Rendiconti
Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL
Memorie di Matematica
107° (1989), Vol. XIII, fasc. 9, pagg. 165-177

FRANCO PARODI (*)

Linearizzazione di dispositivi a tempo continuo (**)

Linearization of non Linear Continuous-Time Devices

SUMMARY. — Resuming the results exposed in [1], and in analogy to [2], we construct two universes of non linear monotone continuous-time devices with differentiable scattering maps. Signals in the first universe are C^{∞} while in second they are L^2 real functions. Then we prove that the application which associate to every device of both universes the linear device tangent in the origin, is a morfism in the universe of the linear passive solvable devices.

INTRODUZIONE

In [1] si sono costruiti due universi di dispositivi non lineari con funzionamenti funzioni del tempo continuo rispettivamente infinite volte derivabili oppure di quadrato sommabile su tutte le semirette $(-\infty, T]$.

Nel presente lavoro, riprendendo le notazioni e i risultati del precedente, e in analogia a quanto studiato in [2] nel caso del tempo discreto, ci si occupa della possibilità di linearizzare i dispositivi di questi universi nel senso di individuarne i dispositivi lineari tangenti nel comune punto di lavoro, l'origine, preoccupandosi altresì della compatibilità della linearizzazione con le operazioni di composizione in rete.

Poichè i dispositivi in questione sono tutti risolubili, la linearizzazione si ottiene linearizzando la mappa di scattering, la compatibilità con le operazioni di composizione in rete si riduce alla compatibilità della linearizzazione con l'operazione di freedback su opportuni sistemi associati.

Nel paragrafo iniziale si premettono brevemente alcune nozioni di calcolo differenziale per le mappe non anticipative negli spazi dotati di una famiglia di seminorme che intervengono nel seguito.

(*) Istituto Matematico di Ingegneria, P.le Kennedy, Pad. D, 16129 Genova.
(**) Memoria presentata il 15 dicembre 1988 da Giuseppe Scorza Dragoni, uno dei XL.

ISSN-0392-4106

Nei paragrafi 1 e 2 si individuano le proprietà che consentono di restringersi ad alcuni sottouniversi di dispositivi risolubili le cui mappe di scattering sono di classe C^1, in entrambi i casi è essenziale per concludere stabilire la derivabilità delle funzioni implicite che si presentano chiudendo gli opportuni feedback.

Nel paragrafo 3 infine si mostra che in entrambi i casi la linearizzazione è compatibile con le operazioni di composizione in rete, è cioè un morfismo degli universi considerati in opportuni universi lineari.

0. - Mappe non anticipative di classe C^1

Sia X lo spazio delle funzioni reali definite in $\mathbf{R}$ e di quadrato sommabile in $(-\infty, T]$ per ogni $T \in \mathbf{R}$.

Consideriamo X^n $(n \in \mathbf{N})$, risulta quest'ultimo uno spazio vettoriale dotato della famiglia crescente di seminorme, verificante l'assioma di separazione, così definita:

$$\|x\|_T = \Big(\int_{-\infty}^{T} x^2(\tau)\Big)^{\frac{1}{2}}, \qquad T \in \mathbf{R},\ x \in X^n,$$

ciascuna associata al «semi-prodotto scalare»:

$$\langle x, y\rangle_T = \int_{-\infty}^{T} \langle x(\tau), y(\tau)\rangle\, d\tau \ (^1), \qquad x, y \in X^n,\ T \in \mathbf{R}.$$

Alla famiglia di seminorme $\|\cdot\|_T$ è associata in modo naturale una topologia metrizzabile, nel seguito faremo riferimento alla convergenza in tale topologia, rispetto alla quale X^n risulta completo.

