol{R} \text{ sia sommabile se } 1 \leq q < \infty,$$

$$t \in T \mapsto |z(t)|_Z \in \boldsymbol{R} \text{ sia essenzialmente limitata se } q = \infty.$$

0.4. Definizione: Siano μ, Z come nella Definizione 0.3, $q \in [1, \infty[$. Una famiglia $\mathcal{F} \subset L^q(\mu, Z)$ si dice equiassolutamente integrabile (e.a.i.) in $L^q(\mu, Z)$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esistono

a) $\delta_\varepsilon > 0$ tale che per ogni $E \in \mathfrak{L}$ per cui $\mu(E) < \delta_\varepsilon$ si abbia

$$\left(\int_E |f(t)|_Z^q \, d\mu\right)^{1/q} < \varepsilon \qquad \text{per ogni } f \in \mathcal{F};$$

b) $A_\varepsilon \in \mathfrak{L}$ con $\mu(A_\varepsilon) < +\infty$ per cui

$$\left(\int_{T \setminus A_\varepsilon} |f(t)|_X^q \, d\mu\right)^{1/q} < \varepsilon \qquad \text{per ogni } f \in \mathcal{F} .$$

0.5. Teorema (di Lusin): Siano (T, τ), (X, ϱ) spazi topologici, $\mathfrak{L}$ σ-algebra su T, $\mathfrak{L} \supset \mathcal{B}(\tau)$, $\mu: \mathfrak{L} \to [0, +\infty]$ misura internamente regolare sugli insiemi di misura finita (cfr. Definizione 0.2 *b)*), ϱ sia pseudo-metrizzabile, $f: T \to X$ applicazione μ-misurabile. Allora per ogni $A \in \mathfrak{L}$ con $\mu(A) < +\infty$ e per ogni $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$ esiste un insieme $H(A, \varepsilon)$ compatto e chiuso in τ tale che $H(A, \varepsilon) \subset A$, $\mu(A \setminus H(A, \varepsilon)) < \varepsilon$ e $f|_{H(A,\varepsilon)}$ sia continua.

Dimostrazione: Basta utilizzare il Corollario 4.28 di [BA], applicato ad A, al completamento di $\mu|_{(\mathfrak{L}|A)}$ ed a $f|_A$ per ogni $A \in \mathfrak{L}$ con $\mu(A) < +\infty$, osservando che, come immediata conseguenza della definizione, risulta che il completamento di una misura internamente regolare è ancora internamente regolare.

0.6. Definizione: Siano T insieme, $\mathfrak{L}$ σ-algebra su T, (X, ϱ) spazio topologico, $F: T \to 2^X$ multiapplicazione a valori chiusi. Allora F si dice misurabile se $F^-(A) \in \mathfrak{L}$ per ogni $A \in \varrho$.

0.7. Definizione: Siano (T, τ), (X, ϱ) spazi topologici, $F: T \to 2^X$ multiapplicazione, $t_0 \in T$. Si dice che F è s.c.s. in t_0 se per ogni $A \in \varrho$, $A \supset F(t_0)$ esiste un intorno U di t_0 tale che $F(t) \subset A$ per ogni $t \in U$; F è s.c.i. in t_0 se per ogni $A \in \varrho$ tale che $A \cap F(t_0) \neq \emptyset$ esiste un intorno U di t_0 tale che $A \cap F(t) \neq \emptyset$ per ogni $t \in U$; F è s.c.s. se è s.c.s. in ogni punto di T; F è s.c.i. se è s.c.i. in ogni punto di T.

0.8. Teorema (di Lusin per le multiapplicazioni): Siano (T, τ), (X, ϱ) spazi topologici, $\mathfrak{L}$ σ-algebra su T, $\mathfrak{L} \supset \mathcal{B}(\tau)$, $\mu: \mathfrak{L} \to [0, +\infty]$ misura internamente regolare sugli insiemi di misura finita (cfr. Definizione 0.2 *b)*), ϱ sia metrizzabile e separabile, $F: T \to 2^X$ multiapplicazione misurabile, a valori compatti non vuoti. Allora per ogni $A \in \mathfrak{L}$ con $\mu(A) < +\infty$ e per ogni $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$ esiste un insieme $H(A, \varepsilon)$ compatto e chiuso in τ tale che $H(A, \varepsilon) \subset A$, $\mu(A \setminus H(A, \varepsilon)) < \varepsilon$ e $F|_{H(A,\varepsilon)}$ sia s.c.s. e s.c.i.

Dimostrazione: Basta sfruttare [CV] (Cap. III, Teorema 2 e Definizione 1; Cap II, Corollario 7, Teorema 8 ed osservazione subito dopo il Teorema 6) ed il Teorema 0.5.

0.9. Teorema (di Berge): Siano (T, τ), (X, ϱ) spazi topologici, T compatto, $F: T \to 2^X$ multiapplicazione s.c.s. e a valori compatti. Allora $\bigcup_{t \in T} F(t)$ è compatto.

Dimostrazione: [Be] (Cap. VI, § 1, Teorema 3).

0.10. Teorema: Siano X spazio metrico completo, $H \subset X$ tale che

$$\text{per ogni } \varepsilon \in \boldsymbol{R}_+ \text{ esista } K(\varepsilon) \text{ compatto di } X \text{ per cui } H \subset K(\varepsilon)_\varepsilon .$$

Allora H è relativamente compatto.

Dimostrazione: Basta utilizzare [DS] (Cap. 1, § 6, Teorema 15), sfruttare il fatto che, se $\delta \in \boldsymbol{R}_+$, se $\varepsilon \in \boldsymbol{R}_+$ è tale che $\varepsilon < \delta/2$ e se $x_i \in X$ ($i \in \{1, ..., h\}$) sono tali che $K(\varepsilon) \subset \bigcup_{i=1}^{h} S_X(x_i, \delta/2)$, allora $H \subset \bigcap_{\varepsilon \in \boldsymbol{R}_+} K(\varepsilon)_\varepsilon \subset \bigcup_{i=1}^{h} S_X(x_i, \delta)$, e notando che la totale limitatezza di un sottoinsieme K di X si può definire equivalentemente (cfr. anche [DS], Cap. I, § 6, Definizione 14): «per ogni $\varepsilon \in \boldsymbol{R}_+$ si può coprire K con un numero finito di sfere di raggio ε» (infatti, dato uno di tali ricoprimenti relativo a $\varepsilon/2$ e considerando in ciascuna delle sfere del ricoprimento che intersecano K un punto di K, si ottiene che le sfere centrate in questi nuovi punti e di raggio ε costituiscono ancora un ricoprimento di K).

0.11. Definizione: Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $\mathfrak{K}$ una famiglia di compatti di X. Allora, se $\varepsilon \in \boldsymbol{R}_+$, $\mathfrak{K}$ si dice ε-totalmente limitata se esiste $M(\varepsilon) \in \boldsymbol{Z}_+$ tale che per ogni $K \in \mathfrak{K}$ esistano $S_{K,1}, ..., S_{K,M(\varepsilon)}$ sfere di raggio ε per le quali risulta che $K \subset \bigcup_{i=1}^{M(\varepsilon)} S_{K,i}$; $\mathfrak{K}$ si dice totalmente limitata se è ε-totalmente limitata per ogni $\varepsilon \in \boldsymbol{R}_+$.

0.12. Teorema: Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $K \subset X$. Allora K è contenuto in un insieme σ-compatto se e solo se

(0.12.0) esiste una famiglia $\mathfrak{K}$ numerabile e totalmente limitata (cfr. Definizione 0.11) di compatti di X ($n \in \boldsymbol{N}$) tale che

$$K \subset \bigcup_{H \in \mathfrak{K}} H .$$

Dimostrazione: Da (0.12.0) segue ovviamente che K è contenuto in un insieme σ-compatto.

Viceversa esistano H_n compatti di X ($n \in \boldsymbol{N}$) tali che $K \subset \bigcup_{n \in \boldsymbol{N}} H_n$. Siano $r_n \in \boldsymbol{R}_+$ ($n \in \boldsymbol{N}$) tali che $\lim_{n \to \infty} r_n = 0$ e per ogni $n \in \boldsymbol{N}$ siano $N_n \in \boldsymbol{N}$ e $S_{n,m}$ ($m \in \{0, ..., N_n\}$) sfere chiuse di raggio r_n tali che $H_n \subset \bigcup_{m=0}^{N_n} S_{n,m}$; sia

$$\mathfrak{K} = \{ H_n \cap S_{n,m} \colon m \in \{0, ..., N_n\},\ n \in \boldsymbol{N} \}.$$

Allora $\mathfrak{K}$ è una famiglia numerabile di compatti di X e si proverà che tale famiglia verifica, insieme a K, la condizione (0.12.0). Poichè l'inclusione «$K \subset \bigcup_{H \in \mathfrak{K}} H$» è immediata conseguenza di come è stata scelta $\mathfrak{K}$, basta verificare che $\mathcal{K}$ è totalmente limitata. Sia $\varepsilon \in \boldsymbol{R}_+$ e sia $n_\varepsilon \in \boldsymbol{N}$ tale che $r_n < \varepsilon$ per ogni $n > n_\varepsilon$; poichè $\bigcup_{n=0}^{n_\varepsilon} \bigcup_{m=0}^{N_n} (H_n \cap S_{n,m})$, come unione finita di compatti, è compatto e quindi totalmente limitato, esistono $M(\varepsilon) \in \boldsymbol{Z}_+$, $S_1^\varepsilon, \ldots, S_{M(\varepsilon)}^\varepsilon$ sfere di raggio ε per le quali risulta che $\bigcup_{n=0}^{n_\varepsilon} \bigcup_{m=0}^{N_n} (H_n \cap S_{n,m}) \subset \bigcup_{i=1}^{M(\varepsilon)} S_i^\varepsilon$; d'altra parte ogni insieme $H_n \cap S_{n,m}$ ($m \in \{0, \ldots, N_n\}$, $n \in \boldsymbol{N}$, $n > n_\varepsilon$) è contenuto in una sfera di raggio ε e quindi si conclude.

0.13. Osservazione: Si noti che $\overline{S_{l^2}(0, 1)}$ (ove l^2 indica lo spazio delle successioni reali di quadrato sommabile) non verifica la condizione (0.12.0), poichè non è contenuto in un insieme σ-compatto; per provarlo, tenendo conto che è chiuso, basta mostrare che non è σ-compatto: ciò lo si può vedere ragionando per assurdo, sfruttando che $\overline{S_{l^2}(0, 1)}$, essendo spazio metrico completo e non vuoto, è di seconda categoria, il fatto che un aperto di $\overline{S_{l^2}(0, 1)}$ contiene un aperto di l^2 ed il fatto che le sfere chiuse di raggio positivo di uno spazio di Hilbert di dimensione infinita non sono compatte.

Si noti anche che $\overline{S_{l^2}(0, 1)}$ fornisce un esempio di insieme che, pur essendo la chiusura di un insieme σ-compatto (per vederlo basta utilizzare che è separabile), non è contenuto in alcun insieme σ-compatto.

0.14. Teorema: Siano T insieme, $\mathcal{C}$ σ-algebra su T, μ: $\mathcal{C} \to [0, +\infty]$ misura, inoltre esista τ topologia su T tale che $\mathcal{C} \supset \mathcal{B}(\tau)$ e μ sia σ-finita ed internamente regolare sugli insiemi di misura finita (cfr. Definizione 0.2 *b*)), (X, ϱ) sia spazio topologico pseudo-metrizzabile, f: $T \to X$ applicazione μ-misurabile. Allora esiste $T_0 \in \mathcal{C}$ con $\mu(T \setminus T_0) = 0$ tale che $f(T_0)$ sia un insieme σ-compatto.

Dimostrazione: Basta sfruttare la σ-finitezza di μ, il Teorema 0.5 ed il Teorema di Weierstrass sulla compattezza dell'immagine continua di un compatto.

0.15. Teorema: Siano T insieme, $\mathcal{C}$ σ-algebra su T, X spazio di Banach separabile su $\boldsymbol{R}$, F, G: $T \to 2^X$ multiapplicazioni misurabili a valori chiusi ed inoltre F sia a valori compatti, Γ: $T \to 2^X$ tale che $\Gamma(t) = F(t) \cap G(t)$ per ogni $t \in T$. Allora Γ è una multiapplicazione misurabile.

Dimostrazione: Sia C chiuso di X. Allora la multiapplicazione Φ: $T \to 2^X$, tale che $\Phi(t) = F(t) \cap C$ per ogni $t \in T$, è misurabile per [CV] (Cap. III, seconda parte della Proposizione 12 e Proposizione 11); d'altra parte anche la multiapplicazione Ψ: $T \to 2^X$, tale che $\Psi(t) = -G(t)$ per ogni $t \in T$, è misurabile. Sia ora Σ: $T \to 2^X$ tale che $\Sigma(t) = \Phi(t) + \Psi(t)$ per ogni $t \in T$; allora Σ è misurabile (per vederlo basta applicare [CV] (Cap. III, Teorema 9) ad S, ove $S = \{t \in T: \Phi(t) \neq \emptyset$ e $\Psi(t) \neq \emptyset\}$, e notare che, se φ_n ($n \in \boldsymbol{N}$) [risp. ψ_n

$(n \in \boldsymbol{N})]$ sono selezioni $\mathfrak{L}$-misurabili di $\Phi|_S$ [risp. $\Psi|_S$] tali che

$$\Phi(t) = \overline{\{\varphi_n(t) : n \in \boldsymbol{N}\}} \qquad [\text{risp. } \Psi(t) = \overline{\{\psi_n(t) : n \in \boldsymbol{N}\}}]$$

per ogni $t \in S$, risulta che $\sigma_{n,k} = \varphi_n + \psi_k$ $(n, k \in \boldsymbol{N})$ sono selezioni $\mathfrak{L}$-misurabili di $\Sigma|_S$ tali che $\Sigma(t) = \overline{\{\sigma_{n,k}(t) : n, k \in \boldsymbol{N}\}}$ per ogni $t \in S$) e d'altra parte, essendo $\Phi(t)$ compatto e $\Psi(t)$ chiuso per ogni $t \in T$, si ha che $\Sigma(t) = \Phi(t) + \Psi(t)$ per ogni $t \in T$. Risulta quindi che $\Gamma(t) \cap C = F(t) \cap G(t) \cap C \neq \emptyset$ se e solo se $0 \in \Sigma(t)$; d'altronde $\{t \in T : 0 \in \Sigma(t)\} = \{t \in T : (t, 0) \in \operatorname{gph} \Sigma\} \in \mathfrak{L}$ per [CV] (Cap. III, Proposizione 13). Pertanto $\Gamma^-(C) = \{t \in T : \Gamma(t) \cap C \neq \emptyset\} \in \mathfrak{L}$ per ogni C chiuso di X e si conclude utilizzando [CV] (Cap. III, Proposizione 11).

0.16. Teorema: Siano T insieme, $\mathfrak{L}$ σ-algebra su T, X spazio di Banach separabile su $\boldsymbol{R}$, $f : T \to X$ e $d : T \to [0, +\infty[$ applicazioni $\mathfrak{L}$-misurabili. Sia $F : T \to 2^X$ tale che $F(t) = \{x \in X : |x - f(t)|_X \leq d(t)\}$ per ogni $t \in T$. Allora F è una multiapplicazione misurabile.

Dimostrazione: Basta utilizzare [CV] (Cap. III, Teorema 9) ed osservare che, se Y è un sottoinsieme numerabile e denso di $\overline{S_X(0, 1)}$, risulta che $\{f + yd : y \in Y\}$ è una famiglia numerabile di selezioni $\mathfrak{L}$-misurabili per F tale che $F(t) = \overline{\{f(t) + y\,d(t) : y \in Y\}}$ per ogni $t \in T$.

0.17. Osservazione: Siano T insieme, $\mathfrak{L}$ σ-algebra su T, $\mu : \mathfrak{L} \to [0, +\infty]$ misura, X spazio di Banach su $\boldsymbol{R}$.

Allora per [DS] (Cap. III, § 2, Lemmi 4 e 11 e § 6, Corollario 5) l'insieme $M(\mu, X)$ delle classi (rispetto all'uguaglianza q.o.) di applicazioni μ-misurabili da T in X si può dotare di una metrica che induce la convergenza in misura e che lo rende spazio metrico completo.

Sia $\mathcal{M} \subset \{f : T \to X$ applicazioni μ-misurabili$\}$ tale che il corrispondente insieme in $M(\mu, X)$ sia totalmente limitato. Allora per ogni $\varepsilon \in \boldsymbol{R}_+$ esistono $h(\varepsilon) \in Z_+$, $f_{1,\varepsilon}, \dots, f_{h(\varepsilon),\varepsilon} \in \mathcal{M}$ e per ogni $f \in \mathcal{M}$ esiste $D(f, \varepsilon) \in \mathfrak{L}$ tale che

$$\mu(T \setminus D(f, \varepsilon)) < \varepsilon/2 \quad \text{e} \quad f(t) \in \Big(\bigcup_{i=1}^{h(\varepsilon)} \{f_{i,\varepsilon}(t)\}\Big)_{\varepsilon/2} \qquad \text{per ogni } t \in D(f, \varepsilon)\,.$$

Per ottenere ciò, basta infatti ripetere la prima parte della dimostrazione di [DS] (Cap. IV, § 11, Teorema 1), senza bisogno di passare alle funzioni semplici.

