Rendiconti
Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL
Memorie di Matematica
105° (1987), Vol. XI, fasc. 8, pagg. 127-137

MARIO TROISI (*)

Un teorema di regolarizzazione per le soluzioni dei problemi ellittici in aperti non limitati di R^n (**) (***)

A regularity theorem for solutions of elliptic boundary value problems in unbounded domains in R^n

SUMMARY. — In this paper we study linear elliptic boundary value problems in unbounded domains in R^n. For solutions of such problems we obtain a regularity theorem within a suitable class of Sobolev weight spaces.

Siano: Ω un sottoinsieme aperto e non limitato di R^n «sufficientemente regolare», A un operatore differenziale lineare di ordine $2m$ *uniformemente e propriamente ellittico* in $\bar{\Omega}$, $B_1, \ldots, B_m$ m operatori differenziali lineari che verificano la *condizione complementare* rispetto ad A *uniformemente* su $\partial\Omega$.

In questo lavoro stabiliamo una proprietà di regolarità per le soluzioni del problema:

$$(1) \qquad \begin{aligned} Au &= f \quad \text{in } \Omega\,, \\ B_j u &= g_j \quad \text{su } \partial\Omega\,, \quad j = 1, \ldots, m\,, \end{aligned}$$

nell'ambito di una classe di spazi di Sobolev con peso, denotati con $W^{r,p}_s$, dove il «peso» è una potenza di un'opportuna funzione $\varrho\colon \Omega \to R_+$ tale che $\varrho, \varrho^{-1} \in L^\infty_{loc}(\Omega)$.

$W^{r,p}_s(\Omega)$, $r \in N_0$, $s \in R$ e $p \in [1, +\infty[$, è lo spazio delle distribuzioni u su Ω tali che $\varrho^s \partial^\alpha u \in L^p(\Omega)$ per $|\alpha| \le r$, munito della norma:

$$\|u\|_{W^{r,p}_s(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \le r} \|\varrho^s \partial^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}\,.$$

(*) Socio dell'Accademia - Indirizzo dell'Autore: Istituto di Matematica, Facoltà di Scienze, Università di Salerno, 84100 Salerno.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.A.F.A. del C.N.R.

(***) Memoria presentata il 29 gennaio 1987.

ISSN-0392-4106

$W_s^{r-1/p,p}(\partial\Omega)$, $r \in N$, $s \in R$ e $p \in]1, +\infty[$, è lo spazio delle tracce su $\partial\Omega$ delle funzioni di classe $W_s^{r,p}(\Omega)$.

Poniamo:

$$L_s^p(\Omega) = W_s^{0,p}(\Omega)\,, \quad l_0 = \max\{2m, m_1+1, \ldots, m_m+1\}\,,$$

dove m_j denota l'ordine di B_j $(j = 1, \ldots, m)$, e fissiamo un intero $l > l_0$.

Nell'ipotesi che i coefficienti di A e dei B_j siano « sufficientemente regolari », proviamo che, qualunque siano $s \in R$ e $p \in]1, +\infty[$, se $f \in W_s^{l-2m,p}(\Omega)$ e e $g_j \in W_s^{l-m_j-1/p,p}(\partial\Omega)$ $(j = 1, \ldots, m)$, allora ogni funzione $u \in W_{loc}^{l,p}(\bar\Omega) \cap L_s^p(\Omega)$ soluzione del problema (1) risulta di classe $W_s^{l,p}(\Omega)$ e soddisfa la limitazione:

$$\|u\|_{W_s^{l,p}(\Omega)} < c\Big(\|f\|_{W_s^{l-2m,p}(\Omega)} + \sum_{j=1}^{m} \|g_j\|_{W_s^{l-m_j-1/p,p}(\partial\Omega)} + \|u\|_{L_s^p(\Omega)}\Big)\,,$$

dove c è una costante indipendente da u, da f e dalle g_j.

Mettiamo in evidenza che il risultato ottenuto generalizza un risultato analogo contenuto nel teorema 6.1 di L. Sgambati - M. Troisi [6], il quale viene stabilito in ipotesi più restrittive sull'aperto Ω e sugli operatori A e B_j $(j = 1, \ldots, m)$.

Il n. 1 è dedicato allo studio degli spazi $W_s^{r,p}(\Omega)$.

Nel n. 2 vengono trattati gli spazi $W_s^{r-1/p,p}(\partial\Omega)$.