Consideriamo mappe

$$G: X^n \to X^m \qquad (n, m \in \mathbf{N}),$$

non anticipative, cioè tali che:

se $T \in \mathbf{R}$, $x, y \in X^n$ e $x(t) = y(t)$ per ogni $t < T$ risulti $(G(x))(t) = (G(y))(t)$ per ogni $t < T$; la stessa condizione può essere espressa a mezza delle seminorme così:

$$\text{per ogni } T \in \mathbf{R} \text{ e per ogni } x, y \in X^n,$$
$$\|x - y\|_T = 0 \text{ implica } \|G(x) - G(y)\|_T = 0.$$

[1] Con $\langle -, - \rangle$ denotiamo il prodotto scalare in $\mathbf{R}^n$.

Consideriamo mappe G non anticipative e derivabili secondo Fréchet, pensando in X^n, la convergenza associata alla topologia; se G è derivabile in $x_0 \in X^n$ noteremo:

$$G'(x_0) : X^n \to X^m$$

il morfismo lineare derivato di G in x_0.

Dalla caratterizzazione della topologia in X^m e dal fatto che G è non anticipativo, segue che $G'(x_0)$ è anche esso non anticipativo.

Denotiamo $L_0(X^n, X^m)$ lo spazio vettoriale dei morfismi lineari non anticipativi continui da X^n in X^m, tale spazio è dotato della famiglia crescente di seminorme così definita:

$$\|U\|_T = \sup_{\|x\|_T \geq 1} \|Ux\|_T , \qquad T \in \mathbf{R} ,\ U \in L_0(X^n, X^m) ;$$

essa risulta crescente rispetto a T e verifica l'assioma di separazione.

Se la mappa $G: X^n \to X^m$ è non anticipativa e derivabile in tutto X^n, si ha la mappa

$$G' : X^n \to L^0(X^n, X^m) ,$$

G si dice di classe C^1 se G' risulta continua.

La continuità di G' in $x_0 \in X^n$ si caratterizza facilmente mediante la continuità di G' rispetto alla seminorma relativa allo stesso indice $T \in \mathbf{R}$ sia in X^n che in $L_0(X^n, X^m)$ per ogni $T \in \mathbf{R}$, cioè:

per ogni $T \in \mathbf{R}$, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che $\|G'(x) - G'(x_0)\|_T < \varepsilon$ per ogni $x \in X$ tale che $\|x - x_0\|_T < \delta$.

Dopo queste premesse, consideriamo il seguente caso particolare di notevole interesse per il seguito del lavoro.

Sia X_0 il sottospazio di X costituito dalle funzioni con supporto contenuto in $[0, +\infty)$, data una funzione $F: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ di classe C^1, consideriamo la trasformazione

$$G: X_0^n \to X_0^m$$

così definita: se $x \in X_0^n$

$$(G(x))(t) = F(x(t)) \qquad \text{per ogni } t \in \mathbf{R} ,$$

risulta banalmente G non anticipativa.

La mappa G è continua se F è lipschitziana, ed è derivabile se F ha derivata F' lipschitziana, risultando, se $x_0 \in X$:

$$G'(x_0) : X_0^n \to X_0^m$$

il morfismo lineare così definito: se $x \in X_0^n$

$$(G'(x_0)x((t) = F'(x_0(t))x(t) \qquad \text{per ogni } t \in \mathbf{R}$$

dove $F'(x_0(t))x(t)$ denota il prodotto della matrice Jacobiana di F calcolata nel punto $x_0(t)$, per il vettore $x(t)$.

Inoltre nelle stesse ipotesi la mappa

$$G': X_0^n \to L_0(X_0^n, X_0^m)$$

risulta continua.

Se poi Y è il sottospazio di X_0 costituito dalle funzioni C^∞ a supporto contenuto in $[0, +\infty)$, se anche F è C^∞, risulta nelle stesse condizioni sopra riportate

$$G: Y^n \to Y^m$$

derivabile, con derivata

$$G': Y^n \to L_0(Y^n, Y^m)$$

continua.

