MARGHERITA BARTOLOZZI - RAFFAELLA FRANCI (*)

Un frammento di storia dell'algebra: la regola di Newton sul numero di radici immaginarie di un'equazione algebrica (**)

Riassunto - Gli storici della matematica considerano la regola sul numero delle radici immaginarie di un'equazione algebrica come uno dei più notevoli contributi di Newton all'algebra. La regola, enunciata per la prima volta nei *Taccuini* durante gli anni 1664-1666, fu pubblicata nell'*Arithmetica Universalis* (1707) corredata da esempi, ma priva di dimostrazione. Essa suscitò subito l'interesse dei matematici inglesi G. Campbell e C. MacLaurin che, negli anni 1726-1730, credettero di aver fornito una dimostrazione. In realtà, nonostante le ricerche da parte di matematici quali Euler, Waring, Lagrange, una dimostrazione fu trovata solo nel 1864, ancora da un matematico inglese: J.J. Sylvester.

La storia della dimostrazione della regola di Newton offre un esempio paradigmatico illuminante della strada, talvolta lunga e difficile, per giungere alla dimostrazione di una affermazione derivata da una brillante intuizione.

A fragment of the history of algebra: Newton's rule on the number of imaginary roots in an algebraic equation.

Summary - The historians of the mathematics regard the rule for singling out the number of imaginary roots in an algebraic equation, as one of the most noteworthy contributions of Newton to algebra.

The rule, enunciated for the first time in the *Notebooks* during the years 1664-66, was printed in *Arithmetica universalis* (1707), accompanied by examples, but without a proof. The rule immediately aroused the interest of the English mathematicians G. Campbell and C. MacLaurin who, in the years 1726-30, thought to have it proved. Really in spite of the researches of mathematicians as Euler, Waring, Lagrange, a proof was found only in 1864, again by an English mathematician: J.J. Sylvester.

The history of the proof of Newton's rule gives a very enlightening paradigm of the, sometimes long and difficult, way to the proof of a statement that was the result of a bright intuition.

(*) Dipartimento di Matematica, Università di Palermo, Via Archirafi 34, 90123 Palermo. Lavoro eseguito con il contributo del Ministero della Pubblica Istruzione (40% e 60%).

(**) Lavoro dedicato al Professor G.B. Marini-Bettòlo, Uno dei XL, in occasione del 75° compleanno.

Introduzione

Gli storici della matematica sono unanimi nel ritenere che la regola per individuare il numero delle radici immaginarie di un'equazione algebrica sia uno dei più notevoli contributi di Newton all'algebra.

La regola, enunciata per la prima volta nei *Taccuini* negli anni 1664-66, fu pubblicata nell'*Arithmetica Universalis* (1707) corredata da esempi e priva di dimostrazione. Essa suscitò subito l'interesse dei matematici inglesi G. Campbell e C. Mac Laurin che, negli anni 1726-30, credettero di averne fornito una dimostrazione. In realtà, nonostante le ricerche da parte di matematici quali Euler, Waring, Lagrange, una dimostrazione fu trovata solo nel 1864, ancora da un matematico inglese, J.J. Sylvester.

Nella nostra ricostruzione abbiamo volutamente privilegiato quegli aspetti dello studio delle radici immaginarie di un'equazione strettamente legati alla regola di Newton.

1. *La regola di Newton*

Nel secondo libro dell'*Arithmetica*,[1] dopo aver classificato le radici delle equazioni in *reales affirmativae* et *negativae* et *impossibiles*, Newton, dapprima, enuncia una regola che permette di calcolare il numero di radici positive e negative in un'equazione a radici tutte reali,[2] mettendo in evidenza, mediante un esempio, che detta regola non è più valida per equazioni che ammettono radici immaginarie; successivamente dà la regola, oggi chiamata regola di Newton

> «Constitue seriem fractionum quorum denominatores sunt numeri in hac progressione 1, 2, 3, 4, 5 etc. pergendo ad numerum usque qui est dimensionum aequationis, numeratores vero eadem series numerorum in ordine contrario. Divide uniquamque fractionem posteriorem per priorem. Fractiones prodeuntes colloca super terminis mediis aequationis. Et sub quolibet mediorum terminorum si quadratum ejus ductum in fractionem capiti imminentem sit majus

[1] Nella veste di professore Lucasiano presso l'Università di Cambridge, Newton dal 1673 al 1683 tenne lezioni di algebra. Il testo di queste lezioni, che doveva essere depositato presso la Biblioteca dell'Università, fu scritto da Newton nel giro di pochi mesi, soltanto tra la fine del 1683 e l'inizio del 1684. Il manoscritto fu pubblicato a cura di W. Whiston nel 1707 con il titolo *Arithmetica Universalis.* Una copia diplomatica delle lezioni è contenuta in D.T. Whiteside. *The Mathematical Papers of Isaac Newton 1683-1684*, vol. IV, Cambridge 1972, pp. 346-352. Nel 1722 comparve una nuova edizione dell'*Arithmetica* rivista dall'autore. L'opera ebbe numerose edizioni latine e fu tradotta in inglese, francese, tedesco. Le nostre citazioni sono tratte da: I. Newton, *Arithmetica Universalis,* Lugduni Batavorum, apud Joh.et Herm Verbeek, Bibliopolae, MDCCXXXII. Notizie sulla vita e le opere di Newton si trovano in J.B. Cohen, *Isaac Newton,* Dictionary of Scientific Biographies. Fondamentale per la conoscenza dell'attività scientifica di questo autore è la recente monografia: R.S. Westfall, *Never at Rest. A Biography of Isaac Newton,* Cambridge University Press, 1980. Trad. italiana: *Newton,* Einaudi, Torino, 1989, 2 voll.

[2] Si tratta della nota regola dei segni o di Cartesio. Newton, che pure conosceva l'opera del matematico e filosofo francese, non le attribuisce alcun nome o paternità.

quam rectangulum terminorum utrinque consistentium, colloca signum + ; sin minus, signum -.[3] Sub primo vero et ultimo termino colloca signum +. Et tot erunt radices impossibiles quot sunt subscriptorum signorum serie mutationes de + in — et — in +» (pp. 184-185).

La regola viene illustrata con diversi esempi, in particolare si trattano casi in cui nell'equazione mancano uno o più termini. Si può osservare che in realtà essa fornisce soltanto una condizione sufficiente per riconoscere l'esistenza di radici immaginarie, delle quali non sempre è in grado di indicare il numero; ne dà, infatti, solo il limite inferiore. Lo stesso Newton è consapevole di queste limitazioni, tanto che avverte

«Atque haec ita se habent ubi non sunt plures impossibiles radices quam per regulam allatam deteguntur. Possunt enim plures esse, licet id perraro eveniat» (p. 187).