Nel n. 3 viene enunciato il risultato.

Il n. 4 è dedicato alla dimostrazione del teorema enunciato al n. 3.

1. - Gli spazi $W_s^{r,p}(\Omega)$

Sia R^n lo spazio reale euclideo a n dimensioni.

Per ogni $x \in R^n$ e per ogni $r \in R_+$ (¹) porremo:

$$B(x, r) = \{y \in R^n \mid |y - x| < r\}\,.$$

Per ogni multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in N_0^n$ porremo:

$$|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n\,, \quad \partial^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \ldots \partial_{x_n}^{\alpha_n}\,, \quad D^\alpha = D_{x_1}^{\alpha_1} \ldots D_{x_n}^{\alpha_n}\,,$$

dove:

$$\partial_{x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}\,, \quad D_{x_k} = -i\partial_{x_k} \quad (i = \sqrt{-1})\,, \quad k = 1, \ldots, n\,.$$

Assegniamo un sottoinsieme aperto e non limitato Ω di R^n.

(¹) Indicheremo con N l'insieme dei numeri interi positivi, con N_0 l'insieme dei numeri interi non negativi, con R l'insieme dei numeri reali, con R_+ l'insieme dei numeri reali positivi, con $\bar R_+$ l'insieme dei numeri reali non negativi, con C l'insieme dei numeri complessi.

Se $r \in N_0$ e $1 \leq p \leq +\infty$, indicheremo:

con $W^{r,p}(\Omega)$ lo spazio delle distribuzioni u su Ω tali che $\partial^\alpha u \in L^p(\Omega)$ per $|\alpha| \leq r$, munito della norma:

$$\|u\|_{W^{r,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq r} \|\partial^\alpha u\|_{L^p(\Omega)};$$

con $W^{r,p}_{loc}(\bar{\Omega})$ l'insieme delle funzioni $u: \Omega \to C$ tali che $\varphi u \in W^{r,p}(\Omega)$ per ogni $\varphi \in \mathfrak{D}(\bar{\Omega})$;

con $L^p_{loc}(\bar{\Omega})$ lo spazio $W^{0,p}_{loc}(\bar{\Omega})$.

Assegniamo una funzione misurabile $\varrho: \Omega \to R_+$ soddisfacente la seguente ipotesi:

i$_1$) Esiste $d \in R_+$ tale che:

$$\sup_{\substack{x,y \in \Omega \\ |x-y| \leq d}} \frac{\varrho(x)}{\varrho(y)} < +\infty. \tag{1.1}$$

Fissato $d \in R_+$ tale che sia verificata la (1.1), nel seguito per ogni $x \in \Omega$ porremo:

$$\Omega(x) = \Omega \cap B(x, d). \tag{1.2}$$

Osserviamo che la (1.1) è equivalente alla relazione:

$$\lambda^{-1} \varrho(y) \leq \varrho(x) \leq \lambda \varrho(y) \quad \forall y \in \Omega \text{ e } \forall x \in \Omega(y), \tag{1.3}$$

dove λ è una costante indipendente da x e y.

Osserviamo anche che l'ipotesi i$_1$) implica che per ogni insieme limitato $A \subset \Omega$ si ha:

$$\sup_{x \in A} \varrho(x) < +\infty, \quad \sup_{x \in A} \varrho^{-1}(x) < +\infty, \tag{1.4}$$

e quindi:

$$\varrho, \varrho^{-1} \in L^\infty_{loc}(\bar{\Omega}). \tag{1.5}$$

Indicheremo con $\varphi: \Omega \times \Omega \to \bar{R}_+$ la funzione definita da:

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x-y| \leq d, \\ 0 & \text{se } |x-y| > d. \end{cases} \tag{1.6}$$

Se $s \in R$ e $1 \leq p < +\infty$, indicheremo con $L^p_s(\Omega)$ lo spazio delle funzioni $u: \Omega \to C$ tali che $\varrho^s u \in L^p(\Omega)$, munito della norma:

$$\|u\|_{L^p_s(\Omega)} = \|\varrho^s u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Se $r \in N_0$, $s \in R$ e $1 < p < +\infty$, indicheremo con $W^{r,p}_s(\Omega)$ lo spazio delle distribuzioni u su Ω tali che $\partial^\alpha u \in L^p_s(\Omega)$ per $|\alpha| \le r$, munito della norma:

$$\|u\|_{W^{r,p}_s(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \le r} \|\partial^\alpha u\|_{L^p_s(\Omega)} .$$

Nel seguito supporremo che sia verificata la seguente condizione:

$$\lambda_0 = \inf_{x \in \Omega} \operatorname{mis} \Omega(x) > 0 . \tag{1.7}$$

Osserviamo che la (1.7) è verificata se Ω è dotato della proprietà di cono, e quindi, in particolare, se Ω soddisfa le condizioni definite al n. 2 (cfr. l'ipotesi i_2)).