1. - Selezioni in $\mathfrak{L}^p$ di una multiapplicazione misurabile

1.0. Teorema: Siano T insieme, $\mathfrak{L}$ σ-algebra su T, $\mu : \mathfrak{L} \to [0, +\infty]$ misura, X spazio di Banach su $\boldsymbol{R}$, $F : T \to 2^X$ a valori compatti e non vuoti, misurabile e tale che esista $\lambda \in \mathfrak{L}^1(\mu, \boldsymbol{R})$ per la quale risulta

$$\sup\{|x|_X : x \in F(t)\} < \lambda(t) \qquad \text{per ogni } t \in T \tag{1.0.0}$$

e sia $\mathcal{F}$ l'insieme delle selezioni integrabili di F; allora per ogni successione $(f_n)_{n\in N}$, con $f_n \in \mathcal{F}$ per ogni $n \in \boldsymbol{N}$, esistono $f \in L^1(\mu, X)$ ed $(n_k)_{k\in N}$ successione strettamente crescente di naturali tale che per ogni $(k_h)_{h\in N}$ successione strettamente crescente di naturali si abbia che

$$\frac{1}{i+1}\sum_{h=0}^{i} f_{n_{k_h}} \to f \qquad \text{in } L^1(\mu, X).$$

Dimostrazione: Sia $(f_n)_{n\in N}$ successione tale che $f_n \in \mathcal{F}$ per ogni $n \in \boldsymbol{N}$. Visto che da (1.0.0) segue che

$$\sup_{n\in N}\int_T |f_n(t)|_X\, d\mu < \int_T \lambda(t)\, d\mu < +\infty$$

e visto che, per un teorema di Mazur (cfr. [DS], Cap. V, § 2, Teorema 6), $\overline{\mathrm{co}}\, F(t)$ è compatto per ogni $t \in T$, si può applicare il Teorema 3.3 di [Ba] e si ottiene che esistono $f \in L^1(\mu, X)$ ed $(n_k)_{k\in N}$ successione strettamente crescente di naturali tale che per ogni $(k_h)_{h\in N}$ successione strettamente crescente di naturali si abbia che

$$\frac{1}{i+1}\sum_{h=0}^{i} f_{n_{k_h}} \to f \qquad \text{q.o.}.$$

Sfruttando di nuovo (1.0.0) si ricava anche che

$$\left|\frac{1}{i+1}\sum_{h=0}^{i} f_{n_{k_h}}(t)\right|_X < \lambda(t) \qquad \text{per q.o. } t \in T$$

e quindi $\left\{(1/(i+1))\sum_{h=0}^{i} f_{n_{k_h}} : i \in N\right\}$ è una famiglia e.a.i. in $L^1(\mu, X)$ (cfr. Definizione 0.4); utilizzando infine il teorema di convergenza di Vitali si conclude.

1.1. Lemma: Siano T insieme, $\mathfrak{C}$ σ-algebra su T, $\mu: \mathfrak{C} \to [0, +\infty]$ misura, $p \in [1, \infty]$, X spazio di Banach su $\boldsymbol{R}$, $F: T \to 2^X$ a valori chiusi e non vuoti, misurabile, tale che per ogni $n \in \boldsymbol{Z}_+$ esistano $N(n) \in \boldsymbol{Z}_+$, $f_{1,n}, \ldots, f_{N(n),n} \in \mathfrak{L}^p(\mu, X)$ e $\lambda_n \in \mathfrak{L}^p(\mu, \boldsymbol{R})$ per le quali si abbia che:

$$|\lambda_n|_{L^p(\mu,\boldsymbol{R})} < \frac{1}{n}\,; \tag{1.1.0}$$

$$F(t) \subset \bigcup_{i\in\{1,\ldots,N(n)\}} \{x \in X : |x - f_{i,n}(t)|_X < \lambda_n(t)\} \qquad \text{per ogni } t \in T. \tag{1.1.1}$$

Allora:

a) esiste $\lambda \in \mathcal{L}^p(\mu, \boldsymbol{R})$ tale che $\sup \{|x|_X : x \in F(t)\} \leq \lambda(t)$ per ogni $t \in T$;

b) esiste $T_0 \in \mathcal{L}$ con $\mu(T \setminus T_0) = 0$ tale che $F(t)$ sia compatto per ogni $t \in T_0$ e $\bigcup_{t \in T_0} F(t)$ sia separabile ed inoltre, se $p = \infty$, sia $|\lambda_n(t)| < 1/n$ per ogni $t \in T_0$ e per ogni $n \in \boldsymbol{Z}_+$ e, se $p < \infty$, esista $(n_k)_{k \in \boldsymbol{Z}_+}$ successione strettamente crescente di interi positivi tale che si abbia

$$T_0 \subset \bigcup_{h \in \boldsymbol{N}} \bigcap_{k > h} \left\{ t \in T : |\lambda_{n_k}(t)| < \frac{1}{\sqrt{n_k}} \right\}.$$

Dimostrazione: *a*) Basta considerare

$$\lambda(t) = \max \left\{ |f_{i,1}(t)|_X + \lambda_1(t) : i \in \{1, \dots, N(1)\} \right\} \qquad \text{per ogni } t \in T.$$

b) Sia $T_1 \in \mathcal{L}$ con $\mu(T \setminus T_1) = 0$ tale che $f_{i,n}(T_1)$ sia separabile per ogni $i \in \{1, \dots, N(n)\}$ e per ogni $n \in \boldsymbol{Z}_+$.

Sia dapprima $p = \infty$. Sia $N \in \mathcal{L}$ con $\mu(N) = 0$ tale che $|\lambda_n(t)| < 1/n$ per ogni $t \in T \setminus N$; allora, se $T_0 = T_1 \setminus N$, tenendo conto di (1.1.1), risulta che

$$\bigcup_{t \in T_0} F(t) \subset \overline{\bigcup_{n \in \boldsymbol{Z}_+} \bigcup_{i \in \{1, \dots, N(n)\}} f_{i,n}(T_0)}$$

e quindi $\bigcup_{t \in T_0} F(t)$ è separabile; inoltre, per ogni $n \in \boldsymbol{Z}_+$, $\left\{ f_{i,n}(t) : i \in \{1, \dots, N(n)\} \right\}$ è una $(1/n)$-rete per $F(t)$ $(t \in T_0)$ e pertanto $F(t)$ è compatto essendo chiuso e totalmente limitato $(t \in T_0)$.

Sia ora $p < \infty$. Per la diseguaglianza di Tchebychev e per (1.1.0) per ogni $n \in \boldsymbol{Z}_+$ si ha che

$$\mu\left(\left\{ t \in T : |\lambda_n(t)| > \frac{1}{\sqrt{n}} \right\}\right) \cdot \frac{1}{n^{p/2}} \leq \int_T |\lambda_n(t)|^p \, d\mu \leq \frac{1}{n^p}$$

e quindi

$$\mu\left(\left\{ t \in T : |\lambda_n(t)| > \frac{1}{\sqrt{n}} \right\}\right) \leq \frac{1}{n^{p/2}}.$$

Sia $(n_k)_{k \in \boldsymbol{Z}_+}$ successione strettamente crescente di interi positivi tale che $(1/n_k^{p/2})_{k \in \boldsymbol{Z}_+}$ sia sommabile e sia

$$N = \bigcap_{h \in \boldsymbol{N}} \bigcup_{k > h} \left\{ t \in T : |\lambda_{n_k}(t)| > \frac{1}{\sqrt{n_k}} \right\}.$$

Allora $N \in \mathcal{L}$ e

$$\mu(N) \leq \mu\left(\bigcup_{k > h} \left\{ t \in T : |\lambda_{n_k}(t)| > \frac{1}{\sqrt{n_k}} \right\} \right) \leq \sum_{k > h} \frac{1}{n_k^{p/2}} \qquad \text{per ogni } h \in \boldsymbol{N}$$

e, visto che $(1/n_k^{\varepsilon/2})_{k\in Z_+}$ è sommabile, ne segue che $\mu(N) = 0$. Sia ora $T_0 = T_1 \setminus N$; allora

$$T_0 \subset \bigcup_{h\in N} \bigcap_{k>h} \left\{t \in T: |\lambda_{n_k}(t)| < \frac{1}{\sqrt{n_k}}\right\}.$$

Sia $t \in T_0$; allora esiste $b(t) \in \boldsymbol{N}$ tale che $|\lambda_{n_k}(t)| < 1/\sqrt{n_k}$ per ogni $k > b(t)$. Sia $x \in F(t)$; sfruttando (1.1.1), per ogni $k \in \boldsymbol{Z}_+$ esiste $i_k \in \{1, \dots, N(n_k)\}$ tale che $|x - f_{i_k,n_k}(t)|_X < \lambda_{n_k}(t)$ e pertanto $|x - f_{i_k,n_k}(t)|_X < 1/\sqrt{n_k}$ per ogni $k > b(t)$. Perciò

$$\bigcup_{t\in T_0} F(t) \subset \overline{\bigcup_{n\in \boldsymbol{Z}_+} \bigcup_{i\in\{1,\dots,N(n)\}} f_{i,n}(T_0)}$$

e quindi $\bigcup_{t\in T_0} F(t)$ è separabile; inoltre, per ogni $k \in \boldsymbol{Z}_+$, $k > b(t)$, l'insieme $\{f_{i,n_k}(t): i \in \{1, \dots, N(n_k)\}\}$ è una $(1/\sqrt{n_k})$-rete per $F(t)$ $(t \in T_0)$ e pertanto $F(t)$ è compatto essendo chiuso e totalmente limitato $(t \in T_0)$.

1.2. Lemma: Siano T insieme, $\mathfrak{C}$ σ-algebra su T, X spazio di Banach separabile su $\boldsymbol{R}$, $F: T \to 2^X$ a valori compatti e non vuoti, misurabile, tale che per ogni $n \in \boldsymbol{Z}_+$ esistano $N(n) \in \boldsymbol{Z}_+$, $F_{1,n}, \dots, F_{N(n),n}: T \to 2^X$ misurabili e a valori chiusi e $d_n: T \to [0, +\infty[$ funzione $\mathfrak{C}$-misurabile per le quali si abbia che $\operatorname{diam}(F_{i,n}(t)) < d_n(t)$ $(i \in \{1, \dots, N(n)\})$ e $F(t) \subset \bigcup_{i\in\{1,\dots,N(n)\}} F_{i,n}(t)$ per ogni $t \in T$. Allora esistono per ogni $n \in \boldsymbol{Z}_+$ un insieme $M(n) \subset \boldsymbol{Z}_+^n$, una famiglia $\{D_\delta: \delta \in M(n)\} \subset \mathfrak{C}$ ed una famiglia $\{F_\delta: \delta \in M(n)\}$ di multiapplicazioni misurabili, con F_δ definita su D_δ ed a valori nelle sfere chiuse di X, $\operatorname{diam}(F_\delta(t)) = 2d_n(t)$ per ogni $t \in D_\delta$ e $\delta \in M(n)$ tali che, se si definisce $\Delta(\delta) = \{\gamma \in \boldsymbol{Z}_+: (\delta_1, \dots, \delta_m, \gamma) \in M(m+1)\}$ per ogni $m \in \boldsymbol{Z}_+$, $\delta \in M(m)$, si abbia che

(1.2.0) $M(m) = \{(\delta_1, \dots, \delta_m): \delta \in M(n)\}$ per ogni (m, n), con $m, n \in \boldsymbol{Z}_+$, $m < n$,

(1.2.1) $M(1)$ sia un segmento iniziale di $\boldsymbol{Z}_+$ e, per ogni $m \in \boldsymbol{Z}_+$, $\delta \in M(m)$, l'insieme $\Delta(\delta)$ sia un segmento iniziale di $\boldsymbol{Z}_+$,

(1.2.2) per ogni $t \in T$ l'insieme $\{F_\delta(t): \delta \in \{\vartheta \in M(1): t \in D_\vartheta\}\}$ sia un ricoprimento di $F(t)$ costituito da sfere chiuse di raggio $d_1(t)$ centrate in punti di $F(t)$ e, per ogni $m \in \boldsymbol{Z}_+$, $\delta \in M(m)$,

$$t \in \left\{s \in \bigcap_{k=1}^{m} D_{(\delta_1,\dots,\delta_k)}: F(s) \cap \left(\bigcap_{k=1}^{m} F_{(\delta_1,\dots,\delta_k)}(s)\right) \neq \emptyset\right\},$$

l'insieme

$$\left\{F_{(\delta_1,\dots,\delta_m,\gamma)}(t): \gamma \in \{\vartheta \in \Delta(\delta): t \in D_{(\delta_1,\dots,\delta_m,\vartheta)}\}\right\}$$

sia un ricoprimento di $F(t) \cap \left(\bigcap_{k=1}^{m} F_{(\delta_1,\dots,\delta_k)}(t)\right)$ costituito da sfere chiuse di raggio $d_{m+1}(t)$ centrate in punti di $F(t) \cap \left(\bigcap_{k=1}^{m} F_{(\delta_1,\dots,\delta_k)}(t)\right)$, (1.2.3) $\quad T = \bigcup_{\delta \in M(m)} \left\{ t \in \bigcap_{k=1}^{m} D_{(\delta_1, \dots, \delta_k)} : F(t) \cap \left(\bigcap_{k=1}^{m} F_{(\delta_1, \dots, \delta_k)}(t) \right) \neq \emptyset \right\}$ per ogni $m \in \boldsymbol{Z}_+$,

(1.2.4) $\quad M(1) = \{1, \dots, N(1)\}$ e $\Delta(\delta) = \{1, \dots, N(m+1)\}$ per ogni $m \in \boldsymbol{Z}_+$, $\delta \in M(m)$.

Dimostrazione: Si proverà la tesi per induzione.

Per $n = 1$ e per $i \in \{1, \dots, N(1)\}$ siano $A_{i,1} = \{t \in T: F(t) \cap F_{i,1}(t) \neq \emptyset\}$ ed $f_{i,1}: A_{i,1} \to X$ applicazione $\mathfrak{L}$-misurabile tale che $f_{i,1}(t) \in F(t) \cap F_{i,1}(t)$ per ogni $t \in A_{i,1}$ (una tale applicazione esiste per il Teorema 0.15 e per [CV] (Cap. III, Teorema 6)), sia $M(1) = \{1, \dots, N(1)\}$ e per ogni $\delta \in M(1)$ sia $D_\delta = A_{\delta,1}$, $F_\delta: D_\delta \to 2^X$ tale che $F_\delta(t) = \{x \in X: |x - f_{\delta,1}(t)|_X < d_1(t)\}$ per ogni $t \in D_\delta$; allora ogni insieme D_δ è in $\mathfrak{L}$ ed ogni F_δ è misurabile per il Teorema 0.16 e risulta

$$F(t) = \bigcup_{i \in \{1, \dots, N(1)\}} (F(t) \cap F_{i,1}(t)) \subset \bigcup_{i \in \{1, \dots, N(1)\}: t \in A_{i,1}} F_{i,1}(t) \subset \bigcup_{\delta \in M(1): t \in D_\delta} F_\delta(t)$$

per ogni $t \in T$ e pertanto si ha anche che $T = \bigcup_{\delta \in M(1)} \{t \in D_\delta: F(t) \cap F_\delta(t) \neq \emptyset\}$.

Sia ora $n \in \boldsymbol{Z}_+$ tale che per ogni $h \in \boldsymbol{Z}_+$, $h < n$, esistano un insieme $M(h) \subset \boldsymbol{Z}_+^h$, una famiglia $\{D_\delta: \delta \in M(h)\} \subset \mathfrak{L}$ ed una famiglia $\{F_\delta: \delta \in M(h)\}$ di multiapplicazioni verificanti le condizioni dell'enunciato e tali che valgano la condizione (1.2.0) per le coppie (m, h), con $m < h < n$, le condizioni (1.2.1), (1.2.2) e (1.2.4) per gli $m \in \boldsymbol{Z}_+$, $m < n$ e la condizione (1.2.3) per gli $m \in \boldsymbol{Z}_+$, $m < n$.

Allora basta definire

$$M(n+1) = \{(\delta_1, \dots, \delta_n, \gamma): \delta \in M(n), \gamma \in \{1, \dots, N(n+1)\}\}$$

e, se $\delta \in M(n)$, basta osservare che dal Teorema 0.15 segue la misurabilità di

$$t \in \bigcap_{k=1}^{n} D_{(\delta_1, \dots, \delta_k)} \mapsto F(t) \cap \left(\bigcap_{k=1}^{n} F_{(\delta_1, \dots, \delta_k)}(t) \right) \in 2^X$$

e di

$$t \in \bigcap_{k=1}^{n} D_{(\delta_1, \dots, \delta_k)} \mapsto F(t) \cap \left(\bigcap_{k=1}^{n} F_{(\delta_1, \dots, \delta_k)}(t) \right) \cap F_{i,n+1}(t) \in 2^X \qquad (i \in \{1, \dots, N(n+1)\}),$$

per cui, se $i \in \{1, \dots, N(n+1)\}$ e se

$$A_{i,n+1,\delta} = \left\{ t \in \bigcap_{k=1}^{n} D_{(\delta_1, \dots, \delta_k)} : F(t) \cap \left(\bigcap_{k=1}^{n} F_{(\delta_1, \dots, \delta_k)}(t) \right) \cap F_{i,n+1}(t) \neq \emptyset \right\},$$

per [CV] (Cap. III, Teorema 6) esiste $f_{i,n+1,\delta}: A_{i,n+1,\delta} \to X$ applicazione $\mathfrak{L}$-misurabile tale che

$$f_{i,n+1,\delta}(t) \in F(t) \cap \Big(\bigcap_{k=1}^{n} F_{(\delta_1,\dots,\delta_k)}(t)\Big) \cap F_{i,n+1}(t) \qquad \text{per ogni } t \in A_{i,n+1,\delta}$$

e basta definire $D_{(\delta_1,\dots,\delta_n,\gamma)} = A_{\gamma,n+1,\delta}$ e $F_{(\delta_1,\dots,\delta_n,\gamma)}\colon D_{(\delta_1,\dots,\delta_n,\gamma)} \to 2^X$ tale che

$$F_{(\delta_1,\dots,\delta_n,\gamma)}(t) = \{x \in X\colon |x - f_{\gamma,n+1,\delta}(t)|_X < d_{n+1}(t)\} \qquad \text{per ogni } t \in D_{(\delta_1,\dots,\delta_n,\gamma)}$$

$(\gamma \in \Delta(\delta) = \{1, \dots, N(n+1)\})$; infatti ogni $F_{(\delta_1,\dots,\delta_n,\gamma)}$ è misurabile per il Teorema 0.16 e risulta

$$F(t) \cap \Big(\bigcap_{k=1}^{n} F_{(\delta_1,\dots,\delta_k)}(t)\Big) = \bigcup_{i\in\{1,\dots,N(n+1)\}} \Big(F(t) \cap \Big(\bigcap_{k=1}^{n} F_{(\delta_1,\dots,\delta_k)}(t)\Big) \cap F_{i,n+1}(t)\Big) \subset$$

$$\subset \bigcup_{i\in\{1,\dots,N(n+1)\}\colon t\in A_{i,n+1,\delta}} F_{i,n+1}(t) \subset \bigcup_{\gamma\in\Delta(\delta)\colon t\in D_{(\delta_1,\dots,\delta_n,\gamma)}} F_{(\delta_1,\dots,\delta_n,\gamma)}(t)$$

per ogni $t \in \Big\{t \in \bigcap_{k=1}^{n} D_{(\delta_1,\dots,\delta_k)}\colon F(t) \cap \Big(\bigcap_{k=1}^{n} F_{(\delta_1,\dots,\delta_k)}(t)\Big) \neq \emptyset\Big\}$; pertanto si ha anche che

$$\Big\{t \in \bigcap_{k=1}^{n} D_{(\delta_1,\dots,\delta_k)}\colon F(t) \cap \Big(\bigcap_{k=1}^{n} F_{(\delta_1,\dots,\delta_k)}(t)\Big) \neq \emptyset\Big\} =$$

$$= \bigcup_{\gamma\in\Delta(\delta)} \Big\{t \in D_{(\delta_1,\dots,\delta_n,\gamma)}\colon F(t) \cap \Big(\bigcap_{k=1}^{n} F_{(\delta_1,\dots,\delta_k)}(t)\Big) \cap F_{(\delta_1,\dots,\delta_n,\gamma)}(t) \neq \emptyset\Big\}$$

e quindi, sfruttando la validità di (1.2.3) per n, si ricava la validità della stessa condizione per $n+1$.