Nel paragrafo successivo, dedicato alla trasformazione delle equazioni, l'autore osserva che la sua regola non permette, per esempio, di scoprire alcuna radice immaginaria nell'equazione $x^3 - 3a^2x - 3a^3 = 0$, ma che la stessa regola, applicata all'equazione $y^3 - 3ay^2 - a^3 = 0$, trasformata della precedente mediante $x = y - a$, ne mostra l'esistenza.[4]

Nell'ultima parte della trattazione, Newton enuncia, anche se in modo forse non molto chiaro, quella che oggi viene chiamata regola completa.[5]

«Hinc etiam cognosci potest utrum radicesi impossibiles inter affirmativas radices latent an inter negativas. Nam signa terminorum signis subscriptis variantibus imminentium indicant tot affirmativas esse impossibiles quot sunt ipsorum variationes, et tot negativas quot sunt ipsorum successiones sine variatione» (p. 186).

Per illustrarla l'autore considera l'equazione

$$x^5 \underset{+}{-} 4x^4 \underset{-}{+} 4x^3 \underset{+}{-} 2x^2 \underset{+}{-} 5x - 4 = 0$$

Dall'esame contemporaneo della successione dei segni della proposta e di quella, scritta sotto, ricavata dalla regola, egli conclude che l'equazione ha una radice positiva, due negative, due immaginarie. Infatti, per la regola di Cartesio, vi sono al più tre radici positive e due negative; il primo segmento, $\mp\pm\mp$, della doppia successione $\mp\pm\mp\mp$, mostrando due variazioni, indica che «inter affirmativas lateant duae impossibiles».

[3] In altre parole si richiede che sul termine $a_i x^{n-i}$ della data equazione si ponga la frazione $k_i = \frac{n-i}{i+1} / \frac{n-i+1}{i}$, se $k_i a_i^2 > a_{i-1} a_{i+1}$ si deve porre il segno + sotto il termine corrispondente, in caso contrario il segno —.

[4] Nei *Taccuini* (cfr. nota 6) Newton aveva ipotizzato che, con un certo numero di trasformazioni di questo tipo, si potessero sempre scoprire le radici immaginarie di un'equazione. Cfr. WHITESIDE, *The Mathematical Papers* I, op.cit., p. 529.

[5] La nomenclatura «regola completa e incompleta» è stata introdotta da J.J. Sylvester, cfr. *On Isaac Newton's rule for Imaginary Roots*, Proc. London Math. Soc. 1 (1865-1866).

Newton non dà alcuna dimostrazione della regola, nè fornisce indicazioni sul modo in cui è arrivato a formularla.

Anche la lettura dei *Taccuini*,[6] dove si trovano i primi studi ad essa relativi, non getta alcuna luce sulla sua genesi. Nei *Taccuini* è dedicato ampio spazio all'argomento[7] e vi vengono fornite dapprima due regole, diverse da quella presente nell'*Arithmetica*. Una afferma che se in'un'equazione vi sono tre termini consecutivi $\ldots\ a_{i-1}x^{n-i+1} + a_i x^{n-i} + a_{i+1}x^{n-i-1} + \ldots$, tali che $|a_i| < |a_{i-1}|$ e $|a_i| < |a_{i+1}|$, allora l'equazione ha (almeno) due radici immaginarie.[8]

L'altra stabilisce che un'equazione in cui vi sono tre termini consecutivi tali che $a_i^2 < a_{i-1}\, a_i$, ammette (almeno) due radici immaginarie.[9]

L'autore si avvicina alla formulazione della regola fornita nell'*Arithmetica* attraverso due enunciati formalmente diversi. Nel primo si afferma che, considerata un'equazione algebrica $x^n + \sum\limits_{1\leqslant i\leqslant n} a_i x^{n-i} = 0$ e la successione numerica $\left\{\dfrac{n-i}{i+1}\right\}_{0\leqslant i<n}$, se si possono trovare tre termini adiacenti tali che

$$\frac{n-i+1}{i}\, a_{i-1}a_{i+1} > a_i^2\, \frac{n-i}{i+1},$$

l'equazione ammette almeno due radici immaginarie, anzi ammette tante coppie di radici immaginarie quante sono le successioni di tre termini soddisfacenti alle suddette condizioni.[10]

Nel secondo si stabilisce che, considerati accanto ai termini dell'equazione, quelli della successione $\left\{\dfrac{n-i}{i+1}\right\}_{0\leqslant i<n}$ e posto, sotto ogni termine $a_i x^{n-i}$, il segno + se $\dfrac{n-i}{i+1}\, a_i^2 > \dfrac{n-i+1}{i}\, a_{i-1}a_{i+1}$ e il segno — altrimenti, l'equazione ammette tante coppie di radici immaginarie quante sono le variazioni di segno nella successione così formata.[11]

Gli esempi presenti nei *Taccuini* sono quasi tutti diversi da quelli che appaiono nell'opera a stampa.

2. *Un tentativo di dimostrazione di G. Campbell*

Un primo tentativo di dimostrazione della regola di Newton apparve nel 1728 nel volume 35 delle *Philosophical Transactions of the Royal Society* nell'articolo di

[6] Newton era solito annotare su quaderni rilegati, i *Taccuini*, riassunti, osservazioni e risultati inerenti alle sue letture. I primi *Taccuini* relativi allo studio della matematica furono compilati prevalentemente nel biennio 1664-1666. Essi sono pubblicati in D.T. Whiteside, *The Mathematical Papers*, op.cit., I, 1967.

[7] Ivi, pp. 520-530.

[8] Cfr. Ivi, p. 521.

[9] Cfr. Ivi, p. 521.

[10] Cfr. Ivi, pp. 523-524.

[11] Cfr. Ivi, p. 526.

George Campbell[12] *A Method for determining the Number of impossible Roots in adfected Aequations* (pp. 515-531).[13]

Due sono le proposizioni dimostrate nella memoria. La prima afferma che, considerata un'equazione algebrica di grado n e una qualunque terna a_{i-1}, a_i, a_{i+1} di coefficienti consecutivi, se le radici sono tutte reali, allora si ha

$$\frac{i\,(n-i)}{(i+1)\,(n-i+1)}\,a_i^2 > a_{i-1}a_{i+1}\,.^{14}$$

Si tratta di una condizione necessaria per la realità delle radici di un'equazione. Lo stesso Campbell osserva che essa non è altresì sufficiente: infatti scrive «this ...doth not hold conversly». Da questa condizione egli trae la conclusione che, se per un certo indice i, si ha

$$\frac{i\,(n-i)}{(i+1)\,(n-i+1)}\,a_i^2 < a_{i-1}a_{i+1}\,,$$

l'equazione ammette due radici immaginarie. L'autore afferma di avere in tal modo dimostrato la regola di Newton.[15]

Da questa affermazione si evince che Campbell è convinto che ogni occorrenza della condizione dia luogo ad una coppia distinta di radici immaginarie,ma nulla di quello che è stato detto in precedenza autorizza questa conclusione; in realtà egli ha dimostrato solo l'esistenza di una coppia di radici immaginarie.