LEMMA 1.1: *Se è verificata la* (1.7), *allora* $u \in W^{r,p}_s(\Omega)$ *se e solo se* $u \in W^{r,p}_{loc}(\bar{\Omega})$ *e la funzione*:

$$x \in \Omega \to \|u\|_{W^{r,p}(\Omega(x))} \tag{1.8}$$

è di classe $L^p_s(\Omega)$; *inoltre esistono* $c_1, c_2 \in R_+$ *tali che*:

$$c_1 \|u\|_{W^{r,p}_s(\Omega)} \le \Big(\int_\Omega \varrho^{sp}(x) \|u\|^p_{W^{r,p}(\Omega(x))} dx \Big)^{1/p} \le c_2 \|u\|_{W^{r,p}_s(\Omega)} \qquad \forall u \in W^{r,p}_s(\Omega) . \tag{1.9}$$

Infatti, se $u \in W^{r,p}_s(\Omega)$, in conseguenza delle (1.4) si ha che $u \in W^{r,p}_{loc}(\bar{\Omega})$; inoltre, per la (1.3) si ha per $|\alpha| \le r$ e per ogni $x \in \Omega$:

$$\varrho^{sp}(x) \int_{\Omega(x)} |\partial^\alpha u(y)|^p dy \le \lambda^{|s|p} \int_{\Omega(x)} \varrho^{sp}(y) |\partial^\alpha u(y)|^p dy = \lambda^{|s|p} \int_\Omega \varphi(x,y) \varrho^{sp}(y) |\partial^\alpha u(y)|^p dy .$$

Osservando allora che risulta:

$$\int_\Omega dx \int_\Omega \varphi(x,y) \varrho^{sp}(y) |\partial^\alpha u(y)|^p dy = \int_\Omega \varrho^{sp}(y) |\partial^\alpha u(y)|^p dy \int_{\Omega(y)} dx ,$$

evidentemente si deduce che la funzione definita dalla (1.8) è di classe $L^p_s(\Omega)$ e che sussiste la limitazione:

$$\int_\Omega \varrho^{sp}(x) \|u\|^p_{W^{r,p}(\Omega(x))} dx \le \lambda^{|s|p} \operatorname{mis} B(0,d) \cdot \|u\|^p_{W^{r,p}_s(\Omega)} .$$

Viceversa, supponiamo che $u \in W^{r,p}_{loc}(\bar{\Omega})$ e che la funzione definita dalla (1.8) sia di classe $L^p_s(\Omega)$.
Evidentemente si ha:

$$\int_\Omega \varrho^{sp}(x) \|u\|^p_{W^{r,p}(\Omega(x))} dx \ge \sum_{|\alpha| \le r} \int_\Omega \varrho^{sp}(x) dx \int_{\Omega(x)} |\partial^\alpha u(y)|^p dy =$$
$$= \sum_{|\alpha| \le r} \int_\Omega |\partial^\alpha u(y)|^p dy \int_\Omega \varphi(x,y) \varrho^{sp}(x) dx .$$

D'altra parte, in conseguenza delle (1.7) e (1.3) risulta per ogni $y \in \Omega$:

$$\int_\Omega \varphi(x, y)\varrho^{sp}(x)\,dx > \lambda^{-|s|p}\lambda_0 \varrho^{sp}(y)\,.$$

Dalle relazioni precedenti si deduce evidentemente che $u \in W^{r,p}_s(\Omega)$ e che sussiste la limitazione:

$$\int_\Omega \varrho^{sp}(x)\|u\|^p_{W^{r,p}(\Omega(x))}\,dx > \lambda^{-|s|p}\lambda_0 \sum_{|\alpha|\leq r}\int_\Omega \varrho^{sp}(x)|\partial^\alpha u(x)|^p\,dx\,.$$

Ne segue la tesi.