1.3. Lemma: Siano $M(n) \subset \mathbf{Z}_+^n$ $(n \in \mathbf{Z}_+)$ insiemi verificanti (1.2.0) e (1.2.1). Siano $\Sigma(n) = \{\sigma\colon \{1, \dots, \text{card } M(n)\} \to M(n)$, σ applicazione bigettiva tale che, se $m \in \mathbf{Z}_+$, $m < n$, se $k, b \in \{1, \dots, \text{card } M(n)\}$, se $\sigma(k)_i = \sigma(b)_i$ per ogni $i \in \{1, \dots, m\}$, si abbia che $\sigma(k)_i = \sigma(j)_i$ per ogni $j \in \{1, \dots, \text{card } M(n)\}$ per il quale $(j-k)(b-j) > 0$ e per ogni $i \in \{1, \dots, m\}\}$.

Sia $\delta \in M(n)$. Allora esiste $\sigma \in \Sigma(n)$ tale che $\sigma(1) = \delta$.

Dimostrazione: Si proverà per induzione che per ogni $m \in \{1, \dots, n\}$ esiste $\sigma_m \in \Sigma(m)$ tale che $\sigma_m(1) = (\delta_1, \dots, \delta_m)$.

Si ha $\Sigma(1) = \{\sigma\colon \{1, \dots, \text{card } M(1)\} \to M(1)$, σ applicazione bigettiva$\}$ e quindi per $m = 1$ esiste $\sigma_1 \in \Sigma(1)$ tale che $\sigma_1(1) = \delta_1$. Sia $m \in \mathbf{Z}_+$, $m < n$ tale che esista $\sigma_m \in \Sigma(m)$ per cui $\sigma_m(1) = (\delta_1, \dots, \delta_m)$; allora basta definire $\sigma_{m+1} \in \Sigma(m+1)$ in modo che:

$$\sigma_{m+1}(1) = (\delta_1, \dots, \delta_{m+1}),$$

$$\sigma_{m+1}|_{\{1,\dots,\text{card } \Delta(\delta_1,\dots,\delta_m)\}}\colon \{1, \dots, \text{card } \Delta(\delta_1, \dots, \delta_m)\} \to$$

$$\to \{(\delta_1, \dots, \delta_m, \gamma)\colon \gamma \in \mathbf{Z}_+\} \cap M(m+1)$$

applicazione bigettiva,

$$\sigma_{m+1}|_{\{1+\sum_{i=1}^{j}\operatorname{card}\Delta(\sigma_m(i)),\dots,\sum_{i=1}^{j+1}\operatorname{card}\Delta(\sigma_m(i))\}}:\left\{1+\sum_{i=1}^{j}\operatorname{card}\Delta(\sigma_m(i)),\dots,\sum_{i=1}^{j+1}\operatorname{card}\Delta(\sigma_m(i))\right\}\to$$
$$\to\{(\sigma_m(j+1),\gamma):\gamma\in\boldsymbol{Z}_+\}\cap M(m+1)$$

applicazione bigettiva per ogni $j\in\{1,\dots,\operatorname{card}M(m)-1\}$ $\big($ove $\Delta(\eta)$ $(\eta\in M(k),$ $k\in\boldsymbol{Z}_+)$ sono definiti come nell'enunciato del Lemma 1.2$\big)$.

1.4. Lemma: Siano T insieme, $\mathfrak{L}$ σ-algebra su T, $\mu\colon\mathfrak{L}\to[0,+\infty]$ misura, X spazio di Banach separabile su $\boldsymbol{R}$, $F\colon T\to 2^X$ a valori compatti e non vuoti, misurabile, tale che per ogni $n\in\boldsymbol{Z}_+$ esistano $N(n)\in\boldsymbol{Z}_+$, $F_{1,n},\dots$ $\dots,F_{N(n),n}\colon T\to 2^X$ misurabili e a valori chiusi e $d_n\colon T\to[0,+\infty[$ funzione μ-misurabile per le quali si abbia che $\operatorname{diam}(F_{i,n}(t))<d_n(t)$ $(i\in\{1,\dots,N(n)\})$ e $F(t)\subset\bigcup_{i\in\{1,\dots,N(n)\}}F_{i,n}(t)$ per ogni $t\in T$. Per ogni $n\in\boldsymbol{Z}_+$ siano $M(n)$, D_δ, F_δ $(\delta\in M(n))$, $\Sigma(n)$ come nei Lemmi 1.2 e 1.3. Per ogni $\delta\in M(n)$ sia

$$T_\delta=\left\{t\in\bigcap_{k=1}^{n}D_{(\delta_1,\dots,\delta_k)}:F(t)\cap\left(\bigcap_{k=1}^{n}F_{(\delta_1,\dots,\delta_k)}(t)\right)\neq 0\right\}$$

e per ogni $\sigma\in\Sigma(n)$, $k\in\{1,\dots,\operatorname{card}M(n)\}$, sia

$$U_{\sigma,k}=\begin{cases}T_{\sigma(1)} & \text{se } k=1\,,\\ T_{\sigma(k)}\setminus\left(\bigcup_{h=1}^{k-1}T_{\sigma(h)}\right) & \text{se } k>1\,.\end{cases}$$

Allora:

a) T_δ, $U_{\sigma,k}\in\mathfrak{L}$, $U_{\sigma,k}\cap U_{\sigma,h}=0$ se $k\neq h$ $(\delta\in M(n)$, $\sigma\in\Sigma(n)$, $k,h\in\{1,\dots$ $\dots,\operatorname{card}M(n)\})$, $T=\bigcup_{\delta\in M(n)}T_\delta=\bigcup_{k\in\{1,\dots,\operatorname{card}M(n)\}}U_{\sigma,k}$ $(\sigma\in\Sigma(n))$.

Siano $m\in\boldsymbol{Z}_+$, $m>1$, $\varrho\in\Sigma(m)$ e $n\in\boldsymbol{Z}_+$, $n<m$. Allora:

b) esiste $\sigma\in\Sigma(n)$ tale che per ogni $j\in\{1,\dots,\operatorname{card}M(m)\}$ esista $k_j\in$ $\in\{1,\dots,\operatorname{card}M(n)\}$ per cui $U_{\varrho,j}\subset U_{\sigma,k_j}$ e $\sigma(k_j)=(\varrho(j)_1,\dots,\varrho(j)_n)$.

Dimostrazione: La parte *a)* è conseguenza del Teorema 0.15, di (1.2.3) e delle definizioni date.

Per quanto riguarda *b)*, per induzione si costruiscano degli elementi $j_k\in$ $\in\{1,\dots,\operatorname{card}M(m)\}$ $(k\in\{1,\dots,\operatorname{card}M(n)\})$ tali che $j_1=1$,

$$j_{k+1}=1+\sum_{i=1}^{k}\operatorname{card}\{\gamma\in\boldsymbol{Z}_+^{m-n}:(\varrho(j_i)_1,\dots,\varrho(j_i)_n,\gamma)\in M(m)\}$$
$$\text{se } k\in\boldsymbol{Z}_+,\ k<\operatorname{card}M(n)$$

$\Big($si osservi che, grazie a (1.2.0) ed al fatto che $\varrho \in \Sigma(m)$, si ha che

$\sum_{i=1}^{k} \operatorname{card}\{y \in \boldsymbol{Z}_+^{m-n} : (\varrho(j_i)_1, \ldots, \varrho(j_i)_n, y) \in M(m)\} < \operatorname{card} M(m)$ se $k < \operatorname{card} M(n)\Big)$;

sia

$$\sigma(k) = (\varrho(j_k)_1, \ldots, \varrho(j_k)_n) \qquad \text{per ogni } k \in \{1, \ldots, \operatorname{card} M(n)\}\,;$$

sia inoltre

$$j_{1+\operatorname{card} M(n)} = 1 + \operatorname{card} M(m)\,;$$

per ogni $j \in \{1, \ldots, \operatorname{card} M(m)\}$ sia

$$k_j = \max\{k \in \{1, \ldots, \operatorname{card} M(n)\} : j_k < j\}\,;$$

allora risulta che

$$(1.4.0) \qquad \bigcup_{j \in \{1, \ldots, \operatorname{card} M(m)\} \text{ tali che } k_j = k} U_{\varrho,j} = \bigcup_{j=j_k}^{j_{k+1}-1} U_{\varrho,j} = U_{\sigma,k}\,,$$

in cui la seconda uguaglianza sarà provata sotto; da (1.4.0) segue che $U_{\varrho,j} \subset U_{\sigma,k_j}$ per ogni $j \in \{1, \ldots, \operatorname{card} M(m)\}$ e cioè la prima parte della tesi; per ottenere la seconda delle uguaglianze di (1.4.0) basta notare che per ogni $b \in \{1, \ldots, \operatorname{card} M(n)\}$ risulta

$$(\varrho(j)_1, \ldots, \varrho(j)_n) = \sigma(b) \qquad \text{se e solo se } j \in \{j_b, \ldots, j_{b+1} - 1\}$$

(e quindi, essendo $j_{k_j} < j < j_{k_j+1}$ per ogni $j \in \{1, \ldots, \operatorname{card} M(m)\}$, vale la seconda parte della tesi) e pertanto, definendo $E_i = \bigcap_{k=1}^{m} D_{(\varrho(i)_1, \ldots, \varrho(i)_k)}$, sfruttando (1.2.2) ed il principio di induzione, si ottiene che

$$F(t) \cap \Big(\bigcap_{k=1}^{n} F_{(\sigma(h)_1, \ldots, \sigma(h)_k)}(t)\Big) = \bigcup_{i \in \{j_h, \ldots, j_{h+1}-1\} : t \in E_i} \Big(F(t) \cap \Big(\bigcap_{k=1}^{m} F_{(\varrho(i)_1, \ldots, \varrho(i)_k)}(t)\Big)\Big)$$

per ogni $t \in \bigcap_{k=1}^{n} D_{(\sigma(h)_1, \ldots, \sigma(h)_k)}$ e quindi $T_{\sigma(h)} = \bigcup_{i=j_h}^{j_{h+1}-1} T_{\varrho(i)}$, per cui $\bigcup_{h=1}^{k-1} T_{\sigma(h)} = \bigcup_{i=1}^{j_k-1} T_{\varrho(i)}$ (se $k > 1$); pertanto

$$U_{\sigma,1} = \bigcup_{i=j_1}^{j_2-1} T_{\varrho(i)} = \bigcup_{i=j_1}^{j_2-1} U_{\varrho,i}\,,$$

$$U_{\sigma,k} = \Big(\bigcup_{i=j_k}^{j_{k+1}-1} T_{\varrho(i)}\Big) \setminus \Big(\bigcup_{i=1}^{j_k-1} T_{\varrho(i)}\Big) = \bigcup_{i=j_k}^{j_{k+1}-1} \Big(T_{\varrho(i)} \setminus \Big(\bigcup_{h=1}^{i-1} T_{\varrho(h)}\Big)\Big) = \bigcup_{i=j_k}^{j_{k+1}-1} U_{\varrho,i} \quad (\text{se } k > 1)\,.$$

1.5. Lemma: Siano T insieme, $\mathfrak{L}$ σ-algebra su T, $\mu\colon \mathfrak{L} \to [0, +\infty]$ misura, $p \in [1, \infty]$, X spazio di Banach su $\boldsymbol{R}$, $F\colon T \to 2^X$ a valori chiusi e non vuoti, misurabile, tale che esistano $T_0 \in \mathfrak{L}$ con $\mu(T \setminus T_0) = 0$ e $\mathcal{F}_0$ sottoinsieme numerabile di $\mathfrak{L}^p(\mu|_{(\mathfrak{L}\cap T_0)}, X)$ tali che l'insieme di $L^p(\mu|_{(\mathfrak{L}\cap T_0)}, X)$ corrispondente a $\mathcal{F}_0$ sia relativamente compatto e si abbia $\overline{\{f(t)\colon f \in \mathcal{F}_0\}} = F(t)$ per ogni $t \in T_0$. Inoltre valga almeno una fra le due seguenti condizioni:

i) $\bigcup_{t\in T} F(t)$ sia separabile,

ii) μ sia completa e $F(t)$ sia separabile per ogni $t \in T$.

Allora esiste un sottoinsieme $\mathcal{F}$ numerabile di $\mathfrak{L}^p(\mu, X)$ tale che

il corrispondente insieme di $L^p(\mu, X)$ sia relativamente compatto,

$$\overline{\{f(t)\colon f \in \mathcal{F}\}} = F(t) \qquad \text{per ogni } t \in T.$$

Dimostrazione: Sia φ una selezione μ-misurabile per F (si sfrutti [CV], Cap. III, Teorema 6 (se vale i)), si utilizzi che ogni elemento di $\mathcal{F}_0$ è una selezione μ-misurabile per $F|_{T_0}$ e si usi l'assioma di scelta per provare l'esistenza di una selezione per $F|_{T\setminus T_0}$, che risulterà μ-misurabile per la completezza di μ (se vale ii))), sia $\mathcal{F}_1 = \{f\colon T \to X\colon f|_{T_0} \in \mathcal{F}_0, f(t) = \varphi(t) \text{ per ogni } t \in T \setminus T_0\}$. Allora $\mathcal{F}_1$ è una famiglia numerabile di selezioni μ-misurabili per F tale che il corrispondente insieme di $L^p(\mu, X)$ sia relativamente compatto; sia ora

$$G\colon T \to 2^X \text{ tale che } G(t) = \begin{cases} \{\varphi(t)\} & \text{se } t \in T_0, \\ F(t) & \text{se } t \in T \setminus T_0. \end{cases}$$

Allora G è una multiapplicazione misurabile e a valori chiusi e non vuoti. Esiste quindi (se vale i) si sfrutti [CV], Cap. III, Teorema 7 e se vale ii) si considerino per ogni $t \in T \setminus T_0$ degli elementi $x_n(t) \in F(t)$ $(n \in \boldsymbol{N})$ tali che $\overline{\{x_n(t)\colon n \in \boldsymbol{N}\}} = F(t)$ e si sfrutti che ciascuna x_n è μ-misurabile per la completezza di μ) una famiglia numerabile $\mathfrak{G}$ di selezioni μ-misurabili per G tale che $\overline{\{f(t)\colon f \in \mathfrak{G}\}} = G(t)$ per ogni $t \in T$; inoltre il corrispondente insieme di $L^p(\mu, X)$ risulta ovviamente relativamente compatto; considerando pertanto $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cup \mathfrak{G}$, si ottiene la tesi.

1.6. Teorema: Siano T insieme, $\mathfrak{L}$ σ-algebra su T, $\mu\colon \mathfrak{L} \to [0, +\infty]$ misura, $p \in [1, \infty]$, X spazio di Banach su $\boldsymbol{R}$, $F\colon T \to 2^X$ a valori chiusi e non vuoti, misurabile, tale che per ogni $n \in \boldsymbol{Z}_+$ esistano $N(n) \in \boldsymbol{Z}_+$, $f_{1,n}, \ldots$ $\ldots, f_{N(n),n} \in \mathfrak{L}^p(\mu, X)$ e $\lambda_n \in \mathfrak{L}^p(\mu, \boldsymbol{R})$ per le quali valgano

$$|\lambda_n|_{L^p(\mu,\boldsymbol{R})} < \frac{1}{n} \tag{1.6.0}$$

e

$$F(t) \subset \bigcup_{i\in\{1,\ldots,N(n)\}} \{x \in X\colon |x - f_{i,n}(t)|_X \leq \lambda_n(t)\} \qquad \text{per q.o. } t \in T; \tag{1.6.1}$$

inoltre valga almeno una fra le due seguenti condizioni:

i) $\bigcup_{t \in T} F(t)$ sia separabile,

ii) μ sia completa e $F(t)$ sia separabile per ogni $t \in T$.

Allora esiste un sottoinsieme $\mathcal{F}$ numerabile di $\mathfrak{L}^p(\mu, X)$ tale che

(1.6.2) il corrispondente insieme di $L^p(\mu, X)$ sia relativamente compatto,

(1.6.3) $\overline{\{f(t): f \in \mathcal{F}\}} = F(t)$ per ogni $t \in T$.