1. - Un universo di dispositivi monotoni risolubili di classe C^1 con funzionamenti funzioni reali C^∞

Sia $\mathfrak{U}$ l'universo di dispositivi monotoni risolubili a funzionamenti in Y considerato in [1], $\mathfrak{U}$ consiste di tutti i dispositivi della forma

$$A = \theta_*(L + M)$$

con:

θ trasduttore elementare,

$L \in \mathfrak{D}(Y)$, universo dei dispositivi lineari passivi razionali risolubili a funzionamenti in Y,

$M \in \mathfrak{K}$,

dove $\mathfrak{K}$ è la famiglia dei dispositivi a funzionamenti in Y con mappa di scattering

$$G: Y^n \to Y^n$$

del tipo seguente:

$$(G(x))(t) = F(x(t)) \qquad \text{per ogni } y \in Y^n,\ t \in \mathbf{R},$$

essendo F: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ una contrazione C^∞ e tale che $F(0) = 0$.

Consideriamo $\mathfrak{R}^1$ la famiglia di dispositivi di $\mathfrak{R}$ individuati dalla condizione che F sia inoltre dotata di derivata F' lipschitziana.

Sia ora $\mathfrak{U}^1$ la totalità dei dispositivi di $\mathfrak{U}$ individuati dalla condizione aggiuntiva che sia $M \in \mathfrak{R}^1$.

Teorema 1: *La famiglia $\mathfrak{U}^1$ di dispositivi dell'universo $\mathfrak{U}$ è un universo di dispositivi monotoni. Ogni dispositivo di $\mathfrak{U}^1$ è risolubile.*

Dim.: Il fatto che $\mathfrak{U}^1$ sia un universo di dispositivi, cioè che sia chiuso rispetto alle operazioni di composizione in rete, è immediato, essendo ovvio che la somma diretta di dispositivi di $\mathfrak{R}^1$ è ancora un dispositivo di $\mathfrak{R}^1$.

La monotonia e risolubilità dei dispositivi di $\mathfrak{U}^1$ è allora conseguenza del fatto che $\mathfrak{U}^1$ è un sottouniverso dell'universo di dispositivi monotoni risolubili $\mathfrak{U}$.

Teorema 2: *Ogni dispositivo dell'universo $\mathfrak{U}^1$ ha mappa di scattering di classe C^1.*

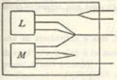
Dim.: Per provare che ogni dispositivo $A \in \mathfrak{U}^1$,

$$A = \theta_*(L + M)$$

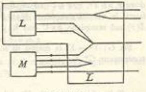
ha mappa di scattering di classe C^1, è opportuno presentare A nella forma:

$$A = \iota_*(L + M)$$

con L opportuno dispositivo di $\mathfrak{D}(Y)$ con $(p + q)$ terminali (q essendo il numero dei terminali di M), ed ι il trasduttore elementare che realizza solo cortocircuitazioni fra q coppie di terminali uno di M ed uno di L.



$\theta_*(L + M)$



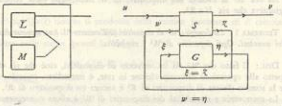
$\iota_*(L + M)$

Consideriamo il sistema associato al dispositivo

$$L + M$$

nella rappresentazione mediante le mappe di scattering.

È noto che [3] la cortocircuitazione di una coppia di terminali equivale al « feedback incrociato » sulla coppia di entrate uscite corrispondenti:



Sia $S\colon Y^{p+q} \to Y^{p+q}$ il morfismo di scattering di L, S è una matrice di operatori differenziali fratti, cioè una matrice nel corpo $\mathrm{R}(D)$, interpretando D come operatore di derivazione, Y ha una struttura naturale di spazio vettoriale sul corpo $\mathrm{R}(D)$.

La passività di L si caratterizza mediante la non espansività dell'operatore S rispetto ad ogni seminorma, ed anche, detta $\hat{S}$ la trasformata di Laplace dell'operatore S, mediante la non espansività della matrice complessa $\hat{S}(p)$, $p \in \mathbf{C}$, nel semipiano $\operatorname{Re} p > 0$ cioè:

$$|\hat{S}(p)| \leq 1 \qquad \text{per ogni } p \in \mathbf{C}\,,\ \operatorname{Re} p > 0\,.$$

