Rendiconti
Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL
Memorie di Matematica
105° (1987), Vol. XI, fasc. 13, pagg. 193-203

FRANCO PARODI (*)

Alcuni universi di dispositivi non lineari risolubili a tempo continuo (**)

Some nonlinear solvable universes of continuous time devices

SUMMARY. — Using the methods introduced in [1], [2], [3], we construct two universes of nonlinear, continuous time and solvable devices.

In first universe the signals are C^{∞} real functions, the solvability of its devices follow from a global existence theorem for differential systems.

In the second universe the signals are L^2 real functions and the solvability of its devices follow from a global implicit function theorem [4].

INTRODUZIONE

Si procede alla costruzione di due universi di dispositivi non lineari monotoni risolubili con funzionamenti funzioni reali del tempo continuo, rispettivamente infinite volte derivabili oppure localmente di quadrato sommabile, seguendo il procedimento impostato in [1] nel caso dei funzionamenti costanti reali, e ripreso in [2], [3] nel caso dei funzionamenti funzioni reali nel tempo discreto.

Tale impostazione prevede di considerare tutte le reti composte da dispositivi di un universo lineare passivo risolubile, opportunamente scelto, e da particolari dispositivi non lineari monotoni risolubili, mostrando che la totalità di tali reti costituisce un universo di dispositivi monotoni ancora risolubili.

Il primo universo, a funzionamenti funzioni reali C^{∞}, è generato dai dispositivi lineari passivi risolubili razionali, ovvero a costanti concentrate, e dai dispositivi non lineari monotoni risolubili caratterizzati da mappe di scattering $S\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, quindi puramente resistivi, che siano contrazioni e C^{∞}. La riso-

(*) Istituto Matematico di Ingegneria, Genova.

(**) Memoria presentata il 13 aprile 1987 da Giuseppe Scorza Dragoni, uno dei XL.

ISSN-0392-4106

lubilità dei dispositivi di questo universo è assicurata da un semplice teorema di esistenza in grande per i sistemi di equazioni differenziali non lineari che intervengono.

Il secondo universo, a funzionamenti funzioni localmente di quadrato sommabile, è invece generato dai dispositivi lineari passivi risolubili caratterizzati da morfismi di scattering $S: \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^n$, quindi puramente resistivi, e dai dispositivi non lineari monotoni aventi mappe di scattering « debolmente contrattive » rispetto alla norma L^2. La risolubilità dei dispositivi di questo universo segue dall'ammissibilità del feedback ad anello chiuso sui sistemi associati, e ciò è assicurato da un opportuno teorema di punto fisso con parametro ovvero di esplicitazione in grande [4].

Dispositivi non lineari con funzionamenti funzioni reali C^∞

Sia X lo spazio delle funzioni C^∞ definite in R a valori reali ed a supporto inferiormente limitato.

Sia $\mathfrak{D}$ l'universo dei dispositivi razionali risolubili, k-monotoni per qualche $k \in \mathrm{R}$ [5].

Un dispositivo A di questo universo, con n terminali è l'insieme delle coppie (x, y) $X^n \times X^n$ del tipo:

$$\begin{cases} x = u + Su\,, \\ y = u - Su\,, \end{cases}$$

con $u \in X^n$, ed S matrice di operatori differenziali fratti cioè matrice ad elementi nel corpo $R(D)$, interpretando l'indeterminata D come operatore di derivazione, X ha una struttura naturale di spazio vettoriale sul corpo $\mathrm{R}(D)$.

La k-monotonia, cioè il fatto che esista $k \in \mathrm{R}$ tale che per ogni coppia $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in A$ risulti:

$$\int_{-\infty}^{T} \exp[-2kt] < x_1(t) - x_2(t), y_1(t) - y_2(t) > dt \geq 0 \qquad \text{per ogni } T \in \mathrm{R}\,,$$

si caratterizza mediante la non espansività dell'operatore $S: X^n \to X^n$, rispetto ad ogni seminorma:

$$\|u\|_{T,k} = \left(\int_{-\infty}^{T} \exp[-2kt]\, u^2(t)\, dt \right)^{\frac{1}{2}}, \qquad (k \text{ fissato}),$$

o anche mediante la subunitarietà, ovvero la non espansività, della matrice complessa $\hat{S}(p)$, $p \in C$, nel semipiano $\operatorname{Re} p > k$, cioè:

$$\|\hat{S}(p)\| < 1 \ (^1) \qquad \text{per ogni } p \in \mathbf{C} \text{ con } \operatorname{Re} p > k ,$$

essendo $\hat{S}$ la trasformata di Laplace dell'operatore S.