Dimostrazione: Essendo $\{f_{i,n}: i \in \{1, \dots, N(n)\},\ n \in \boldsymbol{Z}_+\}$ una famiglia numerabile di applicazioni μ-misurabili e sfruttando (1.6.1) ed il Lemma 1.1 *b*), esiste $T_0 \in \mathfrak{L}$ con $\mu(T \setminus T_0) = 0$ tale che valga l'inclusione di (1.6.1) per ogni $t \in T_0$, $F(t)$ sia compatto per ogni $t \in T_0$, $\bigcup_{t \in T_0} F(t)$ sia separabile, $f_{i,n}(T_0)$ sia separabile per ogni $i \in \{1, \dots, N(n)\}$ e $n \in \boldsymbol{Z}_+$ ed inoltre, se $p = \infty$, sia $|\lambda_n(t)| < 1/n$ per ogni $t \in T_0$ e per ogni $n \in \boldsymbol{Z}_+$ e, se $p < \infty$, esista $(n_k)_{k \in \boldsymbol{Z}_+}$ successione strettamente crescente di interi positivi tale che si abbia

$$T_0 \subset \bigcup_{h \in N} \bigcap_{k > h} \left\{ t \in T: |\lambda_{n_k}(t)| < \frac{1}{\sqrt{n_k}} \right\};$$

quindi è separabile anche l'insieme

$$Z = \Big(\bigcup_{t \in T_0} F(t) \Big) \cup \Big(\bigcup_{n \in \boldsymbol{Z}_+} \bigcup_{i \in \{1, \dots, N(n)\}} f_{i,n}(T_0) \Big).$$

Siano $F_{i,n}: T_0 \to 2^X$ tali che

$$F_{i,n}(t) = \{x \in \overline{\mathrm{sp}\,(Z)}: |x - f_{i,n}(t)|_X < \lambda_n(t)\}$$
$$\text{per ogni } t \in T_0 \ (i \in \{1, \dots, N(n)\},\ n \in \boldsymbol{Z}_+).$$

Allora per ogni $i \in \{1, \dots, N(n)\}$ e $n \in \boldsymbol{Z}_+$ si ha che $F_{i,n}$ è misurabile per il Teorema 0.16. Sia ora $n \in \boldsymbol{Z}_+$ e siano $M(n)$, D_δ, F_δ $(\delta \in M(n))$, $\Sigma(n)$ come nei Lemmi 1.2 e 1.3 e T_δ $(\delta \in M(n))$, $U_{\sigma,k}$ $(\sigma \in \Sigma(n),\ k \in \{1, \dots, \mathrm{card}\, M(n)\})$ come nel Lemma 1.4 relativamente a $F|_{T_0}: T_0 \to 2^{\overline{\mathrm{sp}\,(Z)}}$ ed a $d_n: t \in T_0 \mapsto 2|\lambda_n(t)| \in [0, +\infty[$. Sia $\Phi_\sigma: T_0 \to 2^{\overline{\mathrm{sp}\,(Z)}}$ tale che

$$\Phi_\sigma(t) = F(t) \cap \Big(\bigcap_{h=1}^{n} F_{(\sigma(k)_1, \dots, \sigma(k)_n)}(t) \Big)$$
$$\text{se } t \in U_{\sigma,k} \ (k \in \{1, \dots, \mathrm{card}\, M(n)\}) \ (\sigma \in \Sigma(n),\ n \in \boldsymbol{Z}_+).$$

Allora, tenendo conto del Lemma 1.4 *a*), del fatto che $t \in U_{\sigma,k} \mapsto F(t) \cap \Big(\bigcap_{h=1}^{n} F_{(\sigma(k)_1, \dots, \sigma(k)_n)}(t) \Big) \in 2^{\overline{\mathrm{sp}\,(Z)}}$ è una multiapplicazione misurabile, a valori compatti (per il Teorema 0.15 ed essendo $F(t)$ compatto per ogni $t \in T_0$ e $U_{\sigma,k} \subset T_0$) e non vuoti, Φ_σ è una multiapplicazione misurabile, a valori compatti e non vuoti. Sia f_σ (cfr. [CV], Cap. III, Teorema 6) una selezione μ-misurabile per Φ_σ e sia $\mathcal{F}_0 = \{f_\sigma \colon \sigma \in \Sigma(n),\ n \in \boldsymbol{Z}_+\}$. Allora $\mathcal{F}_0$ è numerabile e si ha che

$$\overline{\{f(t) \colon f \in \mathcal{F}_0\}} = F(t) \qquad \text{per ogni } t \in T_0 .$$

Infatti, se $t \in T_0$, $y \in F(t)$ ed $\varepsilon \in \boldsymbol{R}_+$, scegliendo $n \in \boldsymbol{Z}_+$ tale che $1/n < \varepsilon/4$ (se $p = \infty$)

$\Big[$risp. scegliendo $k \in \boldsymbol{Z}_+$ tale che $\dfrac{1}{\sqrt{n_k}} < \dfrac{\varepsilon}{4}$, $k > h(t)$ ove $h(t) \in \boldsymbol{N}$ è tale che

$$t \in \bigcup_{k > h(t)} \left\{ t \in T \colon |\lambda_{n_k}(t)| < \frac{1}{\sqrt{n_k}} \right\} \ (\text{se } p < \infty)\Big],$$

per definizione di T_0 e per il Lemma 1.2 esiste $\delta \in M(n)$ [risp. $\delta \in M(n_k)$] tale che

$$t \in \bigcap_{h=1}^{n} D_{(\delta_1, \dots, \delta_h)}, \qquad y \in \bigcap_{h=1}^{n} F_{(\delta_1, \dots, \delta_h)}(t)$$

$$\left[\text{risp. } t \in \bigcap_{h=1}^{n_k} D_{(\delta_1, \dots, \delta_h)}, \qquad y \in \bigcap_{h=1}^{n_k} F_{(\delta_1, \dots, \delta_h)}(t)\right];$$

allora $t \in T_\delta$ e, se $\sigma \in \Sigma(n)$ [risp. $\sigma \in \Sigma(n_k)$] è tale che $\sigma(1) = \delta$ (una tale σ esiste per il Lemma 1.3), si ha che $t \in U_{\sigma,1}$ e quindi $y, f_\sigma(t) \in F_\delta(t)$ per cui

$$|y - f_\sigma(t)|_X < 4\,\frac{1}{n} < \varepsilon \left[\text{risp. } |y - f_\sigma(t)|_X < 4\,\frac{1}{\sqrt{n_k}} < \varepsilon\right].$$

Si proverà ora che l'insieme corrispondente a $\mathcal{F}_0$ in $L^p(\mu|_{\mathcal{C}(T_0)}, X)$ è relativamente compatto nello stesso spazio, facendo vedere che per ogni $\varepsilon > 0$ ammette una ε-rete finita (cfr. [DS], Cap. I, § 6, Teorema 15). Sia $\varepsilon > 0$ e sia $n \in \boldsymbol{Z}_+$ tale che $1/n < \varepsilon/4$; allora basta far vedere che $\{f_\sigma \colon \sigma \in \Sigma(i),\ i < n\}$ è una ε-rete per $\mathcal{F}_0$. Siano $m \in \boldsymbol{Z}_+$, $\varrho \in \Sigma(m)$ (e si può ovviamente supporre $m > n$) e sia $\sigma \in \Sigma(n)$ relativo a ϱ come nel Lemma 1.4 *b*). Sia $t \in T_0$; allora per il Lemma 1.4 *a*) esiste $j \in \{1, \dots, \text{card } M(m)\}$ tale che $t \in U_{\varrho,j}$ e quindi

$$t \in \bigcap_{h=1}^{m} D_{(\varrho(j)_1, \dots, \varrho(j)_h)} \quad \text{e} \quad f_\varrho(t) \in \bigcap_{h=1}^{m} F_{(\varrho(j)_1, \dots, \varrho(j)_h)}(t);$$

d'altra parte, se $k_j \in \{1, \dots, \text{card } M(n)\}$ è relativo a j come nel Lemma 1.4 *b*), risulta che $U_{\varrho,j} \subset U_{\sigma,k_j}$ e $\sigma(k_j) = (\varrho(j)_1, \dots, \varrho(j)_n)$; pertanto

$$t \in \bigcap_{h=1}^{n} D_{(\sigma(k_j)_1, \dots, \sigma(k_j)_h)} \quad \text{e} \quad f_\sigma(t) \in \bigcap_{h=1}^{n} F_{(\sigma(k_j)_1, \dots, \sigma(k_j)_h)}(t);$$

quindi si ha che $f_q(t), f_n(t) \in F_{(\psi(t)_1,\ldots,\psi(t)_n)}(t) = F_{\psi(h_t)}(t)$ e perciò $|f_q(t)-f_n(t)|_X <$ $< 4|\lambda_n(t)|$. Si deduce allora che $|f_q - f_n|_{L^\infty(\mu|_{\mathcal{L}|T_q}, X)} < 4(1/n) < \varepsilon$.

Per concludere basta ora utilizzare il Lemma 1.5.

1.7. Corollario: Siano T, $\mathcal{L}$, μ, X come nel Teorema 1.6, K compatto di X, $m \in \boldsymbol{Z}_+$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_m \in \mathcal{L}^\infty(\mu, X)$, $F\colon T \to 2^X$ multiapplicazione a valori chiusi e non vuoti, misurabile e tale che valga almeno una delle due condizioni i) e ii) del Teorema 1.6 e

$$F(t) \subset \bigcup \{\varphi_i(t) + K : i = 1, \ldots, m\} \qquad \text{per q.o. } t \in T .$$

Allora esiste un sottoinsieme $\mathcal{F}$ numerabile di $\mathcal{L}^\infty(\mu, X)$ tale che valgano (1.6.2) (nel caso $p = \infty$) e (1.6.3).

Dimostrazione: Sia $n \in \boldsymbol{Z}_+$. Per la totale limitatezza di K, che è un compatto di X, esistono $H(n) \in \boldsymbol{Z}_+$, $a_{1,n}, \ldots, a_{H(n),n} \in X$ tali che si abbia

$$K \subset \overline{\bigcup_{i=1}^{H(n)} S_X(a_{i,n}, 1/(2n))} \; ;$$

scegliendo $N(n) = mH(n)$, $f_{(j-1)H(n)+k,n} = \varphi_j + a_{k,n}$ ($j \in \{1, \ldots, m\}$, $k \in \{1, \ldots$ $\ldots, H(n)\}$), $\lambda_n = 1/(2n)$ sono verificate tutte le ipotesi del Teorema 1.6 nel caso $p = \infty$ e quindi, applicando tale teorema, si conclude.

1.8. Teorema: Siano T insieme, $\mathcal{L}$ σ-algebra su T, $\mu\colon \mathcal{L} \to [0, +\infty]$ misura, X spazio di Banach su $\boldsymbol{R}$, $F\colon T \to 2^X$ a valori compatti e non vuoti, misurabile, tale che $\bigcup_{t \in T} F(t)$ sia separabile, esista $\lambda \in \mathcal{L}^\infty(\mu, \boldsymbol{R})$ per la quale risulta

$$\sup \{|x|_X : x \in F(t)\} < \lambda(t) \qquad \text{per ogni } t \in T$$

ed esistano $K_{h,k}$ compatti di X ($h \in \boldsymbol{N}$, $k \in \boldsymbol{Z}_+$) per i quali per ogni $k \in \boldsymbol{Z}_+$ si abbia che

la famiglia $\{K_{h,k} : h \in \boldsymbol{N}\}$ è totalmente limitata (cfr. Definizione 0.11),

per ogni $t \in T$ esiste $h(t, k) \in \boldsymbol{N}$ per cui $F(t) \subset (K_{h(t,k),k})_{1/k}$.

Allora per ogni $n \in \boldsymbol{Z}_+$ esistono $N(n) \in \boldsymbol{Z}_+$, $f_{1,n}, \ldots, f_{N(n),n} \in \mathcal{L}^\infty(\mu, X)$ e $\lambda_n \in$ $\in \mathcal{L}^\infty(\mu, \boldsymbol{R})$ per le quali valgono (1.1.0) (relativa a $p = \infty$) e (1.1.1).

Dimostrazione: Siano $T_0 \in \mathcal{L}$ con $\mu(T \setminus T_0) = 0$ e $M \in \boldsymbol{R}_+$ tali che $|\lambda(t)| < M$ per ogni $t \in T_0$. Sia $n \in \boldsymbol{Z}_+$. Allora per la $(1/(4n))$-totale limitatezza di $\{K_{h,4n}:$ $h \in \boldsymbol{N}\}$ esistono $N(n) \in \boldsymbol{Z}_+$ e $x_{h,1,n}, \ldots, x_{h,N(n),n} \in X$ ($h \in \boldsymbol{N}$) per i quali risulta che

$$K_{h,4n} \subset \overline{\bigcup_{i=1}^{N(n)} S_X\left(x_{h,i,n}, \frac{1}{4n}\right)} \; ;$$

siano $y_{h,1,n}, \dots, y_{h,N(n),n} \in X$ $(h \in \boldsymbol{N})$ tali che

$$\{x_{h,1,n}, \dots, x_{h,N(n),n}\} \cap S_X\left(0, M+\frac{1}{2n}\right) \subset$$

$$\subset \{y_{h,1,n}, \dots, y_{h,N(n),n}\} \subset \left(\{x_{h,1,n}, \dots, x_{h,N(n),n}\} \cap S_X\left(0, M+\frac{1}{2n}\right)\right) \cup \{0\}\,.$$

Siano $A_{h,n} = \{t \in T\colon F(t) \subset (K_{h,4n})_{1/(4n)}\}$ $(h \in \boldsymbol{N})$; allora ogni $A_{h,n}$ è in $\mathfrak{L}$ visto che

$$A_{h,n} = T \setminus \{t \in T\colon F(t) \cap (X \setminus (K_{h,4n})_{1/(4n)}) \neq 0\} = T \setminus F^{-}(X \setminus (K_{h,4n})_{1/(4n)})\,,$$

che $X \setminus (K_{h,4n})_{1/(4n)}$ è chiuso e per [CV] (Cap. III, Teorema 2) e d'altra parte, per le ipotesi fatte, si ha che $T = \bigcup_{h \in N} A_{h,n}$; pertanto per ogni $i \in \{1, \dots, N(n)\}$ è $\mathfrak{L}$-misurabile (e quindi anche μ-misurabile essendo a valori numerabili) la applicazione $f_{i,n}\colon T \to X$ tale che

$$f_{i,n}(t) = \begin{cases} y_{0,i,n} & \text{se } t \in T_0 \cap A_{0,n}\,, \\ y_{h,i,n} & \text{se } t \in T_0 \cap \left(A_{h,n} \setminus \left(\bigcup_{j=0}^{h-1} A_{j,n}\right)\right) \qquad (h \in \boldsymbol{Z}_+)\,, \\ x_{0,i,n} & \text{se } t \in (T \setminus T_0) \cap A_{0,n}\,, \\ x_{h,i,n} & \text{se } t \in (T \setminus T_0) \cap \left(A_{h,n} \setminus \left(\bigcup_{j=0}^{h-1} A_{j,n}\right)\right) \qquad (h \in \boldsymbol{Z}_+)\,; \end{cases}$$

inoltre ogni $f_{i,n}$ è in $\mathfrak{L}^{\infty}(\mu, X)$ visto che $f_{i,n}(T_0) \subset S_X(0, M+1/(2n))$. Si proverà ora che vale la tesi, scegliendo $\lambda_n = 1/(2n)$. Con le scelte fatte, è banalmente soddisfatta (1.1.0) (relativa a $p = \infty$). Siano ora $t \in T$ e $x \in F(t)$; sia $m(t, n) = \min\{h \in \boldsymbol{N}\colon t \in A_{h,n}\}$; allora

$$x \in F(t) \subset (K_{m(t,n),4n})_{1/(4n)} \subset \bigcup_{i=1}^{N(n)} \left(\overline{S_X\left(x_{m(t,n),i,n}, \frac{1}{4n}\right)_{1/(4n)}}\right) = \bigcup_{i=1}^{N(n)} S_X\left(x_{m(t,n),i,n}, \frac{1}{2n}\right)$$

e quindi esiste $i(t, n, x) \in \{1, \dots, N(n)\}$ tale che $x \in S_X(x_{m(t,n),i(t,n,x),n}, 1/(2n))$; pertanto se $t \in T_0$, essendo $|x|_X < M$, risulta che $x_{m(t,n),i(t,n,x),n} \in S_X(0, M+1/(2n))$ e quindi esiste $j(t, n, x) \in \{1, \dots, N(n)\}$ tale che $y_{m(t,n),j(t,n,x),n} = x_{m(t,n),i(t,n,x),n}$, per cui, essendo $f_{j(t,n,x),n}(t) = y_{m(t,n),j(t,n,x),n}$, si ricava che $|x - f_{j(t,n,x),n}(t)|_X < 1/(2n) = \lambda_n(t)$; se invece $t \in T \setminus T_0$, si ha che $f_{i(t,n,x),n}(t) = x_{m(t,n),i(t,n,x),n}$ e quindi $|x - f_{i(t,n,x),n}(t)|_X < 1/(2n) = \lambda_n(t)$.

1.9. Corollario: Siano T insieme, $\mathfrak{L}$ σ-algebra su T, $\mu\colon \mathfrak{L} \to [0, +\infty]$ misura, X spazio di Banach su $\boldsymbol{R}$, $F\colon T \to 2^X$ a valori chiusi e non vuoti, misurabile, tale che esista $\lambda \in \mathfrak{L}^{\infty}(\mu, \boldsymbol{R})$ per la quale risulta

(1.9.0) $$\sup\{|x|_X\colon x \in F(t)\} < \lambda(t) \qquad \text{per q.o. } t \in T$$

ed esistano $K_{h,k}$ compatti di X ($h \in \boldsymbol{N}$, $k \in \boldsymbol{Z}_+$) per i quali per ogni $k \in \boldsymbol{Z}_+$ si abbia che

(1.9.1) la famiglia $\{K_{h,k} : h \in \boldsymbol{N}\}$ è totalmente limitata (cfr. Definizione 0.11), per q.o. $t \in T$ esiste $h(t, k) \in \boldsymbol{N}$ per cui $F(t) \subset (K_{h(t,k),k})_{1/k}$;

inoltre valga almeno una delle due seguenti condizioni:

i) $\bigcup\limits_{t \in T} F(t)$ sia separabile,

ii) μ sia completa e $F(t)$ sia separabile per ogni $t \in T$;

allora esiste un sottoinsieme $\mathcal{F}$ numerabile di $\mathfrak{L}^\infty(\mu, X)$ tale che

(1.9.2) il corrispondente insieme di $L^\infty(\mu, X)$ sia relativamente compatto,

(1.9.3) $\overline{\{f(t) : f \in \mathcal{F}\}} = F(t)$ per ogni $t \in T$.