La dimostrazione della proposizione si basa su due lemmi, il primo dei quali, osserva che un'equazione e la sua trasformata a radici reciproche hanno lo stesso numero di radici reali. L'altro stabilisce che se un'equazione algebrica f(x)=0 ha radici tutte reali, allora anche la sua derivata f'(x)=0 ha radici tutte reali.[16] L'autore

[12] Assai poco si sa di George Campbell (1705-1766). Insegnante di matematica ad Edimburgo dal 1725 al 1729, si trasferì poi a Londra. Impiegato del Stores Woolwich Arsenal dal 1734 al 1751, finì i suoi giorni a Durham. Nel 1725 concorse ad una cattedra di matematica ad Edimburgo che fu invece conferita a C. MacLaurin.

[13] Una traduzione latina di questo articolo si trova in appendice all'edizione del 1732 dell'*Arithmetica* di I. Newton. La nota 67 (pp. 181-191) dell'edizione francese dell'*Arithmetica*,a cura di N. Beaudeux, Paris 1802, contiene la traduzione dell'articolo di Campbell fino alla dimostrazione della proposizione I.

[14] *Proposizione I.* Let $x^n - Bx^{n-1} + Cx^{n-2} - Dx^{n-3} + Ex^{n-4} -$ etc. $\pm ex^4 \mp dx^3 \pm cx^2 \mp bx \pm A = 0$ be an Aequation of any Dimensions all whose Roots are real, let M be any coefficient of this Aequation, L, N the adjacent coefficients, and m the Exponent of M. Then the Square of any coefficient M multiply'd by the Fraction $\frac{m\,(n-m)}{(m+1)\,(n-m+1)}$ will always exceed the Rectangle under the adjacent Coefficients L×N.

[15] «But when the Square of a Coefficient multiply'd by the Fraction above it, is less than the Rectangle under the adjacent Coefficients, it is a certain indication of two impossible Roots. From what hath been said, is immediately deduced the Demonstration of that Rule which the most illustrious *Newton* gives for determining the Number of impossible Roots in any given Aequation».

[16] Il simbolismo e la terminologia usati da Campbell sono in realtà diversi. Quella che attualmente si chiama equazione derivata, all'epoca prendeva il nome di *equazione dei limiti* e veniva costruita mol-

afferma che questa proprietà non può invertirsi e rimanda per la dimostrazione al trattato *Analyse Demontrée* di Reyneau.[17]

Lo schema dimostrativo seguito da Campbell, esposto con simbolismo e linguaggio moderni, risulta essere il seguente. Sia $f(x) = x^n + \sum_{1\leq i\leq n} a_i x^{n-i} = 0$ un'equazione a radici tutte reali; derivandola n-2 volte si perviene all'equazione

$$\frac{n(n-1)}{2} x^2 + (n-1) a_1 x + a_2 = 0$$

le cui radici sono anch'esse reali (lemma2) e pertanto deve essere $\frac{n-1}{2n} a_1^2 > a_2$. Applicando lo stesso procedimento alla $g(x) = 1 + \sum_{1\leq i\leq n} a_i x^i = 0$, reciproca di $f(x) = 0$, si perviene alla disuguaglianza $\frac{n-1}{2n} a_{n-1}^2 > a_{n-2}a_n$.

Per il secondo lemma, la derivata $f^{(i-1)}(x) = 0$ ha radici reali, pertanto se si procede a partire dalla sua trasformata a radici reciproche, come nei casi precedenti fino ad arrivare all'equazione di secondo grado, si ottiene la disuguaglianza

$$\frac{i(n-i)}{(i+1)(n-i+1)} a_i^2 > a_{i-1}a_{i+1}\,.$$

Nella seconda proposizione l'autore fornisce una condizione necessaria di realità delle radici, molto più complessa della precedente, e da essa deduce una nuova regola per determinare il limite inferiore delle radici immaginarie. Tramite un esempio egli mostra che tale regola è più forte di quella di Newton; applicata, infatti, all'equazione $x^7 - 5x^6 + 15x^5 - 23x^4 + 18x^3 + 10x^2 - 28x + 24 = 0$, essa permette di scoprire l'esistenza di sei radici immaginarie, mentre la regola di Newton ne mette in evidenza solo due.

La dimostrazione di questa proposizione, condotta per via puramente algebrica, si fonda sulla proprietà che la somma dei quadrati delle differenze di numeri reali è positiva.

3. *Le «Lettere» di C. MacLaurin*

I contributi di Colin MacLaurin[18] alla dimostrazione della regola di Newton

tiplicando ogni termine dell'equazione, ordinata secondo le potenze decrescenti, per i termini della progressione n, n—1,...2,1,0.

[17] Cfr. C. Reyneau, *Analyse Demontrée*, Venise 1739. Tomo I, § 143, pp. 292-300.

[18] Colin MacLaurin (1698-1746). Studiò presso l'Università di Glasgow dove si laureò nel 1715. Nel 1719, durante una visita a Londra conobbe I. Newton del quale divenne devoto seguace. In molti dei suoi lavori egli dimostra teoremi che Newton aveva solo enunciato. La sua opera più importante è il *Treatise of Fluxions* (1742) nella quale si trova la prima esposizione logica e sistematica dei metodi newtoniani. Il trattato contiene, tra l'altro, lo sviluppo in serie di una funzione, che è passato alla storia con il suo nome. Fu membro della Royal Society dal 1719.

sono contenuti in due lettere inviate a Martin Folkes[19] e pubblicate nelle *Philosophical Transactions.*[20]

Nella prima, scritta nel 1725, l'autore fornisce alcune condizioni sufficienti a rivelare l'esistenza di radici immaginarie per le equazioni di 3° e 4° grado, sottolineandone la conformità alla regola di Newton. Queste condizioni, come avverte lo stesso autore nell'introduzione, dipendono da proprietà di natura puramente algebrica, in particolare dalla circostanza che i quadrati delle differenze di quantità reali sono sempre positive. La lettera si conclude con la proposizione V che stabilisce relazioni fra i primi tre e gli ultimi tre coefficienti di un'equazione. Si tratta delle stesse disuguaglianze che Campbell, nella proposizione I, dimostra valere per ogni terna di coefficienti. Le parole «to be continued», poste alla fine della lettera, rivelano l'intenzione dell'autore di proseguire nello studio di questo soggetto.