2. - Gli spazi $W^{r-1/p,p}_s(\partial\Omega)$

Nel seguito considereremo aperti Ω di R^n soddisfacenti la seguente ipotesi, dove l denota un fissato intero positivo (che sarà definito al n. 3):

i$_8$) Esistono un $\varepsilon \in R_+$, un ricoprimento di $\partial\Omega$ mediante una famiglia $(\mathfrak{U}_i)_{i\in\mathfrak{J}}$ di aperti $\mathfrak{U}_i$ di R^n e, per ogni $i \in \mathfrak{J}$, un omeomorfismo $x \to \Phi_i(x)$ di classe C^l di $\overline{\mathfrak{U}_i}$ su $\overline{B(0, 1)}$ tali che:

1) se $x \in \partial\Omega$, allora $B(x, \varepsilon) \subset \mathfrak{U}_i$ per un opportuno i;

2) $\Phi_i(\mathfrak{U}_i \cap \Omega) = \{y \in B(0, 1) | \, y_n > 0\}$ e

$$\Phi_i(\mathfrak{U}_i \cap \partial\Omega) = \{y \in B(0, 1) | \, y_n = 0\}\,;$$

3) le componenti di Φ_i e di Φ_i^{-1} sono limitate insieme con le loro derivate di ordine $< l$ da una costante indipendente da i.

Osservazione 2.1: Evidentemente, la condizione i$_8$) è soddisfatta se Ω è dotato della proprietà di *uniforme C^l-regolarità*, definita al n. 4.6 di R.A. Adams [1].

Per ogni $a \in R_+$ porremo:

$$\Omega_a = \{x \in \Omega | \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) < a\}\,.$$

Osserviamo che l'ipotesi i$_8$) implica:

$$\Omega_\varepsilon \subset \bigcup_{i\in\mathfrak{J}} \mathfrak{U}_i\,,$$

$$\forall x \in \Omega_{\varepsilon/2}\,, \quad \exists i \in \mathfrak{J} \ni' B\left(x, \frac{\varepsilon}{2}\right) \subset \mathfrak{U}_i\,,$$

$$\forall x \in \Omega \setminus \Omega_{\varepsilon/2}: \quad B\left(x, \frac{\varepsilon}{2}\right) \subset \Omega\,.$$

Nel seguito supporremo che sia verificata anche l'ipotesi i_1) definita al n. 1. Inoltre manterremo le notazioni del n. 1 e supporremo che sia $d < s/2$.

Osserviamo che in conseguenza del lemma 2.2 di [6] evidentemente si ha:

LEMMA 2.1: *Se sono verificate le ipotesi* i_1) *e* i_2), *allora, per ogni* $r \in N_0$, $\mathfrak{D}(\bar{\Omega})$ *è denso in* $W_s^{r,p}(\Omega)$.

Nel seguito considereremo gli ordinari spazi di Sobolev $W^{t,p}$, $t \in R_+$ e $p \in]1, +\infty[$, per la cui definizione rinviamo, ad es., a R. A. Adams [1].

Fissato $i \in \mathfrak{I}$ e fissata una funzione $\zeta \in \mathfrak{D}(R^n)$ tale che $\operatorname{supp} \zeta \subset \mathfrak{U}_i$, per ogni funzione g definita in $\mathfrak{U}_i \cap \partial\Omega$ porremo:

$$\psi_i(\zeta g) : y' = (y_1, \ldots, y_{n-1}) \in R^{n-1} \to \begin{cases} (\zeta g)(\Phi_i^{-1}(y', 0)) & \text{se } |y'| < 1 \\ 0 & \text{se } |y'| > 1 . \end{cases}$$

Per ogni $x \in \Omega$ porremo:

$$\Gamma(x) = \partial\Omega \cap B(x, d) .$$

Fissati: $x \in \Omega$ tale che $\operatorname{dist}(x, \partial\Omega) < d$, $i \in \mathfrak{I}$ tale che $B(x, d) \subset \mathfrak{U}_i$ e una funzione $\zeta \in \mathfrak{D}(R^n)$ con $\operatorname{supp} \zeta \subset B(x, d)$, per ogni $t \in R_+$ e per ogni funzione g tale che $\psi_i(\zeta g) \in W^{t,p}(R^{n-1})$ porremo:

$$\|\zeta g\|_{W^{t,p}(\Gamma(x))} = \|\psi_i(\zeta g)\|_{W^{t,p}(R^{n-1})} . \tag{2.1}$$

Per ogni $u \in \mathfrak{D}(\bar{\Omega})$ porremo $\gamma u = u|_{\partial\Omega}$.