Sia $\mathfrak{T}$ l'universo totale su X [6], consideriamo i dispositivi di $\mathfrak{T}$ risolubili con mappa di scattering:

$$R \colon X^n \to X^n$$

del tipo seguente:

$$(R(u))(t) = f(u(t)) , \qquad \text{per ogni } u \in X^n ,\ t \in \mathbf{R} ,$$

dove $f \colon R^n \to R^n$ è una contrazione C^∞ e tale che $f(0) = 0$.

Sia $\mathfrak{R}$ la famiglia di tali dispositivi «puramente resistivi», risolubili con mappa di scattering contrattiva; è immediato verificare che tali dispositivi risultano k-monotoni per ogni $k \in \mathbf{R}$.

Consideriamo nell'universo totale $\mathfrak{T}$ tutte le reti miste formate di dispositivi lineari di $\mathfrak{D}$ e di dispositivi non lineari di $\mathfrak{R}$, cioè la totalità $\mathfrak{U}$ dei dispositivi della forma:

$$A = \theta_*(L + M)$$

con:

θ trasduttore elementare [7],

$L \in \mathfrak{D}$, cioè dispositivo k-monotono, razionale, risolubile,

$M \in \mathfrak{R}$, cioè dispositivo «puramente resistivo», risolubile con mappa di scattering contrazione C^∞ in $\mathbf{R}^q$ (q essendo il numero dei terminali di M).

TEOREMA 1: *La famiglia $\mathfrak{U}$ di dispositivi dell'universo totale, è un universo di dispositivi k-monotoni per qualche $k \in \mathbf{R}$, ed ogni suo dispositivo è risolubile* (²).

DIM.: Il fatto che $\mathfrak{U}$ sia un universo di dispositivi, cioè che sia chiuso rispetto alle operazioni di composizione in rete, è di intuizione immediata ed è comunque conseguenza di risultati generali della teoria dei dispositivi [8], [9].

Il fatto che tutti i dispositivi di $\mathfrak{U}$ siano k-monotoni per qualche $k \in \mathbf{R}$, segue dal fatto che dispositivi k-monotoni per qualche $k \in \mathbf{R}$ costituiscono un sottouniverso dell'universo totale come si verifica semplicemente.

Per provare che ogni dispositivo $A \in \mathfrak{U}$,

$$A = \theta_*(L + M)$$

(¹) Se M è una matrice complessa $n \times m$, indichiamo:

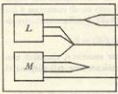
$$\|M\| = \sup_{z \in \mathbf{C}^n,\ {}^t\bar{z}z \leq 1} ({}^t\bar{z}\,{}^t\bar{M} M z)^{\frac{1}{2}} .$$

(²) Si noti che i dispositivi di questo universo sono ovviamente tempo-invarianti, cioè invarianti rispetto agli operatori di ritardo.

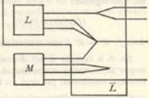
è risolubile, sarà opportuno presentare A nella forma

$$A = \iota^*(L + M)$$

con L opportuno dispositivo di $\mathfrak{D}$ con $(p+q)$ terminali (q essendo il numero di terminali di M), ed ι il trasduttore elementare che realizza solo cortocircuitazioni fra q coppie di terminali uno di M ed uno opportuno di L.

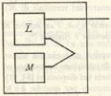


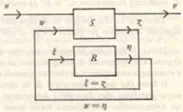
$\theta_*(L+M)$



$\iota_*(L+M)$

Consideriamo il sistema associato nella rappresentazione mediante le mappe di scattering al dispositivo $L + M$, è noto che la cortocircuitazione di una coppia di terminali equivale al « feedback incrociato » sulla coppia di entrate ed uscite corrispondenti.





Mostriamo che chiuso il feedback si ottiene un sistema la cui mappa ingresso-uscita è definita su tutto X^p, tale mappa sarà la mappa di scattering del dispositivo ottenuto per cortocircuitazione, che risulta pertanto risolubile.

Rappresentiamo la mappa $S: X^{p+q} \to X^{p+q}$ distinguendo le entrate e le uscite destinate al feedback:

$$S: \begin{cases} v = Au + Bw\,, \\ \zeta = \Gamma u + \Delta w\,, \end{cases}$$

dove $r, u \in X^p$, $z, w \in X^q$, ed A, B, Γ, Λ, sono matrici di operatori differenziali fratti; le matrici complesse: $\hat{A}(p)$, $\hat{B}(p)$, $\hat{\Gamma}(p)$, $\hat{\Lambda}(p)$ sono non espansive, come $\hat{S}(p)$, nel semipiano $p \in \mathbf{C}$ con $\operatorname{Re} p > k$.

Rappresentiamo la mappa R: $X^q \to X^q$ mediante la funzione $\eta = f(\xi)$, dove f: $R^q \to R^q$ è una contrazione C^∞.