Rappresentiamo il morfismo S distinguendo le entrate e le uscite destinate al feedback:

$$\left|\begin{array}{l} v = Au + Bw\,, \\ \zeta = \Gamma u + \Lambda w\,, \end{array}\right.$$

dove $v, u \in Y^p$, $\zeta, w \in Y^q$ ed A, B, Γ, Λ sono matrici di operatori differenziali fratti; le matrici complesse $\hat{A}(p)$, $\hat{B}(p)$, $\hat{\Gamma}(p)$, $\hat{\Lambda}(p)$ sono non espansive come $\hat{S}(p)$ nel semipiano $p \in \mathbf{C}$ con $\operatorname{Re} p > 0$.

Sia $G\colon Y^q \to Y^q$ la mappa di scattering di M, essa è individuata da una contrazione C^∞

$$F\colon \mathrm{R}^q \to \mathrm{R}^q$$

con F' lipschitziana, se $\xi \in Y^q$ si ha:

$$\eta(t) = (G(\xi))(t) = F(\xi(t)) \qquad \text{per ogni } t \in \mathrm{R}\,.$$

Ponendo $\xi = \zeta$ si ha il sistema:

$$\left|\begin{array}{l} v = Au + Bw\,, \\ \eta = G(\Gamma u + \Lambda w)\,, \end{array}\right.$$

ponendo poi $v = \eta$ si ha l'equazione

$$v = G(\Gamma u + \Lambda v).$$

Sappiamo [1, Teorema 1] che tale equazione ha per ogni $u \in Y^p$ una ed una sola soluzione $v \in Y^q$, cioè che dall'equazione si esplicita una unica funzione continua (anzi lipschitziana):

$$v(u)\colon Y^p \to Y^q.$$

Mostriamo, applicando il teorema di derivazione della funzione implicita negli spazi normati (in ciascuno spazio normato $(C^m[0, T])^q$, $T \in \mathbf{R}$, anche se non completo) che tale funzione $v(u)$ è derivabile, anzi di classe C^1.

Infatti definendo $H\colon Y^p \times Y^q \to Y^q$

$$H(u, v) = v - G(\Gamma u + \Lambda v)$$

risulta, per la derivabilità della funzione composta, H parzialmente derivabile con derivate continue:

$$H'_u(u, v) = -G'(\Gamma u + \Lambda v)\Gamma,$$

$$H'_v(u, v) = I - G'(\Gamma u + \Lambda v)\Lambda\ (^*),$$

proviamo inoltre che qualunque siano $u \in Y^p$, $v \in Y^q$, la trasformazione lineare $H'_v(u, v)$ è invertibile.

Fissato infatti (u, v), l'equazione:

$$(I - G'(\Gamma u + \Lambda v)\Lambda)x = y$$

ha una e una sola soluzione $x \in Y^q$ per ogni scelta di $y \in Y^q$.

Infatti tale equazione è equivalente al sistema differenziale:

$$(I - F'(\Gamma u + \Lambda v)\Lambda)x = y$$

dove $F'(\Gamma u + \Lambda v)$ è la matrice Jacobiana di F calcolata per ogni $t \in \mathbf{R}$ nel punto $(\Gamma u(t) + \Lambda v(t))$.

Posto $\Lambda = P(D)/Q(D)$ dove:

$$P(D) = A_m D^m + A_{m-1}D^{m-1} + \dots + A_1 D + A_0,$$

$$Q(D) = D^n + b_{n-1}D^{n-1} + \dots + b_1 D + b_0,$$

con $b_i \in \mathbf{R}$, A_i matrici reali $q \times q$, dalla non espansività di $\hat{\Lambda}(p)$ per $p \in \mathbf{C}$ con

(*) I denota l'operatore identico.