Indicheremo con $\mathfrak{D}(\partial\Omega)$ la classe delle funzioni $g : \partial\Omega \to C$ che sono restrizioni a $\partial\Omega$ di funzioni $u \in \mathfrak{D}(\bar{\Omega})$.

Se $r \in N$, $s \in R$ e $p \in]1, +\infty[$, per ogni $g \in \mathfrak{D}(\partial\Omega)$ porremo:

$$\|g\|_{W_s^{r-1/p,p}(\partial\Omega)} = \inf \|u\|_{W_s^{r,p}(\Omega)} , \tag{2.2}$$

dove l'estremo inferiore è preso rispetto alle $u \in \mathfrak{D}(\bar{\Omega})$ tali che $\gamma u = g$.

Fissiamo $\psi \in \mathfrak{D}(R^n)$ tale che $\operatorname{supp} \psi \subset B(0, d)$ e poniamo, per ogni $x \in \Omega$, $\zeta_x : y \in R^n \to \psi(y - x)$.

Per ogni $g \in \mathfrak{D}(\partial\Omega)$ indicheremo con:

$$x \in \Omega \to \|\zeta_x g\|_{W^{r-1/p,p}(\Gamma(x))}$$

la funzione che ad $x \in \Omega$ associa: zero se $\Gamma(x) = \emptyset$, la norma della funzione $y \in \partial\Omega \to \zeta_x(y) g(y)$ definita dalla (2.1) se $\Gamma(x) \neq \emptyset$.

LEMMA 2.2: *Per ogni* $g \in \mathfrak{D}(\partial\Omega)$ *si ha*:

$$\left(\int_\Omega \varrho^{sp}(x) \|\zeta_x g\|^p_{W^{r-1/p,p}(\Gamma(x))} dx \right)^{1/p} < c \|g\|_{W_s^{r-1/p,p}(\partial\Omega)} , \tag{2.3}$$

dove c *è una costante indipendente da* g.

Infatti, assegnate $g \in \mathfrak{D}(\partial\Omega)$ e $u \in \mathfrak{D}(\bar{\Omega})$ tali che $\gamma u = g$, notoriamente si ha:

$$\|\zeta_x g\|^p_{W^{r-1/p,p}(\Gamma(x))} \leq c_1 \|\zeta_x u\|^p_{W^{r,p}(\Omega(x))} \leq c_2 \|u\|^p_{W^{r,p}(\Omega(x))},$$

dove c_2 è una costante indipendente da x, da g e da u; quindi:

$$\int_{\bar{\Omega}} \varrho^{sp}(x) \|\zeta_x g\|^p_{W^{r-1/p,p}(\Gamma(x))} dx \leq c_2 \int_{\bar{\Omega}} \varrho^{sp}(x) \|u\|^p_{W^{r,p}(\Omega(x))} dx .$$

Da quest'ultima relazione e dal lemma 1.1 si deduce in modo ovvio la tesi.

Indicheremo con $W_s^{r-1/p,p}(\partial\Omega)$ il completamento di $\mathfrak{D}(\partial\Omega)$ rispetto alla norma (2.2).

Osserviamo che l'applicazione $u \to \gamma u$, definita in $\mathfrak{D}(\bar{\Omega})$, si prolunga per continuità in un'applicazione, che indicheremo ancora con $u \to \gamma u$, lineare e continua di $W_s^{r,p}(\Omega)$ in $W_s^{r-1/p,p}(\partial\Omega)$.

3. - Il teorema di regolarizzazione

Indicheremo con $M_r(\Omega)$, $r \in N_0$, la classe delle distribuzioni φ su Ω tali che $\partial^\alpha \varphi \in L^\infty(\Omega)$ per $|\alpha| \leq r$.