Ponendo $\xi = z$ si ha il sistema:

$$\begin{cases} r = Au + Bw\,, \\ \eta = f(\Gamma u + \Lambda w)\,, \end{cases}$$

ponendo poi $w = \eta$ si ha il sistema:

$$w = f(\Gamma u + \Lambda w)\,.$$

Per concludere basta provare che tale equazione ha per ogni $u \in X^p$ una ed una sola soluzione $w \in X^q$, e ciò è provato nel seguente *Lemma* 1, che presenta un elementare teorema di esistenza in grande per equazioni integrodifferenziali di tale tipo.

Lemma 1: *Data una funzione g: $\mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^q \to \mathbf{R}^q$, di classe C^∞, contrazione rispetto al secondo argomento e tale che $g(0, 0) = 0$, data una matrice Λ $(q \times q)$ di operatori differenziali fratti tale che l'operatore Λ: $X^q \to X^q$ risulti non espansivo rispetto ad ogni seminorma $\|-\|_{T,k}$, per un fissato $k \in \mathbf{R}$, l'equazione:*

$$y = g(x, \Lambda y)$$

ha una ed una sola soluzione $y \in X^q$ per ogni $x \in X^p$.

Dim.: Sia $\Lambda = (\lambda_{i,j})$ con $\lambda_{i,j} \in \mathbf{R}(D)$ la matrice considerata, potremo ridurre tutte allo stesso denominatore le funzioni razionali $\lambda_{i,j}$, sia:

$$Q(D) = D^n + b_{n-1}D^{n-1} + \ldots + b_1 D + b_0 \qquad \text{con } b_i \in \mathbf{R}\,,$$

il polinomio denominatore comune che potremo supporre monico.

La matrice Λ si presenterà allora così:

$$\Lambda = \frac{1}{Q(D)}(p_{i,j}) \qquad \text{con } p_{i,j} \text{ polinomi reali in } D\,,$$

ovvero poichè si corrispondono nell'ovvio isomorfismo naturale:

$$\Lambda = \frac{1}{Q(D)}(A_m D^m + A_{m-1}D^{m-1} + \ldots + A_1 D + A_0)$$

dove le A_i sono matrici reali $q \times q$, denoteremo:

$$P(D) = (A^m D^m + A_{m-1}D^{m-1} + \ldots + A_1 D + A_0))\,.$$

Poichè, fissato $k \in \mathbf{R}$, l'operatore Λ è non espansivo rispetto alla seminorma $\|-\|_{T,k}$ per ogni T, allora la matrice $\hat{\Lambda}(s)$ è subunitaria per $s \in \mathbf{C}$ tale che $\operatorname{Re} s > k$, cioè $\|\hat{\Lambda}(s)\| < 1$ se $\operatorname{Re} s > k$, pertanto risulta $n > m$ e $\|A_n\| < 1$.

Posto allora $z = (1/Q(D))y$ si ottiene l'equazione nell'incognita z:

$$Q(D)z = g(x(t), P(D)z) ,$$

fixxato $x \in X^p$ si ha l'equazione differenziale:

$$z^{(n)} + b_{n-1}z^{(n-1)} + \ldots + b_0 z = g(x(t), A_n z^{(n)} + A_{n-1}z^{(n-1)} + \ldots + A_0 z)$$

che ha una ed una sola soluzione $z \in (C^\infty(R))^q$, per ogni scelta dei valori iniziali $t_0, z(t_0), \ldots, z^{(n-1)}(t_0)$, poichè rientra nelle ipotesi del seguente *Lemma* 2, si ha poi $y = Q(D)z$.

Allora, sfruttando l'unicità, se t_0 è tale che $x(t) = 0$ per ogni $t < t_0$, risulta $z(t) = 0$ per ogni $t < t_0$, quindi anche $y(t) = 0$ per ogni $t < t_0$.

Lemma 2: *Il sistema differenziale*:

$$z^{(n)} + b_{n-1}z^{(n-1)} + \ldots + b_0 z = h(t, A_n z^{(n)} + A_{n-1}z^{(n-1)} + \ldots + A_0 z)$$

con $h\colon R \times R^q \to R^q$ *applicazione continua e contrazione rispetto al secondo argomento,* $b_i \in R$, A_i *matrici reali* $q \times q$, *e con* $\|A_n\| < 1$, *ha una ed una sola soluzione per ogni scelta dei dati iniziali*: $t_0, z(t_0), \ldots, z^{(n-1)}(t_0) \in \mathbf{R}$; *se inoltre* $h \in C^{(k)}$, *allora* $z \in C^{(n+k)}$.