Re $p > 0$ risulta:

$$n > m \quad \text{e} \quad \|A_m\| < 1 .$$

Allora il sistema è equivalente a quest'altro:

$$(Q(D)I - F'(\Gamma u + \Lambda w)P(D))x = z \qquad \text{con } z = Q(D)y ,$$

e quest'ultimo sistema lineare a coefficienti continui è in forma normale ovviamente se $n > m$ ma anche se $n = m$, infatti la matrice

$$I - F'(\Gamma u + \Lambda w)A_n$$

è invertibile poichè se $k \in \mathrm{R}$, $0 < k < 1$ è una costante di contrazione per F, risulta:

$$\|F'(\Gamma u + \Lambda w)A_n\| < k\|A_n\| < k < 1$$

quindi $F'(\Gamma u + \Lambda w)$ è una contrazione.

Allora $w(u)$ è derivabile e si ha per ogni $u \in Y^q$:

$$w'(u) = [I - G'(\Gamma u + \Lambda w)\Lambda]^{-1} G'(\Gamma u + \Lambda w)\Gamma .$$

Da quest'ultima eguaglianza e dalla continuità della funzione composta e dell'inversa, segue la continuità di $w'(u)$.

Sostituendo infine si ha la rappresentazione del dispositivo mediante la seguente mappa di scattering, ovviamente di classe C^1:

$$v = Au + Bw(u)$$

con derivata:

$$v = (A + B[I - G'(-)\Lambda]^{-1} G'(-)\Gamma)u .$$

2. - Un universo di dispositivi monotoni risolubili di classe C^1 con funzionamenti funzioni reali localmente di quadrato sommabile

Sia $\mathcal{U}$ l'universo di dispositivi monotoni risolubili a funzionamenti in X considerato in [1], $\mathcal{U}$ consiste di tutti i dispositivi della forma:

$$A = \theta_*(L + M)$$

con

θ trasduttore elementare,

L dispositivo lineare passivo risolubile puramente resistivo, cioè con matrice di scattering reale subunitaria.

M dispositivo monotono risolubile con mappa di scattering G debolmente contrattiva rispetto ad ogni seminorma e tale che $G(0) = 0$.

Se di più si suppone la linearità anche di M si ottiene ovviamente un sottouniverso di $\mathcal{U}$ di dispositivi lineari passivi risolubili a funzionamenti in X interessante nel seguito, che indicheremo con $\mathfrak{D}(X)$.

Sia ora $\mathcal{U}^1$ la totalità dei dispositivi di $\mathcal{U}$ individuati invece dalla condizione aggiuntiva che G, la mappa di scattering di M sia localmente contrattiva e di classe C^1 (⁴).

Teorema 3: *La famiglia $\mathcal{U}^1$ di dispositivi dell'universo $\mathcal{U}$ è un universo di dispositivi monotoni risolubili.*

Dim.: Il fatto che $\mathcal{U}^1$ costituisca un universo di dispositivi segue ovviamente da risultati noti essendo ovvio che la somma diretta di mappe localmente contrattive e di classe C^1 è ancora localmente contrattiva e di classe C^1.

La monotonia e risolubilità dei dispositivi di $\mathcal{U}^1$ segue allora dal fatto che $\mathcal{U}^1$ è un sottouniverso dell'universo di dispositivi monotoni risolubili $\mathcal{U}$.

Teorema 4: *Ogni dispositivo del'universo $\mathcal{U}^1$ ha mappa di scattering di classe C^1.*

Dim.: Per provare ciò, dato un dispositivo $A \in \mathcal{U}^1$

$$A = \theta_*(L + M)$$

è ancora conveniente rappresentare A nella forma:

$$A = \iota_*(L + M)$$

con L opportuno dispositivo lineare passivo puramente resistivo con $(p + q)$ terminali, q essendo il numero di terminali di M, ed ι trasduttore elementare che realizza solo cortocircuitazioni fra coppie di terminali uno di M ed uno di L.