Assegniamo $m \in N$ e un sistema $\{A, B_1, \ldots, B_m\}$ di $m+1$ operatori differenziali lineari a coefficienti definiti in $\bar{\Omega}$, con A di ordine $2m$:

$$A = \sum_{|\mu| \leq 2m} a_\mu(x) D^\mu$$

e B_j di ordine $m_j \in N_0$:

$$B_j = \sum_{|\mu| \leq m_j} b_{j\mu}(x) D^\mu , \quad j = 1, \ldots, m .$$

Nel seguito porremo:

$$l_0 = \max\{2m, m_1 + 1, \ldots, m_m + 1\}$$

e indicheremo con l un fissato intero $\geq l_0$.

Supporremo che siano verificate le ipotesi i$_1$), i$_2$) e le seguenti:

i$_3$) $a_\mu \in M_{l-2m}(\Omega)$ per $|\mu| \leq 2m$, $b_{j\mu} \in M_{l-m_j}(\Omega)$ per $|\mu| \leq m_j$ e $j = 1, \ldots, m$; inoltre le funzioni a_μ, per $|\mu| = 2m$, e $b_{j\mu}$, per $|\mu| = m_j$, sono uniformemente continue in $\bar{\Omega}$;

i$_4$) A è *uniformemente* e *propriamente ellittico* in $\bar{\Omega}$ e gli operatori $B_1, \ldots, B_m$ verificano la *condizione complementare* rispetto ad A *uniformemente* su $\partial\Omega$, nel senso, ad es., del n. 7 di S. Agmon - A. Douglis - L. Nirenberg [2].

Osserviamo che, nelle ipotesi poste, per ogni $u \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$ si ha:

$$\|Au\|_{W_s^{l-2m,p}(\Omega)} \leq c_1 \sum_{|\alpha| \leq 2m} \|\partial^\alpha u\|_{W_s^{l-2m,p}(\Omega)} \leq c_1 \|u\|_{W_s^{l,p}(\Omega)},$$

$$\|\gamma B_j u\|_{W_s^{l-m_j-1/p,p}(\partial\Omega)} \leq c_2 \sum_{|\alpha| \leq m_j} \|\partial^\alpha u\|_{W_s^{l-m_j,p}(\Omega)} \leq c_2 \|u\|_{W_s^{l,p}(\Omega)},$$

dove c_1 e c_2 sono due costanti indipendenti da u.

Se ne deduce che :

$$u \to (Au, \gamma B_1 u, \ldots, \gamma B_m u)$$

definisce un operatore lineare e continuo di $W_s^{l,p}(\Omega)$ in

$$W_s^{l-2m,p}(\Omega) \times \prod_{j=1}^{m} W_s^{l-m_j-1/p,p}(\partial\Omega).$$

Proveremo il seguente:

Teorema 3.1: *Assegniamo un intero $l > l_0$, $p \in]1, +\infty[$, $s \in R$ e supponiamo che siano verificate le ipotesi* i$_1$)-i$_4$).

Allora, per ogni funzione $u \in W_{loc}^{l,p}(\Omega) \cap L_s^p(\Omega)$ e tale che:

$$Au \in W_s^{l-2m,p}(\Omega), \tag{3.1}$$

$$B_j u \in W_s^{l-m_j-1/p,p}(\partial\Omega), \quad j = 1, \ldots, m, \tag{3.2}$$

si ha $u \in W_s^{l,p}(\Omega)$ e:

$$\|u\|_{W_s^{l,p}(\Omega)} \leq c\left(\|Au\|_{W_s^{l-2m,p}(\Omega)} + \sum_{j=1}^{m} \|\gamma B_j u\|_{W_s^{l-m_j-1/p,p}(\partial\Omega)} + \|u\|_{L_s^p(\Omega)}\right), \tag{3.3}$$

dove c è una costante indipendente da u.

La dimostrazione del teorema 3.1 sarà data al n. 4.

4. - Dimostrazione del teorema 3.1

Per ogni $x \in \Omega$ e per ogni $r \in]0, 1]$ porremo:

$$\Omega_r(x) = \Omega \cap B(x, rd), \quad \Gamma_r(x) = \partial\Omega \cap B(x, rd).$$

Fissiamo $\theta \in \mathcal{D}(R^n)$ tale che:

$$\theta(y) = 1 \quad \text{per } |y| < \tfrac{3}{4} d, \qquad \operatorname{supp} \theta \subset B(0, d).$$

Fissiamo inoltre $x \in \Omega$ e poniamo:

$$\psi = \psi_x \colon y \in R^n \to \theta(y - x)\,.$$

Supponiamo ora che siano verificate le ipotesi del teorema 3.1 ed assegniamo una funzione $u \in W^{l_0,p}_{\mathrm{loc}}(\bar{\Omega}) \cap L^p_*(\Omega)$ soddisfacente le (3.1) e (3.2).