Nell'introduzione alla seconda lettera, indirizzata ancora a Martin Folkes e datata 19 aprile 1729, MacLaurin rivela di aver avuto l'intenzione di pubblicare un trattato d'algebra[21] nel quale avrebbe trovato posto anche la trattazione completa del suo metodo. Egli aggiunge però che nel frattempo erano sopraggiunti motivi che lo inducevano a dare alle stampe i suoi risultati.[22] Primo fra questi motivi era, certamente, la comparsa dell'articolo di Campbell, come si evince chiaramente dalla corrispondenza tra MacLaurin e J. Stirling.[23] Nella seconda lettera, dove la numerazione delle proposizioni prosegue quella precedente, MacLaurin prende in considerazione equazioni di grado n e stabilisce proposizioni più generali dalle quali deduce regole, anche diverse da quella di Newton, per individuare la presenza di radici immaginarie. Nella proposizione VI si valuta il prodotto di due coefficienti dell'equazione in funzione di quelli adiacenti, ma è la proposizione VII che, enuncian-

[19] Martin Folkes (1690-1754) studiò matematica all'Università di Camnbridge, si dedicò successivamente alla numismatica. Membro della Royal Society dal 1714, ne fu vicepresidente dal 1722 al 1741, quando ne divenne presidente. Conobbe MacLaurin durante la sua seconda visita a Londra.

[20] «*A letter from* Mr Colin MacLaurin, *Professor of Mathematicks at* Edinburgh, *and* F.R.S. to Martin Folkes,.. *concerning Aequations whith impossible Roots*», R.S. Phil. Trans., 34(1726-27) pp. 104-112. «*A second letter from* Mr Colin Mac Laurin, *Professor of Mathematicks in the University* of Edinburg *and* F.R.S. to Martin Folkes ...*concerning the Roots of Aequations, whith the Demonstration of other Rules in Algebra being the continuation of the Letter published in the Philosophical Transactions,* N° 394, R.S. Phil. Trans., 36 (1729-30) pp. 59-96. Una traduzione latina di queste *Lettere* si trova in appendice all'edizione del 1732 dell'*Arithmetica* di I. Newton, cfr. nota 1. La nota 67 (pp. 191-199) dell'edizione francese dell'*Arithmetica* contiene la traduzione della dimostrazione della proposizione VII, corredata di un ulteriore esempio.

[21] *A Treatise of Algebra* di MacLaurin fu stampato a Londra nel 1748 dopo la morte dell'autore a cura dei suoi amici. Di carattere abbastanza elementare, il trattato verte principalmente sulle applicazioni dell'algebra alla geometria e contiene, tra l'altro, la dimostrazione di alcune regole che Newton nella *Arithmetica Universalis* aveva soltanto enunciato. Esso ebbe numerose edizioni inglesi (London, 1771, 1779, 1788, 1796) e una traduzione in francese (Paris, 1756).

[22] «The Design I have for some Time had of publishing A Treatise of Algebra, where I proposed to treat this and several other subjects in a new Manner, made me think it unnecessary to send you the remaining Part of that Paper. But some Reasons have now determined me to send you with the continuation of my former method» (p. 59).

[23] Cfr. S. Mills, *The collected letters of Colin MacLaurin*, Nantwich, Cheshire, 1982.

do una condizione necessaria per la realità delle radici, fornisce un primo metodo, più forte della regola di Newton, per riconoscere l'esistenza di radici immaginarie. Questa proposizione coincide sostanzialmente con la proposizione IX di Campbell; MacLaurin stesso riconosce che essa era stata già pubblicata, ma non ne cita, tuttavia, l'autore.[24]

È invece il corollario alla proposizione II che fornisce, secondo l'autore, la dimostrazione della regola di Newton. L'enunciato del corollario coincide con quello della proposizione I di Campbell; si tratta pertanto di una dimostrazione incompleta in quanto, come abbiamo già osservato, viene effettivamente provata in questo modo solo l'esistenza di una coppia di radici immaginarie.

Successivamente l'autore dimostra altre proposizioni, la XI e la XII, dalle quali deduce regole che indicano, come egli stesso sottolinea, la presenza di radici immaginarie laddove queste non appaiono con l'applicazione della proposizione VII o della regola di Newton. A conferma di ciò vengono forniti alcuni esempi.

Le dimostrazioni, come riconosce lo stesso autore, richiedono calcoli molto complessi e pertanto, nella seconda parte della lettera, egli sente la necessità di dare una prova più semplice del corollario alla proposizione IX, cioè della regola di Newton. MacLaurin dichiara di fondare questa nuova linea dimostrativa sulla considerazione dell'*equazione dei limiti delle radici*[25] e pur riconoscendo che questo argomento era stato già trattato da altri autori, ne offre una sua versione. In particolare, egli dimostra che un'equazione algebrica ha tante radici immaginarie quante ne ha la sua equazione dei limiti, cioè la sua derivata, oppure quante ne ha l'equazione ottenuta da essa moltiplicandone i termini ordinatamente per la progressione 0, —1, —2,...,-n. A partire da queste due proprietà, seguendo uno schema simile a quello di Campbell, MacLaurin ottiene la dimostrazione del corollario alla proposizione IX. Questa parte della trattazione, esemplificata sul caso particolare dell'equazione di quarto grado, risulta molto più intellegibile. Ritroviamo quest'ultima dimostrazione anche nel *Treatise of Algebra*, nel capitolo dedicato alla regola di Newton, dove l'autore conclude la trattazione mettendo in rilievo che il metodo non sempre permette di individuare le radici immaginarie di un'equazione, poichè dalla circostanza che l'equazione dei limiti ha tutte le radici reali, non segue che l'equazione proposta ha tutte radici reali.

MacLaurin nella sua corrispondenza privata[26] aveva più volte insinuato che Campbell si fosse ispirato al suo primo lavoro. Quest'ultimo, comunque, doveva esser venuto a conoscenza dei sospetti a suo carico e per difendersene, subito dopo la pubblicazione della seconda lettera, fece stampare un opuscolo[27] nel quale non solo si difendeva dall'accusa di plagio, ma cercava di rovesciarla, accusando, a sua volta, l'antagonista di averlo copiato. La risposta di MacLaurin non si fece attendere ed

[24] «The seventh Proposition ... discover impossible Roots in an Equation, that do not appear by Sir Isaac Newton's Rule. These are the only two Rules *that have been hitherto published*» (p. 73).