Dimostrazione: Da (1.9.1) e dal Teorema 0.10 segue che $F(t)$ è compatto per q.o. $t \in T$. Sia $T_0 \in \mathfrak{L}$ con $\mu(T \setminus T_0) = 0$ tale che la diseguaglianza in (1.9.0) valga per ogni $t \in T_0$, la condizione in (1.9.1) valga per ogni $t \in T_0$ e $k \in \boldsymbol{Z}_+$ e $F(t)$ sia compatto per ogni $t \in T_0$. Allora $\bigcup\limits_{t \in T_0} F(t)$ è separabile, visto che ogni $K_{h,k}$ lo è (come spazio metrico compatto) e che

$$\bigcup_{t \in T_0} F(t) \subset \bigcap_{k \in \boldsymbol{Z}_+} \bigcup_{h \in \boldsymbol{N}} (K_{h,k})_{1/k} \subset \overline{\bigcup_{h \in \boldsymbol{N}, k \in \boldsymbol{Z}_+} K_{h,k}}.$$

È allora possibile applicare il Teorema 1.8 su T_0 e, successivamente, per concludere basta utilizzare il Teorema 1.6.

1.10. Esempio: Siano T insieme, $\mathfrak{L}$ σ-algebra su T, $\mu : \mathfrak{L} \to [0, +\infty]$ misura, X spazio di Banach su $\boldsymbol{R}$, $F : T \to 2^X$ a valori compatti e non vuoti, misurabile e tale che esista $\lambda \in \mathfrak{L}^\infty(\mu, \boldsymbol{R})$ per la quale risulta

$$\sup\{|x|_X : x \in F(t)\} < \lambda(t) \qquad \text{per ogni } t \in T;$$

allora può non esistere un sottoinsieme $\mathcal{F}$ numerabile di $\mathfrak{L}^\infty(\mu, X)$ che verifichi (1.9.2) e (1.9.3).

Basta considerare come X lo spazio l^2 delle successioni reali di quadrato sommabile, $\{e_n : n \in \boldsymbol{Z}_+\}$ base canonica di l^2, $T = [0, 1]$, $\mathfrak{L}$ e μ la σ-algebra e la misura di Lebesgue su $[0, 1]$, $F : [0, 1] \to 2^{l^2}$ tale che

$$F(t) = \overline{S_{l^2}(0, 1)} \cap \mathrm{sp}\,\{e_1, \ldots, e_n\}$$

per ogni

$$t \in \left]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right] \quad (n \in \boldsymbol{Z}_+),$$

$F(0) = \overline{S_{l^2}(0, 1)} \cap \mathrm{sp}\,\{e_1\}$.

Allora F soddisfa tutte le ipotesi, scegliendo $\lambda(t) = 1$ per ogni $t \in [0, 1]$. D'altra parte, se per assurdo $\mathcal{F}$ è un sottoinsieme numerabile di $\mathfrak{L}^\infty(\mu, l^2)$ verificante (1.9.2) e (1.9.3), deve esistere una (1/2)-rete finita $\mathfrak{R}$ per l'insieme corrispondente a $\mathcal{F}$ in $L^\infty(\mu, l^2)$; ma $\mu(]1/(n+1), 1/n]) > 0$ per ogni $n \in \boldsymbol{Z}_+$ e quindi, detto $\mathfrak{R}_0$ un sottoinsieme finito di $\mathfrak{L}^\infty(\mu, l^2)$ tale che il corrispondente insieme di $L^\infty(\mu, l^2)$ sia $\mathfrak{R}$, per ogni $n \in \boldsymbol{Z}_+$ esiste $t_n \in]1/(n+1), 1/n]$ tale che $\mathfrak{R}_n = \{r(t_n) : r \in \mathfrak{R}_0\}$ sia una (1/2)-rete per $S_{l^2}(0, 1) \cap \operatorname{sp}\{e_1, \ldots, e_n\}$; d'altronde $\operatorname{card} \mathfrak{R}_n = \operatorname{card} \mathfrak{R}_0$ e quindi è indipendente da $n \in \boldsymbol{Z}_+$ mentre una (1/2)-rete per $S_{l^2}(0, 1) \cap \operatorname{sp}\{e_1, \ldots, e_n\}$ ha almeno 2^n elementi (come si può rilevare ad esempio confrontando i volumi delle sfere in $\boldsymbol{R}^n$), il che è assurdo.

1.11. Teorema: Siano T insieme, $\mathfrak{L}$ σ-algebra su T, $\mu : \mathfrak{L} \to [0, +\infty]$ misura, X spazio di Banach su $\boldsymbol{R}$, $p \in [1, \infty[$, $F : T \to 2^X$ a valori compatti e non vuoti, misurabile, tale che $\bigcup_{t \in T} F(t)$ sia separabile,

(1.11.0) esista $\lambda \in \mathfrak{L}^p(\mu, \boldsymbol{R})$ per la quale risulta $\sup\{\|x\|_X : x \in F(t)\} < \lambda(t)$ per ogni $t \in T$

e valga

(1.11.1) per ogni $A \in \mathfrak{L}$ con $\mu(A) < +\infty$ e per ogni $\varepsilon \in \boldsymbol{R}_+$ esistono un insieme $E_{A,\varepsilon} \in \mathfrak{L}$ con $E_{A,\varepsilon} \subset A$, $\mu(A \setminus E_{A,\varepsilon}) < \varepsilon$ e dei compatti $K_{A,\varepsilon,h,k}$ di X ($h \in \boldsymbol{N}$, $k \in \boldsymbol{Z}_+$) tali che per ogni $k \in \boldsymbol{Z}_+$ si abbia che la famiglia $\{K_{A,\varepsilon,h,k} : h \in \boldsymbol{N}\}$ è totalmente limitata (cfr. Definizione 0.11) e per ogni $t \in E_{A,\varepsilon}$ esiste $h(A, \varepsilon, t, k) \in \boldsymbol{N}$ per cui $F(t) \subset (K_{A,\varepsilon,h(A,\varepsilon,t,k),k})_{1/k}$.

Allora per ogni $n \in \boldsymbol{Z}_+$ esistono $N(n) \in \boldsymbol{Z}_+$, $f_{1,n}, \ldots, f_{N(n),n} \in \mathfrak{L}^p(\mu, X)$ e $\lambda_n \in \mathfrak{L}^p(\mu, \boldsymbol{R})$ per le quali valgono (1.1.0) e (1.1.1).

Dimostrazione: Poichè $\lambda \in \mathfrak{L}^p(\mu, \boldsymbol{R})$, per ogni $\varepsilon \in \boldsymbol{R}_+$ esistono $A_\varepsilon \in \mathfrak{L}$ con $\mu(A_\varepsilon) < +\infty$ e $\delta_\varepsilon > 0$ tali che

$$(1.11.2) \quad \Big(\int_{T \setminus A_\varepsilon} |\lambda(t)|^p \, d\mu\Big)^{1/p} < \varepsilon \quad \text{e} \quad \Big(\int_E |\lambda(t)|^p \, d\mu\Big)^{1/p} < \varepsilon$$

per ogni $E \in \mathfrak{L}$ con $\mu(E) < \delta_\varepsilon$.

Sfruttando (1.11.1) ed essendo $\big(\mu(\{t \in T : |\lambda(t)| > i\})\big)_{i \in \boldsymbol{N}}$ infinitesima (per la diseguaglianza di Tchebychev e per l'appartenenza a $\mathfrak{L}^p(\mu, \boldsymbol{R})$ di λ), esistono un insieme $D(\varepsilon) \subset A_\varepsilon$ sul quale λ è limitata, con $\mu(A_\varepsilon \setminus D(\varepsilon)) < \delta_\varepsilon$, e dei compatti $K(\varepsilon, h, k)$ di X ($h \in \boldsymbol{N}$, $k \in \boldsymbol{Z}_+$) tali che per ogni $k \in \boldsymbol{Z}_+$ la famiglia $\{K(\varepsilon, h, k) : h \in \boldsymbol{N}\}$ sia totalmente limitata e per ogni $t \in D(\varepsilon)$ esista $h(\varepsilon, t, k) \in \boldsymbol{N}$ per cui $F(t) \subset \big(K(\varepsilon, h(\varepsilon, t, k), k)\big)_{1/k}$.

Sia ora $n \in \boldsymbol{Z}_+$. Applicando il Teorema 1.8 a $F|_{D(1/(3n))}$ si ricava l'esistenza, per ogni $m \in \boldsymbol{Z}_+$, di $M(m) \in \boldsymbol{Z}_+$, $g_{1,m}, \ldots, g_{M(m),m} \in \mathfrak{L}^\infty(\mu|_{(\mathfrak{L}|A_{1/(3n)})}, X)$ e $\gamma_m \in$

$\in \mathfrak{L}^\infty(\mu|_{(\mathfrak{L}|_{D(1/(3n))})}, \boldsymbol{R})$ tali che

$$|\gamma_m(t)| < \frac{1}{m} \qquad \text{per q.o. } t \in D\left(\frac{1}{3n}\right) \tag{1.11.3}$$

e

$$F(t) \subset \bigcup_{i \in \{1, \dots, M(m)\}} \{x \in X : |x - g_{i,m}(t)|_X < \gamma_m(t)\} \qquad \text{per ogni } t \in D\left(\frac{1}{3n}\right). \tag{1.11.4}$$

Sia $m(n) \in \boldsymbol{Z}_+$ tale che

$$\frac{1}{m(n)} \mu\left(D\left(\frac{1}{3n}\right)\right)^{1/p} < \frac{1}{3n}; \tag{1.11.5}$$

allora per verificare la tesi basta scegliere $N(n) = M(m(n))$,

$$f_{i,n}(t) = \begin{cases} g_{i,m(n)}(t) & \text{se } t \in D\left(\frac{1}{3n}\right) \\ 0 & \text{se } t \in T \setminus D\left(\frac{1}{3n}\right) \end{cases} \qquad (i \in \{1, \dots, N(n)\}),$$

$$\lambda_n(t) = \begin{cases} \gamma_{m(n)}(t) & \text{se } t \in D\left(\frac{1}{3n}\right) \\ \lambda(t) & \text{se } t \in T \setminus D\left(\frac{1}{3n}\right) \end{cases}$$

ed osservare che la validità di (1.1.1) è conseguenza di (1.11.4) (relativa a $m(n)$) e di (1.11.0), mentre da (1.11.3) (relativa a $m(n)$), da (1.11.5) e da (1.11.2) segue che

$$|\lambda_n|_{L^p(\mu,\boldsymbol{R})} < |\lambda_n|_{D(1/(3n))}|_{L^p(\mu|_{(\mathfrak{L}|_{D(1/(3n))})},\boldsymbol{R})} + |\lambda_n|_{T\setminus A_{1/(3n)}}|_{L^p(\mu|_{(\mathfrak{L}|_{T\setminus A_{1/(3n)}})},\boldsymbol{R})} +$$

$$+ |\lambda_n|_{A_{1/(3n)}\setminus D(1/(3n))}|_{L^p(\mu|_{(\mathfrak{L}|_{A_{1/(3n)}\setminus D(1/(3n))})},\boldsymbol{R})} < \frac{1}{n}$$

e cioè vale (1.1.0).

1.12. Corollario: Siano T insieme, $\mathfrak{L}$ σ-algebra su T, $\mu: \mathfrak{L} \to [0, +\infty]$ misura, X spazio di Banach su $\boldsymbol{R}$, $p \in [1, \infty[$, $F: T \to 2^X$ a valori chiusi e non vuoti, misurabile, tale che esista $\lambda \in \mathfrak{L}^p(\mu, \boldsymbol{R})$ per la quale risulta

$$\sup\{|x|_X : x \in F(t)\} < \lambda(t) \qquad \text{per q.o. } t \in T, \tag{1.12.0}$$

valga almeno una fra le condizioni i) e ii) del Teorema 1.6 e valga (1.11.1).

Allora esiste un sottoinsieme $\mathcal{F}$ numerabile di $\mathfrak{L}^p(\mu, X)$ tale che valgano (1.6.2) e (1.6.3).

DIMOSTRAZIONE: Siano

$$E = \{t \in T: \lambda(t) \neq 0\}, \qquad A_i = \left\{t \in T: |\lambda(t)| > \frac{1}{i+1}\right\} \qquad (i \in \boldsymbol{N});$$

allora $E, A_i \in \mathfrak{L}$, $\mu(A_i) < +\infty$ per ogni $i \in \boldsymbol{N}$ ed $E = \bigcup_{i \in \boldsymbol{N}} A_i$ e da (1.12.0) segue che $F(t) = \{0\}$ per q.o. $t \in T \setminus E$; inoltre da (1.11.1) e dal Teorema 0.10 segue che $F(t)$ è compatto per q.o. $t \in A_i$ $(i \in \boldsymbol{N})$; ancora da (1.11.1) segue per ogni $i \in \boldsymbol{N}$ l'esistenza di $S_{i,j} \in \mathfrak{L}$, $S_{i,j} \subset A_i$, con $\mu(A_i \setminus S_{i,j}) < 1/(j+1)$, e di compatti $K_{i,j,h,k}$ tali che

$$\bigcup_{t \in S_{i,j}} F(t) \subset \bigcap_{k \in \boldsymbol{Z}_+} \bigcup_{h \in \boldsymbol{N}} (K_{i,j,h,k})_{1/k} \subset \overline{\bigcup_{h \in \boldsymbol{N},\, k \in \boldsymbol{Z}_+} K_{i,j,h,k}}$$

e quindi $\bigcup_{t \in S_{i,j}} F(t)$ è separabile, visto che ogni $K_{i,j,h,k}$ lo è (come spazio metrico compatto). Pertanto, tenendo conto che un'unione numerabile di insiemi separabili è ancora separabile, esiste $T_0 \in \mathfrak{L}$ con $\mu(T \setminus T_0) = 0$ tale che la diseguaglianza in (1.12.0) valga per ogni $t \in T_0$, $F(t)$ sia compatto per ogni $t \in T_0$ e $\bigcup_{t \in T_0} F(t)$ sia separabile. È allora possibile applicare il Teorema 1.11 su T_0 e, successivamente, per concludere basta utilizzare il Teorema 1.6.

1.13. TEOREMA: Siano T insieme, $\mathfrak{L}$ σ-algebra su T, $\mu: \mathfrak{L} \to [0, +\infty]$ misura, inoltre esista τ topologia su T tale che $\mathfrak{L} \supset \mathcal{B}(\tau)$ e μ sia internamente regolare sugli insiemi di misura finita (cfr. Definizione 0.2 *b*)), X sia spazio di Banach su $\boldsymbol{R}$, $F: T \to 2^X$ a valori chiusi e non vuoti, misurabile e

(1.13.0) esista $T_0 \in \mathfrak{L}$ con $\mu(T \setminus T_0) = 0$ tale che $F(t)$ sia compatto per ogni $t \in T_0$ e $\bigcup_{t \in T_0} F(t)$ sia separabile.

Allora vale la condizione

(1.13.1) per ogni $A \in \mathfrak{L}$ con $\mu(A) < +\infty$ e per ogni $\varepsilon \in \boldsymbol{R}_+$ esistono un insieme $E_{A,\varepsilon} \in \mathfrak{L}$ con $E_{A,\varepsilon} \subset A$, $\mu(A \setminus E_{A,\varepsilon}) < \varepsilon$ ed un compatto $K_{A,\varepsilon}$ di X tali che $F(t) \subset K_{A,\varepsilon}$ per ogni $t \in E_{A,\varepsilon}$

(e quindi vale anche (1.11.1), che è immediata conseguenza di (1.13.1), visto che i compatti di X sono totalmente limitati).

DIMOSTRAZIONE: Sia $A \in \mathfrak{L}$ con $\mu(A) < +\infty$ e sia $\varepsilon \in \boldsymbol{R}_+$. Allora per il Teorema 0.8 applicato allo spazio metrizzabile e separabile $\bigcup_{t \in T_0} F(t)$ ed all'insieme di misura finita $A \cap T_0$ esiste un insieme $H(A, \varepsilon)$ compatto e chiuso in τ tale che $H(A, \varepsilon) \subset A \cap T_0$, $\mu((A \cap T_0) \setminus H(A, \varepsilon)) < \varepsilon$ e $F|_{H(A,\varepsilon)}$ sia s.c.s. Tenendo conto anche del fatto che $\mu(T \setminus T_0) = 0$, si ottiene che $H(A, \varepsilon) \subset A$ e $\mu(A \setminus H(A, \varepsilon)) < \varepsilon$ e d'altra parte per il Teorema 0.9 applicato a $F|_{H(A,\varepsilon)}$

si ricava l'esistenza di un compatto $K_{A,\varepsilon}$ di X tale che $F(t) \subset K_{A,\varepsilon}$ per ogni $t \in H(A, \varepsilon)$ e pertanto è verificata (1.13.1).

1.14. Teorema: Siano T insieme, $\mathfrak{L}$ σ-algebra su T, $\mu: \mathfrak{L} \to [0, +\infty]$ misura, $p \in [1, \infty[$, inoltre esista τ topologia su T tale che $\mathfrak{L} \supset \mathfrak{B}(\tau)$ e μ sia internamente regolare sugli insiemi di misura finita (cfr. Definizione 0.2 *b*)), X sia spazio di Banach su $\boldsymbol{R}$, $F: T \to 2^X$ a valori compatti e non vuoti, misurabile, tale che $\bigcup_{t \in T} F(t)$ sia separabile, esista $\lambda \in \mathfrak{L}^p(\mu, \boldsymbol{R})$ per la quale risulta

$$\sup \{|x|_X : x \in F(t)\} < \lambda(t) \qquad \text{per ogni } t \in T.$$

Allora per ogni $n \in \boldsymbol{Z}_+$ esistono $N(n) \in \boldsymbol{Z}_+$, $f_{1,n}, \dots, f_{N(n),n} \in \mathfrak{L}^p(\mu, X)$ e $\lambda_n \in \mathfrak{L}^p(\mu, \boldsymbol{R})$ per le quali valgono (1.1.0) e (1.1.1).