Da ben noti risultati sui problemi ellittici in sottoinsiemi aperti e limitati di R^n (cfr., ad es., S. Agmon - A. Douglis - L. Nirenberg [2], F. E. Browder [4]) si deduce evidentemente che $u \in W^{l,p}_{\mathrm{loc}}(\bar{\Omega})$.

Proviamo che sussiste la limitazione:

$$\|u\|_{W^{l,p}(\Omega_{1/2}(x))} \leq c_0\Big(\|Au\|_{W^{l-2m,p}(\Omega(x))} + \sum_{j=1}^{m} \|\psi_x \gamma B_j u\|_{W^{l-m_j-1/p,p}(\Gamma(x))} + \|u\|_{L^p(\Omega(x))}\Big)\,, \tag{4.1}$$

dove c_0 è una costante indipendente da x e da u.

Poniamo $v = \psi u$.

Assegniamo $r, r' \in \left]0, \tfrac{1}{2}\right]$, con $r < r'$, e una funzione $\varphi \in \mathfrak{D}(R^n)$ tali che:

$$\varphi(y) = 1 \quad \text{per } |y| < rd\,, \qquad \operatorname{supp} \varphi \subset B(0, r'd)\,,$$

$$\sup_{x \in R^n} |\partial^\alpha \varphi(x)| \leq c_\alpha (r' - r)^{-|\alpha|}\,,$$

dove c_α è una costante indipendente da r e da r', e indichiamo con $\zeta = \zeta_x$ la funzione $y \in R^n \to \varphi(y - x)$.

Nel seguito di questa dimostrazione indicheremo con $c_1, \ldots, c_s$ delle costanti positive indipendenti da u, x, r, r'.

Evidentemente, nelle ipotesi poste, dai citati risultati di [2] e [4] (cfr. anche L. Arkeryd [3]) si deduce la limitazione:

$$\|\zeta v\|_{W^{l,p}(\Omega(x))} \leq c_1\Big(\|A(\zeta v)\|_{W^{l-2m,p}(\Omega(x))} + \sum_{j=1}^{m} \|\gamma B_j(\zeta v)\|_{W^{l-m_j-1/p,p}(\Gamma(x))} + \|\zeta v\|_{L^p(\Omega(x))}\Big)\,. \tag{4.2}$$

Dalla (4.2) segue che si ha:

$$\begin{aligned} \|u\|_{W^{l,p}(\Omega_r(x))} &\leq \\ &\leq c_2\Big(\|A(\zeta u)\|_{W^{l-2m,p}(\Omega(x))} + \sum_{j=1}^{m} \|\psi\gamma B_j(\zeta u)\|_{W^{l-m_j-1/p,p}(\Gamma(x))} + \|u\|_{L^p(\Omega_{r'}(x))}\Big)\,. \end{aligned} \tag{4.3}$$

D'altra parte risulta:

$$A(\zeta u) = \zeta A u + \sum_{0 < |\mu| \leq 2m} \sum_{\alpha < \mu} \binom{\mu}{\alpha} a_\mu D^{\mu-\alpha} \zeta D^\alpha u\,,$$

$$B_j(\zeta u) = \zeta B_j u + \sum_{0 < |\mu| \leq m_j} \sum_{\alpha < \mu} \binom{\mu}{\alpha} b_{j\mu} D^{\mu-\alpha} \zeta D^\alpha u\,.$$

Inoltre, posto $\chi = \partial^{\alpha-\nu}\zeta$ e tenuto conto che sussiste la relazione:

$$\chi\partial^\alpha u = \sum_{\beta\leq\alpha} c_{\alpha\beta}\partial^{\alpha-\beta}(\partial^\beta\chi\cdot u) \tag{4.4}$$

con delle opportune costanti $c_{\alpha\beta}$, si ha per $|\alpha|<2m$:

$$\|\chi\partial^\alpha u\|_{W^{l-2m,p}(\Omega(x))} \leq c_3 \sum_{\beta\leq\alpha}\|\partial^{\alpha-\beta}(\partial^\beta\chi\cdot u)\|_{W^{l-2m,p}(\Omega(x))} \leq c_3\sum_{\beta\leq\alpha}\|\partial^\beta\chi\cdot u\|_{W^{l-1,p}(\Omega(x))}.$$