[25] Cfr. nota 16.

[26] Cfr. S. MILLS, *The Collected letters...* op. cit.

[27] GEORGE CAMPBELL, *Remarks on A Paper published by Mr. MacLaurin, in the «Philosophical Transactions for the Month of May, 1729»*, (Edinburgh, 1729).

è anch'essa affidata ad un opuscolo[28]. La controversia è assai ben delineata in un recente articolo di S. Mills.[29]

4. *Le indagini per la ricerca delle radici immaginarie nelle* Institutiones Calculi Differentialis *di L. Euler*

Nel capitolo XII delle *Institutiones Calculi Differentialis* (1755) L. Euler (1707-1783) applica la teoria dei massimi e minimi alla ricerca delle radici reali e immaginarie di un'equazione algebrica.[30] Consapevole delle difficoltà di individuare effettivamente l'esistenza di radici immaginarie con il metodo proposto, l'autore espone, nel capitolo successivo, alcune regole di più pratica e immediata applicazione delle quali, tuttavia, riconosce le limitazioni.

> «Quamobrem in hoc negotio saepe numero sufficit eiusmodi criteria nosse,ex quorum praesentia tuto concludi possit inesse in aequatione proposita radices imaginarias,etiamsi ex eorum absentia vicissim inferri nequeat omnes prorsus radices esse reales. Quae cognitio etsi est imperfecta,tamen frequenter usu non destituitur» (p. 524).[31]

Le regole esposte sono quelle di Newton e Campbell (prop. II), i quali, peraltro, vengono esplicitamente citati. Le dimostrazioni, pur se sostanzialmente coincidono con quelle di Campbell, sono presentate in maniera molto più chiara ed incisiva. Va comunque osservato che anche Euler incorre nello stesso errore di Campbell, quello di ritenere di avere effettivamente dimostrato la regola di Newton, laddove, invece, si è provata solo l'esistenza di due radici immaginarie. Euler tuttavia ha qualche dubbio sul fatto che tutte le istanze della regola possano fornire coppie distinte di radici immaginarie, infatti osserva

> «Facile autem apparet non singula criteria, quae deficiunt, binas radices imaginarias indicare posse; in aequatione enim n dimensionum, quia habentur n+1 termini atque ex singulis praeter primum et ultimum criterium desumi potest, omnino criteria habentur n-1; neque tamen, si singula deficiant, aequatio 2n—2 radices imaginarias habere poterit, propterea quod omnino tantum n habeat radices» (p.531),

[28] Colin MacLaurin, *Defence: A Defence of the Letter Published in the Philosophical Transactions for March and April 1729. Concerning the Impossible Roots of Equations; in a Letter from the Author, to a Friend at London* (Edinburgh, 1730).

[29] S. Mills, *The Controversy Between Colin MacLaurin and George Campbell Over Complex Roots, 1728-1729.* «Arch. Hist. Sci. Ex.», 28 (1983), pp. 149-164.

[30] A questo proposito si può ricordare che un'analisi simile, anche se maggiormente guidata dall'intuizione geometrica, è già presente in J. Stirling: *Lineae Tertii Ordinis Newtonianae ...*, Oxoniae 1717, pp. 58-69.

[31] Le citazioni si riferiscono all'Opera Omnia di L. Euler. Serie I. *Opera Mathematica*, vol. X, Lipsiae 1913.

ma, immotivatamente conclude che sono le occorrenze non consecutive delle condizioni che offrono coppie di radici immaginarie distinte

> «Unum autem criterium semper duas radices imaginarias patefacit, et quia fieri potest, ut duo criteria huiusmodi radicum non plures ostendant, videndum est, utrum haec duo criteria sint contigua necne; priori casu numerus radicum imaginarium non augebitur, posteriori vero, quia criteria litteras prorsus diversas involvunt, unumquodque binas radices imaginarias monstrabit» (p. 531).

Euler conclude la trattazione osservando che le regole sono tanto più imperfette quanto più alto è il grado dell'equazione

> «Falleremur ergo, si his criteriis tanquam perfectis signis radicum realium et imaginarium uti vellemus, propterea quod fieri potest, ut aequatio plures habeat radices imaginarias, quam haec criteria indicant; error autem eo maior esse posset, quo altioris gradus fuerit aequatio proposita» (p. 536).

5. *La ricerca delle radici immaginarie nelle* Meditationes algebraicae di E. Waring[32]

Già nella sua prima opera *Miscellanea analytica de aequationibus algebraicis et curvarum proprietatibus...* (Cambridge, 1762) E. Waring si occupa del problema di trovare il numero delle radici immaginarie in una data equazione algebrica. In questo trattato l'autore fornisce un risultato analogo alla proposizione II di Campbell; egli infatti trasforma l'equazione in un'altra le cui radici sono i quadrati delle differenze delle radici dell'equazione data ed avverte «si mutentur resultantis aequationis signa alternatim de + in — et — in +, nullam impossibilem radicem habere datam aequationem, sin aliter impossibiles habere radices».

Waring afferma inoltre che il numero delle radici immaginarie individuate mediante la regola di Newton sta al numero delle radici immaginarie effettivamente possedute dall'equazione come 2^{n-2}: 3^{n-2}, dove 2n è il grado dell'equazione.

Nella seconda e terza edizione dell'opera, pubblicate con il titolo *Meditationes algebraicae* (Cambridge 1770 e 1782), l'autore ritorna sull'argomento ottenendo regole più generali desunte da due teoremi che governano tutta la trattazione. Detti teoremi forniscono una disuguaglianza che deve essere soddisfatta da opportune funzioni razionali intere simmetriche di n assegnati numeri reali.[33] Le regole danno

[32] E. Waring (1736, 1798) studiò a Cambridge dove si laureò nel 1757. Nel 1760 fu richiamato a ricoprire la cattedra di professore lucasiano che era stata anche di Newton. La sua fama di matematico è affidata ad alcuni trattati: *Meditationes algebraicae* (Cambridge, 1770, 1782), *Proprietates algebraicarum curvarum* (Cambridge, 1772), *Meditationes analyticae* (Cambridge, 1776, 1785) e ad articoli pubblicati sulle *Philosophical Transactions*. I suoi contributi più importanti sono relativi alla teoria dei numeri. Cfr. J.F. Scott, *Edward Waring*, DSB, ad vocem.