Dimostrazione: Basta sfruttare i Teoremi 1.13 e 1.11.

1.15. Osservazione: Nel caso $p = \infty$ non vale un risultato analogo a quello del Teorema 1.14, come mostra l'Esempio 1.10 (si tenga conto anche del Teorema 1.6).

In questo caso si possono fornire delle condizioni sufficienti per la verifica delle ipotesi del Teorema 1.6, come si è già visto mediante il Teorema 1.8.

1.16. Corollario: Siano T insieme, $\mathfrak{L}$ σ-algebra su T, $\mu: \mathfrak{L} \to [0, +\infty]$ misura, $p \in [1, \infty[$, inoltre esista τ topologia su T tale che $\mathfrak{L} \supset \mathfrak{B}(\tau)$ e μ sia internamente regolare sugli insiemi di misura finita (cfr. Definizione 0.2 *b*)), X sia spazio di Banach su $\boldsymbol{R}$, $F: T \to 2^X$ a valori chiusi e non vuoti, misurabile,

(1.16.0) esista $\lambda \in \mathfrak{L}^p(\mu, \boldsymbol{R})$ tale che $\sup \{|x|_X : x \in F(t)\} < \lambda(t)$ per q.o. $t \in T$

e valga almeno una fra le due seguenti condizioni:

i) $F(t)$ sia compatto per q.o. $t \in T$ e $\bigcup_{t \in T} F(t)$ sia separabile,

ii) valga (1.13.0), μ sia completa e $F(t)$ sia separabile per ogni $t \in T$.

Allora esiste un sottoinsieme $\mathcal{F}$ numerabile di $\mathfrak{L}^p(\mu, X)$ tale che

il corrispondente insieme di $L^p(\mu, X)$ sia relativamente compatto,

$$\overline{\{f(t) : f \in \mathcal{F}\}} = F(t) \qquad \text{per ogni } t \in T.$$

Dimostrazione: Basta utilizzare il Teorema 1.13 ed il Corollario 1.12 (un'altra dimostrazione si ottiene invece considerando $T_0 \in \mathfrak{L}$ con $\mu(T \setminus T_0) = 0$ tale che la diseguaglianza in (1.16.0) valga per ogni $t \in T_0$, $F(t)$ sia compatto per ogni $t \in T_0$ e $\bigcup_{t \in T_0} F(t)$ sia separabile, applicando il Teorema 1.14 su T_0 e, successivamente, utilizzando il Teorema 1.6).

1.17. OSSERVAZIONE: Dai risultati dei numeri precedenti si può dedurre il risultato in dimensione finita di [CC] citato nell'Introduzione (nel quale, nel caso $p < \infty$, si può rimuovere l'ipotesi di σ-finitezza sulla misura, in quanto $\{t \in T: \lambda(t) \neq 0\}$ è un sottoinsieme di T che risulta essere unione numerabile di insiemi di misura finita

$$\left(\left\{t \in T: |\lambda(t)| > \frac{1}{n+1}\right\}, \quad n \in \boldsymbol{N}\right)\right).$$

Dai teoremi precedenti discende infatti che:

« Siano $p \in [1, \infty]$, T insieme, $\mathfrak{L}$ σ-algebra su T, $\mu: \mathfrak{L} \to [0, +\infty]$ misura, $m \in \boldsymbol{Z}_+$, $F: T \to 2^{\boldsymbol{R}^m}$ a valori chiusi e non vuoti, misurabile e tale che esista $\lambda \in \mathfrak{L}^p(\mu, \boldsymbol{R})$ per la quale risulta

$$\sup\{\|x\|_{\boldsymbol{R}^m}: x \in F(t)\} \leq \lambda(t) \qquad \text{per ogni } t \in T; \tag{1.17.0}$$

allora esiste un sottoinsieme $\mathcal{F}$ numerabile di $\mathfrak{L}^p(\mu, \boldsymbol{R}^m)$ tale che il corrispondente insieme di $L^p(\mu, \boldsymbol{R}^m)$ sia relativamente compatto e si abbia

$$\overline{\{f(t): f \in \mathcal{F}\}} = F(t) \qquad \text{per ogni } t \in T ».$$

Infatti, nel caso in cui $p = \infty$, tenendo conto che i limitati di $\boldsymbol{R}^m$ sono relativamente compatti, sono soddisfatte tutte le ipotesi del Corollario 1.9 (nel caso i)) e basta quindi applicare lo stesso Corollario; nel caso in cui $p < \infty$, per la diseguaglianza di Tchebychev risulta che $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(\{t \in T: \lambda(t) > n\}) = 0$ e quindi, tenendo conto di (1.17.0), vale la condizione (1.13.1) e pertanto si può applicare il Corollario 1.12, del quale valgono tutte le ipotesi (nel caso i)), e si conclude.

2. - ALCUNE PROPRIETÀ DEI SOTTOINSIEMI RELATIVAMENTE COMPATTI DI L^p

2.0. TEOREMA: Siano T insieme, $\mathfrak{L}$ σ-algebra su T, $\mu: \mathfrak{L} \to [0, +\infty]$ misura, X spazio di Banach su $\boldsymbol{R}$. Dato un sottoinsieme non vuoto Φ relativamente compatto di $L^\infty(\mu, X)$, esiste un insieme $\mathcal{G}$ ad esso corrispondente in $\mathfrak{L}^\infty(\mu, X)$, esiste $r \in \boldsymbol{R}_+$ ed esistono K_t compatti di X ($t \in X$) per i quali si abbia che

(2.0.0) la famiglia $\{K_t: t \in T\}$ è totalmente limitata (cfr. Definizione 0.11),

(2.0.1) $\{f(t): f \in \mathcal{G}\} \subset K_t \subset \overline{S_X(0, r)}$ per ogni $t \in T$, la multiapplicazione $F: T \to 2^X$ tale che $F(t) = \overline{\{f(t): f \in \mathcal{G}\}}$ per ogni $t \in T$ è a valori compatti e non vuoti, misurabile e $\bigcup\limits_{t \in T} F(t)$ è separabile;

inoltre per ogni $n \in \boldsymbol{Z}_+$ esistono $N(n) \in \boldsymbol{Z}_+$, $f_{1,n}, \ldots, f_{N(n),n} \in \mathfrak{L}^\infty(\mu, X)$ e $\lambda_n \in \mathfrak{L}^\infty(\mu, \boldsymbol{R})$ per le quali valgono (1.1.0) e (1.1.1).

Dimostrazione: Poichè Φ è limitato, essendo relativamente compatto, esiste $r \in \boldsymbol{R}_+$ tale che

$$|f(t)|_X < r \tag{2.0.2}$$

per q.o. $t \in T$ e per ogni $f \in \Phi$; d'altra parte, se Φ_n è una $(1/n)$-rete finita per Φ $(n \in \boldsymbol{Z}_+)$, per ogni $f \in \Phi$ e per ogni $n \in \boldsymbol{Z}_+$ esiste $g_{f,n} \in \Phi_n$ tale che

$$|f(t) - g_{f,n}(t)|_X < \frac{1}{n} \tag{2.0.3}$$

per q.o. $t \in T$; sia ora $\Phi_0 = \bigcup_{n \in \boldsymbol{Z}_+} \Phi_n$ e per ogni $f \in \Phi_0$ (e quindi in particolare per ogni $f \in \Phi_n$) si scelga un rappresentante con immagine separabile e tale che le (2.0.2) e (2.0.3) (relative agli elementi di Φ_0) valgano per ogni $t \in T$ e si indichi con $\mathcal{F}_0$ l'insieme di tali rappresentanti (e con $\mathcal{F}_n$ il sottoinsieme del precedente relativo a Φ_n) (tale scelta è possibile perchè, fatta una scelta di rappresentanti per ogni elemento di Φ_0, basta considerare un insieme $T_0 \in \mathfrak{C}$, con $\mu(T \setminus T_0) = 0$, tale che l'immagine di T_0 mediante ciascuno di tali rappresentanti sia separabile e tale che (2.0.2) e (2.0.3) (relative a tali rappresentanti degli elementi di Φ_0) valgano per ogni $t \in T_0$ e considerare poi dei nuovi rappresentanti che valgano come i precedenti su T_0 e che valgano 0 su $T \setminus T_0$); sia $\varphi \in \mathcal{F}_0$; per ogni elemento di $\Phi \setminus \Phi_0$ se ne consideri un rappresentante con immagine separabile tale che valga (2.0.2) per ogni $t \in T$ e che sia coincidente con φ nei punti ove non è verificata (2.0.3) (relativamente agli elementi degli $\mathcal{F}_n$ $(n \in \boldsymbol{Z}_+)$) e si indichi con $\mathcal{F}^0$ l'insieme di tali rappresentanti; siano $\mathcal{G} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}^0$ e sia $K_t = \overline{\{f(t) : f \in \mathcal{F}_0\}}$ per ogni $t \in T$. Sfruttando (2.0.2) e (2.0.3) si ottiene (2.0.1).

D'altra parte, se $\varepsilon \in \boldsymbol{R}_+$, se $n_\varepsilon \in \boldsymbol{Z}_+$ è tale che $1/n_\varepsilon < \varepsilon$ e se $M(\varepsilon)$ è la cardinalità di Φ_{n_ε}, sfruttando (2.0.3) si ricava che $\{S_X(f(t), \varepsilon) : f \in \mathcal{F}_{n_\varepsilon}\}$ costituisce un ricoprimento di K_t con $M(\varepsilon)$ sfere.

Sia ora F come nell'enunciato; allora F è ovviamente a valori non vuoti, è a valori compatti per (2.0.1); inoltre, essendo $K_t = \overline{\{f(t) : f \in \mathcal{F}_0\}}$ per ogni $t \in T$, da (2.0.1) si deduce che

$$F(t) = \overline{\{f(t) : f \in \mathcal{F}_0\}} \qquad \text{per ogni } t \in T \tag{2.0.4}$$

e quindi

$$\bigcup_{t \in T} F(t) = \bigcup_{t \in T} \overline{\{f(t) : f \in \mathcal{F}_0\}} \subset \overline{\bigcup \{f(T) : f \in \mathcal{F}_0\}}\,; \tag{2.0.5}$$

ma l'ultimo membro di (2.0.5) è separabile, come chiusura di un'unione numerabile di insiemi separabili, e pertanto soddisfa al secondo assioma di numerabilità, essendo metrizzabile; quindi il primo membro di (2.0.5) soddisfa al secondo assioma di numerabilità e perciò è separabile; sfruttando ora (2.0.4) e [CV] (Cap. III, Proposizione 4 e Teorema 2) si conclude anche sulla misurabilità di F.

Per quanto riguarda l'ultima parte della tesi, basta considerare per ogni $n \in \boldsymbol{Z}_+$ un elemento $N(n) \in \boldsymbol{Z}_+$ tale che esistano $f_{1,n}, \ldots, f_{N(n),n} \in \mathfrak{L}^\infty(\mu, X)$ per le quali si abbia che $\{f_{1,n}, \ldots, f_{N(n),n}\} = \mathcal{F}_{2n}$ e $\lambda_n = 1/(2n)$ e sfruttare che, per come è stata scelta $\mathfrak{G}$, per ogni $t \in T$ si ha che

$$\{f(t): f \in \mathfrak{G}\} \subset \bigcup_{i \in \{1, \ldots, N(n)\}} \{x \in X: |x - f_{i,n}(t)|_X < \lambda_n(t)\}$$

e pertanto, essendo il secondo membro un chiuso di X, vale (1.1.1).

2.1. Osservazione: Si noti che dal Teorema 2.0 si deduce che vale un reciproco del Teorema 1.6 nel caso « $p = \infty$ ».

Ci si potrebbe anche chiedere se vale un « viceversa » del Corollario 1.7 e cioè se è vero che, dato un sottoinsieme $\mathcal{F}$ numerabile di $\mathfrak{L}^\infty(\mu, X)$ tale che il corrispondente insieme di $L^\infty(\mu, X)$ sia relativamente compatto,

(2.1.0) esistono $m \in \boldsymbol{Z}_+$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_m \in \mathfrak{L}^\infty(\mu, X)$ ed un compatto K di X tali che si abbia $\{f(t): f \in \mathcal{F}\} \subset \bigcup \{\varphi_i(t) + K: i = 1, \ldots, m\}$ per q.o. $t \in T$;

ma questo non è vero, come si può vedere con il seguente esempio, nel quale fra l'altro sono verificate entrambe le condizioni i) e ii) del Teorema 1.6 (ove si è definita $F(t) = \{f(t): f \in \mathcal{F}\}$ per ogni $t \in T$, per cui vale ovviamente anche (1.6.3)).

Si consideri come X lo spazio l^2 delle successioni reali di quadrato sommabile, $\{e_n: n \in \boldsymbol{Z}_+\}$ base canonica di l^2, $T = [0, 1]$, $\mathfrak{L}$ e μ la σ-algebra e la misura di Lebesgue su $[0, 1]$, $f: [0, 1] \to l^2$,

$$f(t) = e_n \text{ se } t \in \left]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right], \qquad f(0) = 0, \qquad \mathcal{F} = \left\{\frac{1}{k} f: k \in \boldsymbol{Z}_+\right\}.$$

Si proverà ora che non vale (2.1.0). Si supponga per assurdo che valga (2.1.0); allora esistono $m \in \boldsymbol{Z}_+$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_m \in \mathfrak{L}^\infty(\mu, l^2)$, K compatto di l^2, $T_0 \in \mathfrak{L}$ con $\mu([0, 1] \setminus T_0) = 0$ tali che

$$\left\{\frac{1}{k} f(t): k \in \boldsymbol{Z}_+\right\} \subset \bigcup \{\varphi_i(t) + K: i = 1, \ldots, m\} \qquad \text{per ogni } t \in T_0. \tag{2.1.1}$$

Sia $\vartheta: \boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R}$, $\vartheta(a_1, \ldots, a_m) = \sup\limits_{k \in \boldsymbol{Z}_+} \min\limits_{i \in \{1, \ldots, m\}} |a_i - 1/k|$; allora ϑ assume valori solo in $\boldsymbol{R}_+$, è s.c.i. come estremo superiore di funzioni continue ed inoltre, definendo

$$h(a) = \begin{vmatrix} 0 & \text{se } a < 0 \\ a & \text{se } a \in [0, 1] \\ 1 & \text{se } a > 1 \end{vmatrix} \qquad \text{per ogni } a \in \boldsymbol{R},$$

si ha che $(b(a_1), \dots, b(a_m)) \in [0, 1]^m$ e $\vartheta(b(a_1), \dots, b(a_m)) < \vartheta(a_1, \dots, a_m)$ per ogni $(a_1, \dots, a_m) \in \boldsymbol{R}^m$; pertanto

$$\alpha = \inf_{\boldsymbol{R}^m} \vartheta = \inf_{[0,1]^m} \vartheta = \min_{[0,1]^m} \vartheta > 0\,.$$

Quindi per ogni $j \in \boldsymbol{Z}_+$ e per ogni $t \in]1/(j+1), 1/j]$ si ha che

$$\sup_{k \in \boldsymbol{Z}_+} \min_{i \in \{1, \dots, m\}} \left| \langle \varphi_i(t), e_i \rangle_{l^2 \times l^2} - \frac{1}{k} \langle f(t), e_i \rangle_{l^2 \times l^2} \right| > \alpha\,.$$

Pertanto, considerando per ogni $j \in \boldsymbol{Z}_+$ un punto $t_j \in]1/(j+1), 1/j] \cap T_0$, esiste un $k_j \in \boldsymbol{Z}_+$ tale che

$$\min_{i \in \{1, \dots, m\}} \left| \langle \varphi_i(t_j), e_j \rangle_{l^2 \times l^2} - \frac{1}{k_j} \langle f(t_j), e_j \rangle_{l^2 \times l^2} \right| > \frac{\alpha}{2}\,;$$

d'altra parte per (2.1.1) esistono $i_j \in \{1, \dots, m\}$ ed $x_j \in K$ tali che

$$\frac{1}{k_j} \langle f(t_j), e_j \rangle_{l^2 \times l^2} = \langle \varphi_{i_j}(t_j), e_j \rangle_{l^2 \times l^2} + \langle x_j, e_j \rangle_{l^2 \times l^2} \qquad (j \in \boldsymbol{Z}_+)\,;$$

quindi

$$(2.1.2) \qquad |\langle x_j, e_j \rangle_{l^2 \times l^2}| > \frac{\alpha}{2} \qquad \text{per ogni } j \in \boldsymbol{Z}_+$$

ed, essendo K compatto, esistono $(j_h)_{h \in \boldsymbol{Z}_+}$ successione strettamente crescente di interi positivi ed $x \in l^2$ tali che $\lim_{h \to \infty} x_{j_h} = x$ in $s(l^2)$; ma $\lim_{h \to \infty} e_{j_h} = 0$ in $w(l^2)$ e pertanto $\lim_{h \to \infty} \langle x_{j_h}, e_{j_h} \rangle_{l^2 \times l^2} = 0$, il che insieme a (2.1.2) dà una contraddizione.

2.2. Teorema: Siano T insieme, $\mathfrak{L}$ σ-algebra su T, $\mu: \mathfrak{L} \to [0, +\infty]$ misura, inoltre esista τ topologia su T tale che $\mathfrak{L} \supset \mathfrak{B}(\tau)$ e μ sia σ-finita ed internamente regolare sugli insiemi di misura finita (cfr. Definizione 0.2 *b*)), X sia spazio di Banach su $\boldsymbol{R}$, Φ sia un sottoinsieme relativamente compatto di $L^\infty(\mu, X)$. Allora esiste un insieme $\mathfrak{X}$ corrispondente a Φ in $\mathfrak{L}^\infty(\mu, X)$ ed esiste un sottoinsieme σ-compatto A di X tale che $\overline{\{f(t): f \in \mathfrak{X}\}} \subset A$ per ogni $t \in T$.