Analogamente, si ha per $|\alpha|<m_j$:

$$\|\gamma(\chi\partial^\alpha u)\|_{W^{l-m_j-1/p,p}(\Gamma(x))} \leq c_4\|\chi\partial^\alpha u\|_{W^{l-m_j,p}(\Omega(x))} \leq c_5\sum_{\beta\leq\alpha}\|\partial^\beta\chi\cdot u\|_{W^{l-1,p}(\Omega(x))}.$$

Ora, per ben note disuguaglianze relative agli spazi di Sobolev e per le proprietà della funzione ζ si ha per $|\alpha|<l$:

$$\|\partial^\alpha\zeta\cdot u\|_{W^{l-1,p}(\Omega(x))} \leq c_6\left(\|\partial^\alpha\zeta\cdot u\|^{1/l}_{W^{l,p}(\Omega(x))}\cdot\|\partial^\alpha\zeta\cdot u\|^{1-1/l}_{L^p(\Omega(x))} + \|\partial^\alpha\zeta\cdot u\|_{L^p(\Omega(x))}\right) \leq$$

$$\leq c_7(r'-r)^{-l-1}\left(\|u\|^{1/l}_{W^{l,p}(\Omega_{r'}(x))}\cdot\|u\|^{1-1/l}_{L^p(\Omega_{r'}(x))} + \|u\|_{L^p(\Omega_{r'}(x))}\right).$$

Dalla (4.3) e dalle successive relazioni si deduce in modo ovvio la limitazione:

$$(r'-r)^{l+1}\|u\|_{W^{l,p}(\Omega_r(x))} \leq c_8\Big(\|Au\|_{W^{l-2m,p}(\Omega(x))} + \sum_{j=1}^m\|\psi\gamma B_j u\|_{W^{l-m_j-1/p,p}(\Gamma(x))} +$$

$$+ \|u\|_{L^p(\Omega(x))} + \|u\|^{1/l}_{W^{l,p}(\Omega_{r'}(x))}\cdot\|u\|^{1-1/l}_{L^p(\Omega_{r'}(x))}\Big). \tag{4.5}$$

Dalla (4.5) e da un lemma di crescenza di C. Miranda (cfr. il lemma 3.1 di [5]) si deduce la (4.1).

Dalla (4.1) segue che si ha per ogni $x\in\Omega$:

$$\varrho^s(x)\|u\|_{W^{l,p}(\Omega_{1/2}(x))} \leq c_9\Big(\varrho^s(x)\|Au\|_{W^{l-2m,p}(\Omega(x))} + \sum_{j=1}^m\varrho^s(x)\|\psi\gamma B_j u\|_{W^{l-m_j-1/p,p}(\Gamma(x))} +$$

$$+ \varrho^s(x)\|u\|_{L^p(\Omega(x))}\Big);$$

da quest'ultima relazione e dai lemmi 1.1 e 2.2 si deduce, tenuto conto delle ipotesi su u, l'appartenenza di u a $W^{l,p}_s(\Omega)$ e la limitazione (3.3), e quindi si ha la tesi.

BIBLIOGRAFIA

[1] R. A. ADAMS, *Sobolev spaces*, Academic Press, 1975.

[2] S. AGMON - A. DOUGLIS - L. NIRENBERG, *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions*, Comm. Pure Appl. Math., 12 (1959), pp. 623-727.

[3] L. ARKERYD, *On the L^p estimates for elliptic boundary problems*, Math. Scand., 19 (1966), pp. 59-76.

[4] F. E. BROWDER, *A priori estimates for solutions of elliptic boundary-value problems I, II, III*, Indag. Math., 22 (1960), pp. 145-169; 23 (1961), pp. 404-410.

[5] C. MIRANDA, *Teoremi di unicità in domini non limitati e teoremi di Liouville per le soluzioni dei problemi al contorno relativi alle equazioni ellittiche*, Ann. Mat. Pura Appl., 59 (1962), pp. 189-212.

[6] L. SGAMBATI - M. TROISI, *Limitazioni a priori per una classe di problemi ellittici in domini non limitati*, Note Mat., 1 (1981), pp. 225-259.