[33] Si tratta, con riferimento all'edizione del 1782, dei teoremi 7 e 8 (pp. 61-67). Il teorema 7 afferma che dati n numeri reali $a_1, a_2, \ldots, a_n$ e considerate le somme P, Q di prodotti di m—1, M—1 opportune potenze intere di a_i, si ha: $(n-m)(n-m+1)\ldots(n-M+1)\ P \geq Q$. Il teorema 8 stabilisce una proprietà ana-

un metodo per trovare il numero di radici immaginarie in un'equazione le cui radici hanno una relazione data con le radici dell'equazione assegnata. Il primo esempio fornito è ancora quello in cui le radici dell'equazione risultante sono i quadrati delle differenze tra due qualunque radici dell'equazione assegnata. Vengono dati anche esempi in cui la relazione è più complessa. L'autore infine osserva che

> «omnes hae regulae etiam generaliores reddi possunt calculum instituendo de quantitatibus superiorum dimensionum quae necessario erunt affirmativae, quando radices sint possibiles: sed hae methodi sient multo magis operosae» (p. 75).

Le regole di Waring, che comprendono ovviamente anche quella di Newton, sono analoghe a quella di MacLaurin; la loro dimostrazione ha, invero, lo stesso grado di validità.

L'autore, peraltro, è conscio di non aver dato una vera dimostrazione; nella prefazione all'opera egli, infatti, osserva...

> «...at omnes hae regulae praedictae perraro invenient verum numerum impossibilium radicum in aequationibus multuram dimensionum, et adhuc demonstratione egent; vulgares enim demonstrationes solummodo probant impossibiles radices in datâ aequatione contineri; non vero quod saltem tot sunt, quot invenit regula: vera resolutio problematis est perdifficilis et valde laboriosa...» (p. xi).

La trattazione di Waring, che occupa l'intero capitolo II del trattato (pp. 36-115), è prolissa e confusa e quindi di difficile lettura.

6. *Gli studi di J.L. Lagrange*

Il problema di trovare «aucune règle générale pour connaitre le nombre des racines imaginaires dans les équations qui doivent en contenir, et moins encore pour savoir combien il doit y en avoir de réelles positives et de réelles négatives, lorsqúon connait d'ailleurs le nombre des réelles et des imaginaires», è riconosciuto di grande importanza da J.L. Lagrange (1736-1813). Egli infatti, nell'introduzione alla sua famosa memoria *Réflexions sur la Résolution Algébrique des Équations* (1770-71),[34] lo indica, assieme a quello della ricerca di metodi algebrici per la risoluzione di equazioni di grado superiore al quarto, come uno dei principali problemi aperti della teoria delle equazioni algebriche.

Nelle memorie *Sur la Résolution des Équations numériques* e *Additions au Mémoire sur la Résolution des Équations numeriques*,[35] Lagrange affronta questo proble-

loga a quella enunciata dal teorema 7 ma con riferimento ad n numeri reali $a_1, a_2, \dots, a_n$ tutti dello stesso segno.

[34] Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles Lettres de Berlin, années 1770 et 1771. Cfr. J.L. De Lagrange, *Oeuvres*, Gauthiers-Villars, Paris, 1867, 8 voll (Reprint G. Olms 1973). t.III, pp. 205-425.

[35] Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin, t. XXIII (1769) e t. XXIV (1770), cfr. ivi t. II, pp. 539-654.

ma da un punto di vista generale, ottenendo criteri immediatamente operativi solo per equazioni fino al quinto grado. Egli stesso infine osserva

> «Peut-être qu'en poussant plus loin cette théorie on pourrait trouver des rêgles sures pour déterminer le nombre des racines réelles dans les équations de degré quelconque, les méthodes qu'on a proposées jusqu'à présent pour cet objet étant ou insuffisantes, come celles de Newton, MacLaurin, etc., ou impraticables, come celles de Stirling et de l'abbé de Gua, qui supposent la résolution des équations des degrés inferieurs».[36]

Lo studio *Recherches sur la Détermination du nombre des Racines Imaginaires dans les Équations littérales*[37] è completamente dedicato all'argomento. In esso l'autore, dopo una breve premessa storica in cui ripropone l'analisi di T. Harriot per il riconoscimento delle radici reali dell'equazione generale di terzo grado, ricorda le regole di Newton, MacLaurin e Campbell e indica le ragioni della loro imperfezione e la possibilità di generalizzazione

> «La raison en est que cette règle n'est pas déduite de la considération immédiate des racines réelles et imaginaires, mais seulement de la considération de quelques conditions particulières qui doivent nécessairement avoir lieu quand toutes les racines sont réelles, et qui consistent en ce qu'alors la somme des carrés des racines, ou des carrés de leurs différences, ou en general, *des carrés de telles fonctions rationelles qu'on voudra des racines d'une équation* doit toujours être une quantité positive. En effet *il est facile de tirer de ce principe un grand nombre de conditions particulières* sans lesquelles les racines ne peuvent être toutes réelles,mais on aurait tort de regarder ces conditions comme des caractéres distinctifs des racines réelles et imaginaires».[38]

Dopo aver trovato condizioni necessarie nel caso di due particolari funzioni razionali, l'autore si preoccupa di fornire una condizione necessaria e sufficiente. A questo scopo egli associa all'equazione $f(x)=0$ una trasformata $\gamma(u)=0$ tale che

> «...la proposée ne pourra avoir de racines imaginaires qu'autant que la transormée en *u* aura des racines réelles négatives; de sorte que, si l'équation proposée n'a aucune racine imaginaire, la transformée ne pourra avoir aucune racine négative, et viceversâ si celle-ci n'a aucune racine, négative, celle-là n'en aura aucune imaginaire».[39]

Nonostante i vari modi presentati per determinare la trasformata, il metodo risulta ancora poco efficace perchè non permette di calcolare il numero delle radici

[36] Cfr. ivi t. II, p. 587. Qui Lagrange fa riferimento alla memoria di Stirling citata nella nota 30 e alla memoria di M. De Gua: *Recherche du nombre des racines réelles ou imaginaires réelles positives ou réelles négatives qui peuvent se trouver dans les Équations de tous les degrés.* Mémoire de l'Academie Royale des Sciences, 1741, pp. 435-494.

[37] Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin, année 1777, cfr. J.L. Lagrange, *Oeuvres,* op. cit. t. IV, pp. 343-377.

[38] Ivi, p. 351. La sottolineatura è nostra.

[39] Ivi, p. 356.

immaginarie in generale,ma fornisce buoni risultati solo per equazioni fino al quinto grado.

È da notare infine che, per quanto acuta sia stata l'analisi di Lagrange, specialmente nel mettere in evidenza quelli che sono i principi generali che portano alla formulazione di regole per scoprire le radici immaginarie, egli, tuttavia, non riuscì a portare alcun sostanziale contributo alla loro dimostrazione.