Dimostrazione: Se Φ è non vuoto, considerando $\mathfrak{G}$ e F relativi a Φ come nel Teorema 2.0, applicando il Teorema 1.13 e sfruttando la condizione (1.13.1) su ogni S_h e con $\varepsilon = 1/k$ (ove $S_h \in \mathfrak{L}$, $\mu(S_h) < +\infty$ $(h \in \boldsymbol{N})$, $\bigcup_{h \in \boldsymbol{N}} S_h = T$, $k \in \boldsymbol{Z}_+$), si ricava l'esistenza di $T_0 \in \mathfrak{L}$ con $\mu(T \setminus T_0) = 0$ e di $K_{h,k}$ compatti di X $(h \in \boldsymbol{N}, k \in \boldsymbol{Z}_+)$ tali che

$$\overline{\{f(t): f \in \mathfrak{G}\}} \subset \bigcup_{h \in \boldsymbol{N},\, k \in \boldsymbol{Z}_+} K_{h,k} \qquad \text{per ogni } t \in T_0\,;$$

basta ora definire

$$\mathcal{K}=\Big\{f\colon T\to X\colon \text{esista } g_f\in\mathfrak{G} \text{ per la quale si abbia che } f(t)=$$
$$=\begin{cases} g_f(t) & \text{se } t\in T_0 \\ 0 & \text{se } t\in T\setminus T_0\end{cases}\Big\}.$$

2.3. Rispetto a quanto ottenuto nel Teorema 2.2, si può ottenere un risultato più forte in cui si specifica meglio come sono fatti gli insiemi $\overline{\{f(t)\colon f\in\mathcal{K}\}}$ e che tiene conto anche di quanto già provato in (2.0.0) e (2.0.1).

Teorema: Siano T insieme, $\mathfrak{L}$ σ-algebra su T, $\mu\colon \mathfrak{L}\to[0,+\infty]$ misura, inoltre esista τ topologia su T tale che $\mathfrak{L}\supset\mathcal{B}(\tau)$ e μ sia σ-finita ed internamente regolare sugli insiemi di misura finita (cfr. Definizione 0.2 b)), X sia uno spazio di Banach su $\boldsymbol{R}$. Dato un sottoinsieme Φ relativamente compatto di $L^\infty(\mu, X)$, esiste un insieme $\mathcal{K}$ ad esso corrispondente in $\mathfrak{L}^\infty(\mu, X)$ ed esistono $K_{h,k}$ compatti di X ($h\in\boldsymbol{N}$, $k\in\boldsymbol{Z}_+$) per i quali per ogni $k\in\boldsymbol{Z}_+$ si abbia che

la famiglia $\{K_{h,k}\colon h\in\boldsymbol{N}\}$ è $(1/k)$-totalmente limitata (cfr. Definizione 0.11),

per ogni $t\in T$ esiste $h(t,k)\in\boldsymbol{N}$ per cui $\{f(t)\colon f\in\mathcal{K}\}\subset K_{h(t,k),k}$.

Dimostrazione: Sia Φ non vuoto (altrimenti la tesi è banale). Siano $\mathfrak{G}$, r, K_t ($t\in T$) e F relativi a Φ come nell'enunciato del Teorema 2.0 e per ogni $\varepsilon\in\boldsymbol{R}_+$ sia $M(\varepsilon)\in\boldsymbol{Z}_+$ relativo alla totale limitatezza della famiglia $\{K_t\colon t\in T\}$ (cfr. Definizione 0.11); siano anche $\mathcal{F}_n$ ($n\in\boldsymbol{Z}_+$) relativi a Φ come nella dimostrazione del Teorema 2.0. Per la σ-finitezza di μ esistono $S_i\in\mathfrak{L}$, con $\mu(S_i)<+\infty$, $S_i\subset S_{i+1}$ ($i\in\boldsymbol{N}$), $\bigcup_{i\in\boldsymbol{N}} S_i=T$. Applicando il Teorema 1.13 a F si ricava per ogni $i\in\boldsymbol{N}$ l'esistenza di un insieme $E_i\in\mathfrak{L}$, con $E_i\subset S_i$, $\mu(S_i\setminus E_i)<1/(i+1)$ e di un sottoinsieme H_i compatto di X tale che $\overline{\{f(t)\colon f\in\mathfrak{G}\}}\subset H_i$ per ogni $t\in E_i$. Allora $\bigcup_{i\in\boldsymbol{N}} E_i\in\mathfrak{L}$, $\mu\big(T\setminus\bigcup_{i\in\boldsymbol{N}} E_i\big)=0$. Sia $k\in\boldsymbol{Z}_+$. Si considerino $N(i)\in\boldsymbol{Z}_+$ ($i\in\boldsymbol{N}$) tali che esistano $S_{1,i},\dots,S_{N(i),i}$ sfere di raggio $(1/8k)$ la cui unione contiene H_i; siano $E_{h,k}$ ($h\in\boldsymbol{Z}_+$) tali che

$$\{E_{h,k}\colon h\in\boldsymbol{Z}_+\}=$$
$$=\Big\{(E_i\setminus E_{i-1})\cap\Big(\bigcap_{f\in\mathcal{F}_{4k}} f^{-1}(S_{j(f),i})\Big)\colon j\colon \mathcal{F}_{4k}\to\{1,\dots,N(i)\} \text{ applicazione, } i\in\boldsymbol{N}\Big\}$$

(ove si è definito $E_{-1}=\emptyset$); allora $E_{h,k}\in\mathfrak{L}$ e $\bigcup_{h\in\boldsymbol{Z}_+} E_{h,k}=\bigcup_{i\in\boldsymbol{N}} E_i$; se si definisce

$$K_{h,k}=\overline{\bigcup_{t\in E_{h,k}}\{f(t)\colon f\in\mathfrak{G}\}}\qquad (h\in\boldsymbol{Z}_+),$$

per ogni $h\in\boldsymbol{Z}_+$ esiste $i(h)\in\boldsymbol{N}$ tale che $K_{h,k}\subset H_{i(h)}$ e pertanto $K_{h,k}$ è compatto;

inoltre, tenendo conto di come era stata fatta la scelta degli $\mathcal{F}_n$ ($n \in \boldsymbol{Z}_+$) e di $\mathfrak{G}$ nel Teorema 2.0, risulta che per ogni $s \in T$ e $f \in \mathfrak{G}$ esiste $g_{h,s,k} \in \mathcal{F}_{4k}$ tale che $|f(s) - g_{h,s,k}(s)|_X < 1/(4k)$ e quindi, se $h \in \boldsymbol{Z}_+$, se $t, s \in E_{h,k}$ e se $f \in \mathfrak{G}$ risulta che

$$|g_{h,s,k}(t) - f(s)|_X < |g_{h,s,k}(t) - g_{h,s,k}(s)|_X + |g_{h,s,k}(s) - f(s)|_X < \frac{1}{2k};$$

d'altra parte se $h \in \boldsymbol{Z}_+$ e se $t \in E_{h,k}$ esistono $M(1/(2k))$ sfere di raggio $1/(2k)$ la cui unione contiene K_t e quindi l'unione delle sfere chiuse centrate negli stessi punti e di raggio $1/k$ contiene $\overline{\bigcup_{t \in E_{h,k}} \{f(t) : f \in \mathfrak{G}\}} = K_{h,k}$; per concludere basta ora definire

$$\mathfrak{K} = \left| f : T \to X : \text{esista } g_f \in \mathfrak{G} \text{ per la quale si abbia che } f(t) = \right.$$

$$= \begin{vmatrix} g_f(t) & \text{se } t \in \bigcup_{i \in N} E_i \\ 0 & \text{se } t \in T \setminus \bigcup_{i \in N} E_i \end{vmatrix} \quad \text{e } K_{0,k} = \{0\}.$$

2.4. Lemma: Siano T insieme, X spazio di Banach su $\boldsymbol{R}$, $F : T \to 2^X$ ed esistano $K_{h,k}$ compatti di X ($h \in \boldsymbol{N}$, $k \in \boldsymbol{Z}_+$) per i quali per ogni $k \in \boldsymbol{Z}_+$ si abbia che

la famiglia $\{K_{h,k} : h \in \boldsymbol{N}\}$ è $(1/k)$-totalmente limitata (cfr. Definizione 0.11),

per ogni $t \in T$ esiste $h(t, k) \in \boldsymbol{N}$ per cui $F(t) \subset K_{h(t,k),k}$.

Allora esistono $H_{h,n}$ compatti di X ($h \in \boldsymbol{N}$, $n \in \boldsymbol{Z}_+$) per i quali per ogni $n \in \boldsymbol{Z}_+$ si abbia che

la famiglia $\{H_{h,n} : h \in \boldsymbol{N}\}$ è totalmente limitata (cfr. Definizione 0.11),

per ogni $t \in T$ esiste $m(t, n) \in \boldsymbol{N}$ per cui $\overline{F(t)} \subset (H_{m(t,n),n})_{1/n}$.

Dimostrazione: Sia $n \in \boldsymbol{Z}_+$. Allora per la $(1/(2n))$-totale limitatezza di $\{K_{h,2n} : h \in \boldsymbol{N}\}$ esistono $N(n) \in \boldsymbol{Z}_+$ e $x_{h,1,n}, \ldots, x_{h,N(n),n} \in X$ ($h \in \boldsymbol{N}$) per i quali risulta che

$$K_{h,2n} \subset \overline{\bigcup_{i=1}^{N(n)} S_X\left(x_{h,i,n}, \frac{1}{2n}\right)};$$

basta pertanto definire $H_{h,n} = \{x_{h,1,n}, \ldots, x_{h,N(n),n}\}$ ($h \in \boldsymbol{N}$) ed osservare che, con tale scelta, la totale limitatezza della famiglia $\{H_{h,n} : h \in \boldsymbol{N}\}$ è ottenuta considerando per ogni $\varepsilon \in \boldsymbol{R}_+$ l'intero positivo $M(\varepsilon) = N(n)$ e per ogni $h \in \boldsymbol{N}$ le sfere di centro rispettivamente $x_{h,1,n}, \ldots, x_{h,N(n),n}$ e di raggio ε, mentre per verificare la seconda parte della tesi basta considerare $m(t, n) = h(t, 2n)$ ($t \in T$).

2.5. Il seguente risultato, insieme a quello del Teorema 2.0, esprime il fatto che, sotto qualche ipotesi sullo spazio misurabile, vale un «viceversa» del Corollario 1.9.

TEOREMA: Siano T insieme, $\mathfrak{L}$ σ-algebra su T, $\mu: \mathfrak{L} \to [0, +\infty]$ misura, inoltre esista τ topologia su T tale che $\mathfrak{L} \supset \mathfrak{B}(\tau)$ e μ sia σ-finita ed internamente regolare sugli insiemi di misura finita (cfr. Definizione 0.2 b)), X sia uno spazio di Banach su $\boldsymbol{R}$. Dato un sottoinsieme Φ relativamente compatto di $L^\infty(\mu, X)$, esiste un insieme $\mathfrak{G}$ ad esso corrispondente in $\mathfrak{L}^\infty(\mu, X)$ ed esistono $K_{h,k}$ compatti di X ($h \in \boldsymbol{N}$, $k \in \boldsymbol{Z}_+$) per i quali per ogni $k \in \boldsymbol{Z}_+$ si abbia che

la famiglia $\{K_{h,k}: h \in \boldsymbol{N}\}$ è totalmente limitata (cfr. Definizione 0.11),

per ogni $t \in T$ esiste $h(t, k) \in \boldsymbol{N}$ per cui $\overline{\{f(t): f \in \mathfrak{G}\}} \subset (K_{h(t,k),k})_{1/k}$.

DIMOSTRAZIONE: Il risultato di sopra è diretta conseguenza del Teorema del n. 2.3 e del Lemma 2.4, ma se ne darà qui di seguito anche un'altra dimostrazione, più diretta e più semplice.

Sia Φ non vuoto (altrimenti la tesi è banale). Siano $\mathfrak{G}$ e $\mathcal{F}_n$ ($n \in \boldsymbol{Z}_+$) relativi a Φ come nella dimostrazione del Teorema 2.0 ed inoltre tali che $f(T)$ sia σ-compatto per ogni $f \in \mathcal{F}_n$ e per ogni $n \in \boldsymbol{Z}_+$ (il che è possibile poichè, in virtù del Teorema 0.14 e della numerabilità di $\bigcup_{n \in \boldsymbol{Z}_+} \mathcal{F}_n$, esiste $T_0 \in \mathfrak{L}$ con $\mu(T \setminus T_0) = 0$ tale che $f(T_0)$ sia un insieme σ-compatto per ogni $f \in \mathcal{F}_n$ e per ogni $n \in \boldsymbol{Z}_+$ e basta quindi eventualmente ridefinire tutti uguali a zero i valori nei punti di $T \setminus T_0$ degli elementi di $\mathfrak{G}$ e di $\mathcal{F}_n$ ($n \in \boldsymbol{Z}_+$)). Sfruttando ora il Teorema 0.12 si ricava l'esistenza di compatti $H_{h,f}$ di X ($h \in \boldsymbol{N}, f \in \mathcal{F}_n, n \in \boldsymbol{Z}_+$) tali che per ogni $n \in \boldsymbol{Z}_+$ e $f \in \mathcal{F}_n$ la famiglia $\{H_{h,f}: h \in \boldsymbol{N}\}$ sia totalmente limitata e $f(T) \subset \bigcup_{h \in \boldsymbol{N}} H_{h,f}$. Sia $k \in \boldsymbol{Z}_+$. Siano $K_{h,k}$ ($h \in \boldsymbol{N}$) tali che

$$\{K_{h,k}: h \in \boldsymbol{N}\} = \left\{ \bigcup_{f \in \mathcal{F}_{2k}} H_{h(f),f}: h: \mathcal{F}_{2k} \to \boldsymbol{N} \text{ applicazione} \right\};$$

allora, visto che $\mathcal{F}_{2k}$ è finito, i $K_{h,k}$ sono compatti ed inoltre

la famiglia $\{K_{h,k}: h \in \boldsymbol{N}\}$ è totalmente limitata

(infatti, se $\varepsilon \in \boldsymbol{R}_+$ e se $M_f(\varepsilon)$ è relativo alla famiglia $\{H_{h,f}: h \in \boldsymbol{N}\}$ e a ε come nella Definizione 0.11 ($f \in \mathcal{F}_{2k}$), si ha che l'intero positivo $\sum_{f \in \mathcal{F}_{2k}} M_f(\varepsilon)$ è relativo alla famiglia $\{K_{h,k}: h \in \boldsymbol{N}\}$ e a ε come nella Definizione 0.11). Per come sono stati scelti i $K_{h,k}$ ($h \in \boldsymbol{N}$), si ha anche che per ogni $t \in T$ esiste $h(t, k) \in \boldsymbol{N}$ per cui $\{f(t): f \in \mathcal{F}_{2k}\} \subset K_{h(t,k),k}$; d'altra parte, tenendo conto di come era stata fatta la scelta degli $\mathcal{F}_n$ ($n \in \boldsymbol{Z}_+$) e di $\mathfrak{G}$ nel Teorema 2.0, risulta che per ogni

$f \in \mathfrak{G}$ e per ogni $t \in T$ esiste $g_{i,t,k} \in \mathcal{F}_{2k}$ tale che

$$|f(t) - g_{i,t,k}(t)|_X < \frac{1}{2k}$$

e quindi si ottiene che $\{f(t) : f \in \mathfrak{G}\} \subset \overline{(K_{h(t,k),k})_{1/(2k)}}$, da cui

$$\overline{\{f(t) : f \in \mathfrak{G}\}} \subset \overline{(K_{h(t,k),k})_{1/(2k)}} \subset (K_{h(t,k),k})_{1/k} \,.$$

2.6. Osservazione: Ci si potrebbe chiedere se l'ipotesi che la multiapplicazione sia integrabilmente limitata di potenza p (cioè che verifichi (1.16.0)) è necessaria perchè valga la tesi del Corollario 1.16; ma si può vedere con il seguente esempio che ciò non è vero già nel caso (considerato in [CC]) in cui X ha dimensione finita.

Siano $T = [0, 1]$ con la σ-algebra e la misura di Lebesgue e $X = \boldsymbol{R}$,

$$f_k : [0, 1] \to \boldsymbol{R}\,, \qquad f_k = n(k)^{1/p} \cdot 1_{[m(k)/2^{n(k)},(m(k)+1)/2^{n(k)}]} \qquad (k \in \boldsymbol{Z}_+)$$

(ove per ogni $k \in \boldsymbol{Z}_+$ si sono scelti $n(k), m(k) \in \boldsymbol{N}$ tali che $m(k) \in \{0, \ldots, 2^{n(k)} - 1\}$, $k = 2^{n(k)} + m(k)$), $F(t) = \{f_k(t) : k \in \boldsymbol{Z}_+\}$ per ogni $t \in [0, 1]$.

Se anche si aggiunge la condizione che F sia a valori compatti, si può fare un altro esempio per mostrare che può valere la condizione (1.16.0).

Basta considerare T e X come nell'esempio di sopra, $g : [0, 1] \to [0, +\infty[$, $g \notin \mathcal{L}^p(\mu, \boldsymbol{R})$, $g_k : [0, 1] \to \boldsymbol{R}$, $g_k = f_k \wedge g$ $(k \in \boldsymbol{Z}_+)$ (ove f_k $(k \in \boldsymbol{Z}_+)$ sono come nell'esempio di sopra), $F(t) = \{g_k(t) : k \in \boldsymbol{Z}_+\}$ per ogni $t \in [0, 1]$.

2.7. Osservazione: Nel caso $p < \infty$, non vale un analogo del Teorema 2.0, neanche se ci si limita a voler ottenere la parte della tesi riguardante le proprietà sui valori della multiapplicazione F e neanche se si considerano sottoinsiemi numerabili di $L^p(\mu, X)$.