Passando ai sistemi associati nella rappresentazione mediante le mappe di scattering, e distinguendo le entrate e le uscite destinate al feedback, detti S il morfismo di scattering di L e G la mappa di scattering di M, sia S così descritta:

$$S: \left| \begin{array}{l} v = Au + Bw\,, \\ z = \Gamma u + \Delta w\,, \end{array} \right.$$

(⁴) Una mappa $G\colon X^n \to X^m$ è detta localmente contrattiva se è localmente contrattiva rispetto ad ogni seminorma, cioè se: per ogni $T \in \mathrm{R}$ esistono $k, \delta \in \mathrm{R}$, $0 < k < 1$, $\delta > 0$ tali che:

$$\|G(x) - G(y)\|_T < k\|x - y\|_T$$

per ogni $x, y \in X^n$ tali che $\|x\|_T < \delta$, $\|y\|_T < \delta$.

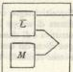
dove $u, v \in X^p$ e $z, w \in X^q$ ed A, B, Γ, Λ sono matrici reali non espansive come la matrice:

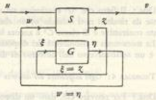
$$S = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline \Gamma & \Lambda \end{array} \right)$$

e sia G così descritta

$$\eta = G(\xi)$$

con G: $X^q \to X^q$ mappa localmente contrattiva rispetto ad ogni seminorma, quindi non anticipativa, di classe C^1, e tale che $G(0) = 0$.





Chiuso il feedback, certo ammissibile nelle nostre ipotesi [1], si ha un sistema con mappa ingresso uscita:

$$v = Au + Bw(u)$$

essendo $w(u)$ la mappa esplicitata dall'equazione:

$$w = G(\Gamma u + \Lambda w)$$

per concludere basta provare che tale mappa è di classe C^1.

Useremo a tale fine il teorema di derivabilità della funzione implicita negli spazi normati, (in ogni spazio normato $(L_2(-\infty, T])^q$).

Consideriamo la funzione:

$$H\colon X^p \times X^q \to X^q .$$

così definita se $u \in X^p$ e $w \in X^q$:

$$H(u, w) = w - G(\Gamma u + \Lambda w)$$

essa risulta parzialmente derivabile con derivate continue:

$$H'_u(u, w) = -G'(\Gamma u + Aw)\Gamma ,$$
$$H'_w(u, w) = I - G'(\Gamma u + Aw)A ,$$

inoltre $H'_w(u, w)$ è invertibile qualunque sia (u, w).

Fissati infatti u, w l'equazione:

$$(I - G'(\Gamma u + Aw)A)x = y$$

ha una ed una sola soluzione $x \in X^q$ per ogni $y \in X^q$ essendo:

$$G'(\Gamma u + Aw)A$$

una contrazione in X^q per ogni seminorma (perchè composto dalla contrazione G', derivata di una contrazione locale, con A non espansiva), e X^q è completo nella topologia associata alla famiglia di seminorme.

Allora $w(u)$ che è certo continua [3] risulta anche derivabile e per ogni $u \in X^p$ si ha

$$w'(u) = [I - G'(\Gamma u + Aw)A]^{-1} G'(\Gamma u + Aw)\Gamma$$

da cui anche la continuità di w'.

La mappa di scattering di $\mathcal{A}$:

$$v = Au + Bw(u)$$

è allora di classe C^1 con derivata:

$$v = (A + B[I - G'(-)A]^{-1} G'(-)\Gamma)u .$$

3. - Linearizzazione di universi di dispositivi a tempo continuo risolubili di classe C^1

In questo paragrafo indicheremo con $\mathfrak{W}$ uno dei due universi $\mathfrak{U}^1$ oppure $\mathfrak{V}^1$ considerati nei precedenti paragrafi, e con $\mathfrak{D}$ rispettivamente l'universo lineare:

$\mathfrak{D}(Y)$ dei dispositivi lineari razionali passivi risolubili, a funzionamenti in Y considerato nel paragrafo 1;

oppure l'universo lineare

$\mathfrak{D}(X)$ di dispositivi lineari passivi risolubili a funzionamenti in X considerato all'inizio dnel paragrafo 2.