7. *J.J. Sylvester e la dimostrazione della regola*

Nel tomo 154 (1864) delle *Philosophical Transactions* è contenuta una lunga memoria [40] di J.J. Sylvester.[41] La memoria è composta da tre parti: nella prima viene dimostrata la regola di Newton per equazioni algebriche fino al quinto grado (incluso); nella seconda viene formulata e dimostrata una regola analoga per una particolare classe di equazioni algebriche; nella terza, infine, si determina, mediante invarianti algebrici, la natura delle radici di un'equazione algebrica del quinto grado.

Nell'introduzione alla prima parte l'autore ripercorre la storia dei vari tentativi di dimostrazione della regola, mostrando una conoscenza profonda delle opere dei matematici che si erano interessati all'argomento. Nell'intento di estendere la dimostrazione ad equazioni di grado superiore al quinto, Sylvester ben presto si accorse che il metodo esposto non offriva alcuna prospettiva di successo, come egli stesso afferma in una breve comunicazione alla Royal Society,[42] nella quale, peraltro, annuncia di avere nel frattempo trovato un metodo più sottile e raffinato che gli aveva permesso di estendere la dimostrazione ad equazioni del sesto e del settimo grado e che riteneva senz'altro valido per equazioni di ogni grado. L'autore si dichiara altresì convinto che la dimostrazione trovata sia quella stessa che aveva suggerito a Newton di enunciare la regola.[43] Nello stesso anno Sylvester invia una comunicazione all'Accademia delle Scienze di Parigi [44] nella quale dichiara di avere trovato la dimostrazione della regola completa di Newton anticipando, brevemen-

[40] J.J. Sylvester, *Algebraical researches, containing a disquisition on Newton's rule for the discovery of imaginary roots, and an allied rule applicable to a particular class of equations, together with a complete invariantive determination of the character of the roots of the general equation of the fifth degree,* &c. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, CLIV. (1864), pp. 579-666.

[41] J.J. Sylvester (Londra 1814, Oxford 1897) fu un matematico molto produttivo. Benché i suoi scritti trattino una grande varietà di problemi, dalla teoria dei numeri alla dinamica, all'ottica, diede i suoi più importanti contributi alla teoria degli invarianti algebrici e a questioni connesse. Le sue opere matematiche sono state pubblicate da H.F. Baker: *The collected Mathematical papers,* 4 voll. Cambridge (1904-12). Il quarto volume delle opere contiene un'ampia biografia dell'autore.

[42] J.J. Sylvester, *On Newton's rule for the discovery of imaginary roots of equations,* Proceeding of the Royal Society of London, XIV (1865), pp. 268-270.

[43] Ribadiamo a questo proposito che nessuna indagine storica fin ora compiuta sulle opere matematiche di Newton autorizza a supporre che egli fosse in possesso di una dimostrazione.

[44] J.J. Sylvester, *Sur les limites du nombre des racines réelles des équations algebriques.* Comptes Rendus de l'Academie des Sciences, LX (1865), pp. 1261-1263.

te, i presupposti su cui essa si basa. In una seconda comunicazione[45] viene enunciato, per la prima volta, un teorema più generale, oggi chiamato teorema di Sylvester, dal quale, come semplice corollario, segue la regola. La dimostrazione di questo teorema fu resa pubblica da Sylvester nel corso di una conferenza tenuta al King's College di Londra il 28 giugno 1865. Un resoconto della conferenza fu il primo lavoro matematico pubblicato dalla London Mathematical Society[46].

In questo lavoro Sylvester parte dalla considerazione dell'equazione algebrica di grado n

$$f(x) = a_0x^n + na_1x^{n-1} + \frac{1}{2} n (n - 1) a_2x^{n-2} + \dots + na_{n-1}x + a_n = 0$$

e associa ad essa la successione degli *elementi semplici*

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$$

e quella degli elementi quadratici

$$A_0 = a_0^2, A_1 = a_1^2 a_0a_2, A_2 = a_2^2 - a_1a_3, \dots, A_{n-1} = a_{n-1}^2 - a_{n-2}a_n, A_n = a_n^2$$

In una coppia associata $\left\{\begin{matrix} a_r\ a_{r+1} \\ A_r\ A_{r+1} \end{matrix}\right\}$ possono, per quanto riguarda i segni, presentarsi i seguenti casi pP, vV, pV, vP, detti, rispettivamente, doppia permanenza, doppia variazione, permanenza variazione, variazione permanenza. L'autore enuncia quindi la regola di Newton, distinguendo tra «forma completa» e «incompleta»:

> «Considerate le successioni complete degli elementi quadratici e degli elementi semplici di f(x) nel loro ordine naturale, il numero delle doppie permanenze nelle successioni associate,... è un limite superiore al numero delle radici negative e il numero delle variazioni permanenze è un limite superiore al numero delle radici positive in f(x)... Questa è la Regola Completa come data da Newton in un'altra formulazione.... Come corollario segue che il numero totale delle radici reali è minore o uguale a Σ pP + Σ vP,cioè minore o uguale a Σ P. Quindi il numero delle radici immaginarie è maggiore o uguale di n— Σ P = Σ V. Questa è la Regola incompleta di Newton o prima parte della Regola Completa, così come è formulata da ogni autore... tranne Newton stesso».

Sylvester afferma che la regola completa di Newton può essere dedotta facilmente dal seguente teorema generale.

[45] J.J. Sylvester, *Théorème d'algèbre élementaire.* Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, LXI (1865) pp. 282-283.

[46] J.J. Sylvester, *On an elementary proof and generalization of sir Isaac Newton's hitherto undemonstrated rule for the discovery of imaginary roots.* Proceeding of the London Mathematical Society, I (1865-1866), pp. 1-16.

«Si formino le due successioni di elementi semplici e quadratici di $f(x+\lambda)$; le doppie permanenze dovute a questa trasformazione,...pP (λ), si dicano numero di doppie permanenze relative a λ, e, in modo analogo, pP (μ), numero delle stesse relative a μ. Allora..., supposto $\mu>\lambda$, si ha $pP(\mu) \geqslant pP(\lambda)$ o più esattamente $pP(\mu) - pP(\lambda) = (\mu, \lambda) + 2k$ dove (μ, λ) indica il numero delle radici reali comprese fra μ e λ e k è un qualunque intero maggiore o uguale a zero».

L'autore, dopo aver rilevato che il suo teorema ha la stessa corrispondenza alla regola di Newton di quella che il teorema di Fourier ha alla regola di Descartes, osserva come da esso derivi la regola di Newton, semplicemente prendendo $\mu=0$ e $\lambda=-\infty$.