Siano T insieme, $\mathcal{E}$ σ-algebra su T, $\mu : \mathcal{E} \to [0, +\infty]$ misura, X spazio di Banach su $\boldsymbol{R}$, $\mathfrak{G}$ sottoinsieme numerabile di $\mathcal{L}^p(\mu, X)$ tale che il sottoinsieme ad esso corrispondente in $L^p(\mu, X)$ sia relativamente compatto, $F : T \to 2^X$ la multiapplicazione tale che $F(t) = \overline{\{f(t) : f \in \mathfrak{G}\}}$ per ogni $t \in T$. Allora esiste $T_0 \in \mathcal{E}$ con $\mu(T \setminus T_0) = 0$ tale che $\bigcup_{t \in T_0} F(t)$ sia separabile, ma $F(t)$ può non essere compatto per alcun $t \in T$ (anche se $\mu(T) > 0$).

Per la μ-misurabilità degli elementi di $\mathfrak{G}$ e poichè $\mathfrak{G}$ è numerabile, esistono $T_0 \in \mathcal{E}$ con $\mu(T \setminus T_0) = 0$ ed $Y \subset X$, Y separabile tali che $F(t) \subset Y$ per ogni $t \in T_0$.

Per quanto riguarda la possibilità che F sia a valori non compatti, si può notare che già il primo degli esempi forniti nel n. 2.6 mostra quanto sopra, addirittura nel caso in cui X ha dimensione finita; si può però dare anche un altro esempio, in cui si ha in più che vale (1.11.0) (in questo caso X dovrà avere dimensione infinita (infatti se X ha dimensione finita e se vale (1.11.0), per la relativa compattezza dei limitati negli spazi di dimensione finita, si ottiene che F è a valori compatti)).

Siano X lo spazio l^2 delle successioni reali di quadrato sommabile, $\{e_n : n \in \boldsymbol{N}\}$ base canonica di l^2, $T = [0, 1]$, $\mathfrak{L}$ e μ la σ-algebra e la misura di Lebesgue su $[0, 1]$, $f_k : [0, 1] \to X$, $f_k = 1_{[m(k)/2^{n(k)}, (m(k)+1)/2^{n(k)}]} \cdot e_{n(k)}$ $(k \in \boldsymbol{Z}_+)$ (ove per ogni $k \in \boldsymbol{Z}_+$ si sono scelti $n(k), m(k) \in \boldsymbol{N}$ tali che $m(k) \in \{0, \ldots, 2^{n(k)} - 1\}$, $k = 2^{n(k)} + m(k)$), $\mathfrak{F} = \{f_k : k \in \boldsymbol{Z}_+\}$; allora $F(t) = \{e_n : n \in \boldsymbol{N}\}$ per ogni $t \in [0, 1]$ e d'altra parte $\{e_n : n \in \boldsymbol{N}\}$ non è compatto poiché, se $(e_n)_{n \in N}$ avesse un'estratta convergente, questa dovrebbe tendere a 0 che è il suo limite in $\sigma(l^2)$ e ciò è assurdo.

Si noti che, nel caso «$p < \infty$», non è più vero nemmeno che valga un reciproco del Teorema 1.6 e per vederlo basta utilizzare gli Esempi del n. 2.6 e la parte *a*) del Lemma 1.1.

D'altra parte, tenendo conto dell'esempio di sopra e del Lemma 1.1 *b*), anche se si aggiunge alle ipotesi la condizione (1.11.0) il risultato può non valere; se però si aggiungono alle ipotesi, oltre alla condizione (1.11.0), delle condizioni riguardanti la compattezza e la separabilità dei valori della multiapplicazione F, oltre ad un'opportuna ipotesi di regolarità sulla misura, il risultato vale come è stato già provato nel Teorema 1.14.

2.8. Teorema: Siano T insieme, $\mathfrak{L}$ σ-algebra su T, $\mu : \mathfrak{L} \to [0, +\infty]$ misura, $p \in [1, \infty[$, inoltre esista τ topologia su T tale che $\mathfrak{L} \supset \mathcal{B}(\tau)$ e μ sia internamente regolare sugli insiemi di misura finita (cfr. Definizione 0.2 *b*)), X sia spazio di Banach su $\boldsymbol{R}$. Dato un sottoinsieme $\mathfrak{F}$ di $\mathfrak{L}^p(\mu, X)$ tale che il corrispondente insieme di $L^p(\mu, X)$ sia relativamente compatto, si ha che

(2.8.0) per ogni $A \in \mathfrak{L}$ con $\mu(A) < +\infty$ e per ogni $\varepsilon \in \boldsymbol{R}_+$ esistono un compatto $K(A, \varepsilon)$ di X e degli insiemi $E(A, f, \varepsilon) \in \mathfrak{L}$ con $\mu(A \setminus E(A, f, \varepsilon)) < \varepsilon$ $(f \in \mathfrak{F})$ tali che $f(t) \in K(A, \varepsilon)$, per ogni $t \in E(A, f, \varepsilon)$ e per ogni $f \in \mathfrak{F}$.

Dimostrazione: Sia $M(\mu, X)$ come nell'Osservazione 0.17. Allora l'insieme corrispondente a $\mathfrak{F}$ in $M(\mu, X)$ è relativamente sequenzialmente compatto: infatti, se $f_n \in \mathfrak{F}$ $(n \in \boldsymbol{N})$, esistono $(n_k)_{k \in N}$ successione strettamente crescente di naturali ed $f \in L^p(\mu, X)$ tali che $f_{n_k} \to f$ in $L^p(\mu, X)$ e quindi anche in misura; allora tale insieme è totalmente limitato in $M(\mu, X)$ per [DS] (Cap I, § 6, Teorema 15). Sia ora $A \in \mathfrak{L}$ con $\mu(A) < +\infty$ e sia $\varepsilon \in \boldsymbol{R}_+$. Applicando ad A quanto notato nell'Osservazione 0.17, si ottiene che esistono $h(A, \varepsilon) \in \boldsymbol{Z}_+$, $f_{1,A,\varepsilon}, \ldots, f_{h(A,\varepsilon),A,\varepsilon} \in \mathfrak{F}$ e per ogni $f \in \mathfrak{F}$ esiste $D(A, f, \varepsilon) \in \mathfrak{L}$ tale che

$$\mu(A \setminus D(A, f, \varepsilon)) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad f(t) \in \left(\bigcup_{i=1}^{h(A,\varepsilon)} \{f_{i,A,\varepsilon}(t)\} \right)_{\varepsilon/2} \quad \text{per ogni } t \in D(A, f, \varepsilon).$$

D'altronde, applicando il Teorema 0.5 a ciascuna delle $f_{i,A,\varepsilon}$ $(i \in \{1, \ldots, h(A, \varepsilon)\})$, si prova l'esistenza di un compatto e chiuso $H(A, \varepsilon)$ di (T, τ), $H(A, \varepsilon) \subset A$ tale che $\mu(A \setminus H(A, \varepsilon)) < \varepsilon/2$ e $f_{i,A,\varepsilon}|_{H(A,\varepsilon)}$ continua per ogni $i \in \{1, \ldots, h(A, \varepsilon)\}$. Pertanto, se si definisce $K(A, \varepsilon) = \bigcup_{i=1}^{h(A,\varepsilon)} f_{i,A,\varepsilon}(H(A, \varepsilon))$, tale insieme risulta essere un compatto di X e, definendo $E(A, f, \varepsilon) = D(A, f, \varepsilon) \cap H(A, \varepsilon)$, si ha che $E(A, f, \varepsilon) \in \mathfrak{C}$, $\mu(A \setminus E(A, f, \varepsilon)) < \varepsilon$ e $f(t) \in K(A, \varepsilon)$, per ogni $t \in E(A, f, \varepsilon)$ e per ogni $f \in \mathcal{F}$ e quindi è soddisfatta (2.8.0).

2.9. Osservazioni: *a*) Se, nelle ipotesi del Teorema 2.8, la condizione (2.8.0) vale relativamente a degli insiemi indipendenti da $f \in \mathcal{F}$ e cioè se esistono $E(A, \varepsilon)$ tali che $E(A, \varepsilon) = E(A, f, \varepsilon)$ per ogni $f \in \mathcal{F}$ ($A \in \mathfrak{C}$ con $\mu(A) < +\infty$, $\varepsilon \in \boldsymbol{R}_+$) e se inoltre $F\colon T \to 2^X$ è tale che $F(t) = \overline{\{f(t) : f \in \mathcal{F}\}}$ per ogni $t \in T$, allora vale la condizione (1.13.1).

Infatti, nelle ipotesi fatte, se $A \in \mathfrak{C}$, $\mu(A) < +\infty$, per ogni $\varepsilon \in \boldsymbol{R}_+$ e per ogni $n \in \boldsymbol{Z}_+$ esistono un compatto $K(A, \varepsilon, n)$ di X e degli insiemi $D(A, \varepsilon, n) \in \mathfrak{C}$ con $\mu(A \setminus D(A, \varepsilon, n)) < \varepsilon/2^n$ tali che $f(t) \in K(A, \varepsilon, n)_{1/n}$ per ogni $t \in D(A, \varepsilon, n)$ e per ogni $f \in \mathcal{F}$; pertanto

$$F(t) = \overline{\{f(t) : f \in \mathcal{F}\}} \subset \overline{\bigcap_{n \in \boldsymbol{Z}_+} K(A, \varepsilon, n)_{1/n}}$$

$$\text{per ogni } t \in \bigcap_{n \in \boldsymbol{Z}_+} D(A, \varepsilon, n) \text{ e } \mu\Big(A \setminus \Big(\bigcap_{n \in \boldsymbol{Z}_+} D(A, \varepsilon, n)\Big)\Big) < \varepsilon .$$

Sfruttando l'interna regolarità di μ sugli insiemi di misura finita, esiste un compatto $H_{A,\varepsilon}$ di T con $H_{A,\varepsilon} \subset \bigcap_{n \in \boldsymbol{Z}_+} D(A, \varepsilon, n)$, $\mu(A \setminus H_{A,\varepsilon}) < \varepsilon$ e allora si conclude se si nota che, come conseguenza del Teorema 0.10, si ha che

$$\overline{\bigcap_{n \in \boldsymbol{Z}_+} K(A, \varepsilon, n)_{1/n}} \text{ è un insieme compatto di } X .$$

b) Si noti anche che, nelle ipotesi del Teorema 2.8 e se $F\colon T \to 2^X$ è tale che $F(t) = \overline{\{f(t) : f \in \mathcal{F}\}}$ per ogni $t \in T$, può non valere la condizione (1.11.1), come si può vedere con il primo degli esempi dell'Osservazione 2.6 e con l'esempio considerato nell'Osservazione 2.7 (nel quale è soddisfatta anche la condizione (1.11.0)).

c) Si noti che, nelle ipotesi del Teorema 2.8, anche se $p = \infty$, se $F\colon T \to 2^X$ è tale che $F(t) = \overline{\{f(t) : f \in \mathcal{F}\}}$ per ogni $t \in T$, non si può sperare di ottenere la (1.11.1), poichè, essendo $\mathcal{F}$ anche più che numerabile, si può avere $F(t) = X$ per ogni $t \in T$ e contemporaneamente far sì che l'insieme corrispondente a $\mathcal{F}$ in $L^p(\mu, X)$ sia $\{0\}$ (ad esempio considerando $T = [0, 1]$ con la σ-algebra e la misura di Lebesgue, $\mathcal{F} = \{x \cdot 1_{\{t\}} : t \in [0, 1], x \in X\}$).

Ci si potrebbe invece chiedere se, nelle ipotesi del Teorema 2.8, dato un sottoinsieme Φ relativamente compatto di $L^p(\mu, X)$, esiste un insieme $\mathfrak{F}$ ad esso corrispondente in $\mathfrak{L}^p(\mu, X)$ tale che, definendo $F: T \to 2^X$, $F(t) = \overline{\{f(t): f \in \mathfrak{G}\}}$ per ogni $t \in T$, sia verificata la condizione (1.11.1). Ma, per $p \in [1, \infty[$, nemmeno questo risultato è vero, come provano gli stessi esempi richiamati in *b*) (in entrambi i quali $\mathcal{F}$ è numerabile). Per quanto riguarda il caso « $p = \infty$ », si veda il n. 2.11.

2.10. Osservazione: Nelle ipotesi del Teorema 1.11 (esclusa la (1.11.1)) la condizione (1.11.1) è implicata da ciascuna delle seguenti condizioni (per mostrarlo si farà vedere che ciascuna delle condizioni di sotto implica la condizione (1.13.1)):

a) esistono K_n compatti di X ($n \in \boldsymbol{N}$) tali che per q.o. $t \in T$ esista $n(t) \in \boldsymbol{N}$ per il quale $F(t) \subset K_{n(t)}$;

b) esiste τ topologia su T per la quale si abbia che: per ogni $A \in \mathfrak{L}$ con $\mu(A) < +\infty$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un compatto $H(A, \varepsilon) \subset A$, $H(A, \varepsilon) \in \mathfrak{L}$ con $\mu(A \setminus H(A, \varepsilon)) < \varepsilon$ tale che $F|_{H(A,\varepsilon)}$ sia s.c.s.

Se vale *a*), intanto si può supporre che sia $K_n \subset K_{n+1}$ per ogni $n \in \boldsymbol{N}$ (perchè basta eventualmente considerare $H_n = \bigcup_{m=0}^{n} K_m$ $(n \in \boldsymbol{N})$); sia $A \in \mathfrak{L}$ con $\mu(A) < +\infty$; allora, scegliendo

$$A_n = \begin{cases} \{t \in A: F(t) \subset K_n,\ F(t) \not\subset K_{n-1}\} & \text{se } n \in \boldsymbol{Z}_+\,, \\ \{t \in A: F(t) \subset K_0\} & \text{se } n = 0\,, \end{cases}$$

si ha che $A_n \in \mathfrak{L}$ (poichè per ogni sottoinsieme K di X risulta che

$$\{t \in T: F(t) \subset K\} = T \setminus \{t \in T: F(t) \cap (T \setminus K) \neq \emptyset\}$$

e

$$\{t \in T: F(t) \not\subset K\} = \{t \in T: F(t) \cap (T \setminus K) \neq \emptyset\})\,,$$

$A = \bigcup_{n \in \boldsymbol{N}} A_n$ e $A_n \cap A_m = \emptyset$ se $n \neq m$; quindi $\sum_{n \in \boldsymbol{N}} \mu(A_n) = \mu(A) < +\infty$, per cui se $\varepsilon \in \boldsymbol{R}_+$ esiste $n(\varepsilon) \in \boldsymbol{N}$ tale che $\sum_{n \in \boldsymbol{N},\, n > n(\varepsilon)} \mu(A_n) < \varepsilon$ e basta pertanto definire $E_{A,\varepsilon} = \bigcup_{n=0}^{n(\varepsilon)} A_n$ e $K_{A,\varepsilon} = K_{n(\varepsilon)}$.

Se vale *b*), basta applicare il Teorema 0.9 a $F|_{H(A,\varepsilon)}$, ricavando l'esistenza di un compatto $K_{A,\varepsilon}$ di X tale che $F(t) \subset K_{A,\varepsilon}$ per ogni $t \in H(A, \varepsilon)$.

Si noti anche che la condizione *b*) è verificata nelle ipotesi del Teorema 1.13 ed è appunto tramite questa condizione che in tale Teorema si è provata la validità di (1.13.1).

2.11. Si noti che, se nel Teorema 2.8 (anzi nella variante dell'enunciato di tale Teorema descritta nell'Osservazione 2.9 *c*)), si considera $p = \infty$ e se inoltre $F\colon T \to 2^X$ è tale che $F(t) = \overline{\{f(t) : f \in \mathfrak{G}\}}$ per ogni $t \in T$ allora si riesce a provare che vale la condizione (1.13.1) (e quindi anche la (1.11.1)), come si mostrerà con il teorema successivo. D'altra parte, nel caso $p = \infty$ non vale l'analogo del Teorema 1.11, come mostra già lo stesso Esempio 1.10 (cfr. anche Teorema 1.6).

Teorema: Siano T, $\mathfrak{L}$, μ, τ, X come nel Teorema 2.8, Φ sottoinsieme relativamente compatto di $L^\infty(\mu, X)$. Allora esiste un insieme $\mathfrak{G}$ corrispondente a Φ in $\mathfrak{L}^\infty(\mu, X)$ tale che, definita $F\colon T \to 2^X$, $F(t) = \overline{\{f(t) : f \in \mathfrak{G}\}}$ per ogni $t \in T$, si abbia che è verificata la condizione (1.13.1).

Dimostrazione: Basta applicare il Teorema 2.0 ed il Teorema 1.13.

BIBLIOGRAFIA

[Ba] E. J. Balder, *New Sequential Compactness Results for Spaces of Scalarly Integrable Functions*, J. Math. Anal. Appl., 151 (1990), 1-16.

[Be] C. Berge, *Espaces topologiques, Fonctions multivoques*, Dunod (1966).

[BA] A. Bottaro Aruffo, *Su alcune estensioni del teorema di Scorza Dragoni*, Rend. Accad. Naz. Sci. XL, Mem. Mat., (5), 9 (1985), 87-202.

[C] C. Castaing, *Compacité dans l'espace des mesures de probabilité de transition*, Sém. Anal. Convexe (1986), Exposé n. 5.

[CC] A. Cellina - R. M. Colombo, *On the Representation of Measurable Set Valued Maps through Selections*, peeprint della S.I.S.S.A. (Trieste), 15 M (febbraio 1989).

[CV] C. Castaing - M. Valadier, *Convex Analysis and Measurable Multifunctions*, Lecture Notes in Math., n. 580, Springer (1977).

[DS] N. Dunford - J. T. Schwartz, *Linear Operators*, Part I, Interscience Publishers Inc. (1957).

[K] H. A. Klei, *A Compactness Criterion in $L^1(E)$ and Radon-Nikodym Theorems for Multimeasures*, Bull. Sci. Math., (2), 112 (1988), 305-324.