DEFINIZIONE: *Dato un dispositivo A di $\mathfrak{W}$ con mappa di scattering*

$$v = S(u)$$

diciamo dispositivo linearizzato di A in $(0, 0)$ il dispositivo lineare A' che ha morfismo di scattering

$$v = S'(0)\,u\,.$$

TEOREMA 5: *La «linearizzazione» cioè la trasformazione $\mathfrak{L}$ che associa ad ogni dispositivo A di $\mathfrak{W}$ il dispositivo A', linearizzato di A in $(0, 0)$, è un morfismo dell'universo $\mathfrak{W}$ nell'universo $\mathfrak{D}$.*

DIM.: Per provare che $\mathfrak{L}$ è un morfismo di universi [4] basta provare che:

$$(A+B)' = A' + B' \quad \text{e} \quad (\varphi_* A)' = \varphi_*(A')$$

per ogni $A, B \in \mathfrak{W}$ e φ trasduttore elementare.

La prima eguaglianza è ovvia, proviamo la seconda.

Facendo uso delle notazioni introdotte nei Teoremi 2 e 4 basta dimostrare che se:

$$A = \theta_*(L+M) = \iota_*(\mathcal{L}+M)$$

allora:

$$(\theta_*(L+M))' = \theta_*(L+M')$$

da cui risulta anche evidente che $A' \in \mathfrak{D}$.

Ci si può ridurre ovviamente a provare che

$$(\iota_*(\mathcal{L}+M))' = \iota_*(\mathcal{L}+M')\,,$$

quest'ultima eguaglianza si interpreta sui sistemi associati come compatibilità della linearizzazione con l'operazione di freedback.

Sappiamo dai Teoremi 2, 4 che il dispositivo:

$$(\iota_*(\mathcal{L}+M))'$$

ha come morfismo di scattering:

$$v = (A + B[I - G'(0)A]^{-1}G'(0)\Gamma)\,u\,.$$

Calcoliamo ora il morfismo di scattering del dispositivo:

$$\iota_*(\mathcal{L}+M')$$

Il dispositivo M' ha morfismo di scattering:

$$\eta = G'(0)\,\xi$$

ed il morfismo lineare $G'(0)$ è una contrazione, si ha allora ponendo $\xi = \zeta$:

$$\left|\begin{array}{l} v = Au + Bw\,, \\ \eta = G'(0)(\Gamma u + Aw)\,, \end{array}\right.$$

e posto $w = \eta$, dall'equazione:

$$w = G'(0)(\Gamma u + Aw)$$

si ricava

$$w = [I - G'(0)A]^{-1}G'(0)\Gamma u\,,$$

essendo il morfismo lineare $(I - G'(0)A)$ invertibile come già visto nella dimostrazione dei Teoremi 2, 4.

Chiuso il feedback si ha:

$$v = Au + B[I - G'(0)A]^{-1}G'(0)\Gamma u\,.$$

Quest'ultimo è allora il morfismo di scattering del dispositivo $\iota_*(L + M)$ che risulta identico al morfismo di scattering del dispositivo $(\iota_*(L + M))'$ e questo conclude la dimostrazione.

Osservazione: La linearizzazione $\mathfrak{L}\colon \mathfrak{W} \to \mathfrak{D}$ lascia fissi ovviamente i dispositivi lineari, risulta pertanto $\mathfrak{L}$ una retrazione di $\mathfrak{W}$ in $\mathfrak{D}$.

BIBLIOGRAFIA

[1] F. Parodi, *Alcuni universi di dispositivi non lineari risolubili a tempo continuo*, Rend. Accad. Naz. Sci. XL Mem. Mat., Vol. XI (1987).

[2] F. Parodi, *Linearizzazione di dispositivi non lineari a tempo discreto*, Rend. Accad. Naz. Sci. XL Mem. Mat., Vol. X (1986).

[3] F. Parodi, *Su un universo di dispositivi risolubili e monotoni massimali*, Rend. Accad. Naz. Sci. XL Mem. Mat., Vol. IX (1985).

[4] G. Darbo, *Teoremi di esplicitazione in grande*, Rend. Accad. Naz. Sci. XL Mem. Mat., Vol. IX (1985).

[5] G. Darbo, *Aspetti algebrici categoriali della teoria dei dispositivi*, Symposia Mathematica, 4 (1970).