Lo schema della dimostrazione di Sylvester è il seguente. Considerate le successioni degli elementi semplici di $f(x+t)$

$$f^{(n)}(t),\ f^{(n-1)}(t),\ 1\cdot 2\ f^{(n-2)}(t),\ \ldots,\ 1\cdot 2\cdot n\ f(t)$$

e degli elementi quadratici

$$G_n(t),\ G_{n-1}(t),\ G_{n-2}(t),\ \ldots,\ G(t)$$

$$\text{con } G_r(t) = [f^{(r)}(t)]^2 - \gamma_r f^{(r-1)}(t)\ f^{(r+1)}(t),\ \gamma_r = \frac{n-r+1}{n-r},$$

occorre determinare le leggi di cambiamento nel numero delle doppie permanenze nelle suddette successioni al crescere con continuità di t. È chiaro che cambiamenti si hanno soltanto quando t passa per un valore che annulli uno o più termini in una o in tutte e due le successioni di elementi. Si procede quindi ad un esame dei casi che possono presentarsi e si dimostra che:

i) se un solo termine nella serie degli elementi semplici, intermedio tra il primo e l'ultimo si annulla per $t=c$, ad es. $f^{(r)}(c)=0$, allora non si ha alcun cambiamento nel numero delle doppie permanenze quando t cresce passando per il valore c.

ii) Se un solo termine nella serie degli elementi quadratici, intermedio fra il primo termine e l'ultimo, si annulla per $t=c$, ad es. $G_{(r)}(c)=0$, si guadagnano al più due doppie permanenze quando t cresce passando per il valore c.

iii) Se più termini consecutivi nella serie degli elementi semplici si annullano quando $t=c$, allora si guadagnano un numero pari di doppie permanenze quando t cresce passando per il valore c.

iv) Se più termini consecutivi nella serie degli elementi quadratici si annullano quando $t=c$, si guadagnano un numero pari di doppie permanenze quando t cresce passando per il valore c.

v) Se si annulla un termine estremo, poichè l'unico estremo che può annullarsi è $f(t)$, se $f(c)=0$ e c è una radice di molteplicità s, allora si guadagnano s doppie permanenze quando t cresce passando per c.

Ne segue, in conclusione, che al variare di t nell'intervallo [λ, μ], il numero delle doppie permanenze appartenenti alle successioni associate cresce, per v), di almeno tante unità quante sono le radici reali (contate con la loro molteplicità) contenute nell'intervallo, aumentato, in virtù di i, ii, iii, iv, al più di 2k.

Sylvester presenta una versione più breve della dimostrazione del suo teorema nel 1871[47] alla Royal Irish Academy. Il teorema intanto era già stato inserito da I. Todhunter nella seconda edizione del suo trattato sulla teoria delle equazioni[48] con un'esposizione assai fedele a quella originale.

Anche il matematico danese J. Petersen, autore di un pregevole trattato sulla teoria delle equazioni,[49] presenta il teorema di Sylvester del quale, tuttavia, era venuto a conoscenza solo tramite il trattato di Todhunter. Questa circostanza è ricordata dallo stesso Sylvester nell'ultima nota dedicata all'argomento.[50] In questa nota, che contiene solo marginali puntualizzazioni sulla dimostrazione, l'autore fa riferimento, per il simbolismo usato, direttamente al trattato di Todhunter, al quale comunque rimprovera di non aver citato esplicitamente la relazione $pP(\mu) - pP(\lambda) = (\mu, \lambda) + 2k$.

Dalla lettura dei lavori di Sylvester traspare la soddisfazione dell'autore per aver finalmente dimostrato un risultato che per tanto tempo aveva impegnato anche matematici di grande valore. Crediamo quindi che egli abbia gradito l'elogio con il quale Todhunter conclude l'esposizione del suo teorema:

> «Se consideriamo la bellezza intrinseca del teorema che è stato ora esposto, l'interesse che appartiene alla regola associata col gran nome di Newton, ed il lungo intervallo di anni durante il quale la ragione e l'estensione di quella regola rimasero nascoste ai matematici, tra i quali sono esplicitamente inclusi MacLaurin, Waring ed Eulero, dobbiamo riguardare le ricerche del Professor Sylvester come tra le più importanti contribuzioni fatte nei tempi moderni alla Teoria delle Equazioni, da porsi a buon diritto in linea con quelle di Fourier, Sturm e Cauchy».[51]

[47] J.J. Sylvester, *On an elementary proof of sir Isaac Newton's hitherto undemonstrated rule, given in the Arithmetica universalis, for the discovery of imaginary roots in algebraical equations.* Transactions of the Royal Irish Academy, XXIV (1871) pp. 247-252.

[48] Isaac Todhunter, *An Elementary treatise on the theory of Equations,* Cambridge, 1867, second edition revised. Una traduzione italiana di questo trattato fu fatta da G. Battaglini: *I. Todhunter, Teoria delle equazioni.* Pellerano, Napoli, 1875.

[49] Il trattato pubblicato a Copenaghen nel 1878 fu successivamente tradotto in tedesco, francese e italiano: J. Petersen, *Teoria delle equazioni algebriche,* Libreria B. Pellerano, Napoli, 1891.

[50] *On the theorem connected with Newton's rule for the discovery of imaginary roots of equations.* Messenger of Mathematics, IX (1880) pp. 71-84. In una nota, a pagina 73, si legge: «Dr Julius Petersen, of Copenhagen, in his treatise on Algebraical Equations, not having had the opprtunity, as he has since informed me, of consulting this, and taking Mr Todhunter's chapter on the subject as his authority...».

[51] Cfr. I. Todhunter, *Teoria delle equazioni,* op. cit. p.231.

Conclusioni

La storia della dimostrazione della regola di Newton ci fornisce un paradigma assai istruttivo di quanto, a volte, sia lungo e laborioso il cammino per arrivare alla dimostrazione di un'affermazione, frutto di una intuizione geniale. Anche se matematici come Euler, Lagrange si impegnarono in questo compito, tuttavia, per lunghi anni, quella dimostrazione rimase incompleta ed oscura. Ripercorrendo infatti questa storia, si vede come dopo i primi tentativi di Campbell e MacLaurin, non vi siano stati, prima di Sylvester, contributi essenzialmente nuovi. Si può notare solo, in alcuni autori, Euler e maggiormente Waring, una accresciuta consapevolezza che quelle fino ad allora fornite non fossero effettivamente dimostrazioni della regola enunciata da Newton. Regola che Sylvester definì «la meraviglia e l'obbrobrio degli algebristi» riferendosi, da un lato alla circostanza che Newton l'avesse così genialmente intuita, e dall'altro al fatto che era stato necessario tanto tempo per ottenere una dimostrazione.