Dim.: Il sistema dato è equivalente al sistema:

$$z^{(n)} = h(t, A_n z^{(n)} + \ldots + A_0 z) - b_{n-1}z^{(n-1)} - \ldots - b_0 z .$$

Essendo, nelle ipotesi fatte su h ed A_n, la funzione:

$$\varphi(t, z^{(n)}, \ldots, z) = h(t, A_n z^{(n)} + \ldots + A_0 z) - b_{n-1}z^{n-1} - \ldots - b_0 z$$

una contrazione rispetto alla variabile $z^{(n)}$, da questa equazione si esplicita per ogni $t \in R$, $z^{(n)}$ (punto fisso):

$$z^{(n)} = \varphi(t, z^{(n-1)}, \ldots, z)$$

con φ continua essendo continua h e quindi γ.

Quest'ultimo sistema differenziale nell'incognita z è equivalente al sistema dato ed è in forma normale, ha soluzioni in grande poichè φ è lipschitziana rispetto alle variabili $\zeta^{(n-2)}, \ldots, \zeta$. Infatti per ogni $\zeta^{(i)}, \bar{\zeta}^{(i)} \in \mathrm{R}$ si ha:

$$
\begin{aligned}
&\|\varphi(t, \zeta^{(n-1)}, \ldots, \zeta^{(i)}, \ldots, \zeta) - \varphi(t, \zeta^{(n-1)}, \ldots, \bar{\zeta}^{(i)}, \ldots, \zeta)\| = \\
&= \|b(t, A_n\varphi + \ldots + A_i\zeta^{(i)} + \ldots + A_0\zeta) - b_{n-1}\zeta^{(n-1)} - \ldots - b_i\zeta^{(i)} - \ldots - b_0\zeta - \\
&- b(t, A_n\varphi + \ldots + A_i\bar{\zeta}^{(i)} + \ldots + A_0\zeta) + b_{n-1}\zeta^{(n-1)} + \ldots + b_i\bar{\zeta}^{(i)} + \ldots + b_0\zeta\| < \\
&< k\|A_n(\varphi(t, \zeta^{(n-1)}, \ldots, \zeta^{(i)}, \ldots, \zeta) - \varphi(t, \zeta^{(n-1)}, \ldots, \bar{\zeta}^{(i)}, \ldots, \zeta)) + A_i(\zeta^{(i)} - \bar{\zeta}^{(i)})\| + \\
&\qquad + \|b_i(\zeta^{(i)} - \bar{\zeta}^{(i)})\| ,
\end{aligned}
$$

essendo k, $0 < k < 1$, costante di contrazione di b, allora risulta:

$$
\|\varphi(t, \zeta^{(n-1)}, \ldots, \zeta^{(i)}, \ldots, \zeta) - \varphi(t, \zeta^{(n-1)}, \ldots, \bar{\zeta}^{(i)}, \ldots, \zeta)\| < \frac{\|A_i\| + |b_i|}{1 - k\|A_n\|} \|\zeta^{(i)} - \bar{\zeta}^{(i)}\| .
$$

Infine si osserva che se $b \in C^{(k)}$ allora anche $\varphi \in C^{(k)}$ e quindi la soluzione ζ è di classe $C^{(n+k)}$.

Dispositivi non lineari con funzionamenti funzioni reali localmente di quadrato sommabile

Sia X lo spazio delle funzioni definite in R a valori reali, di quadrato sommabile su ogni semiretta $(-\infty, T]$ con $T \in R$.

Consideriamo in X la famiglia di seminorme:

$$
\|x\|_T = \left(\int_{-\infty}^{T} x^2(t)\, dt\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad T \in R ;
$$

lo spazio X risulta completo nella topologia associata.

Sia $\mathfrak{T}$ l'universo totale su X, un dispositivo A di $\mathfrak{T}$ con n terminali è un insieme A di coppie $(x, y) \in X^n \times X^n$, con $(0, 0) \in A$; A si dirà monotono se per ogni $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in A$ si ha:

$$
\int_{-\infty}^{T} \langle x_2(t) - x_1(t), y_2(t) - y_1(t) \rangle\, dt > 0 \qquad \text{per ogni } T \in \mathrm{R} ,
$$

è facile provare che i dispositivi monotoni costituiscono un sottouniverso di $\mathfrak{T}$.

Sia $\mathfrak{D}$ l'universo dei dispositivi a funzionamenti in R lineari passivi risolubili.

Ogni dispositivo di questo universo $\mathfrak{D}$ può essere pensato come dispositivo di $\mathfrak{T}$; infatti sia $A \in \mathfrak{D}$, dispositivo ad n terminali, ne sia S la matrice di scattering subunitaria, e quindi rappresentativa di un morfismo non espansivo

$v = Su$,

$$S\colon R^n \to R^n\,;$$

ogni funzionamento $(x, y) \in A$ si rappresenta allora così:

$$\begin{cases} x = u + Su\,, \\ y = u - Su\,, \end{cases} \qquad u \in \mathrm{R}^n\,.$$

La matrice S opera ovviamente anche su X^n, se $u \in X^n$ poniamo:

$$(Su)(t) = S(u(t))\,, \qquad \text{per ogni } t \in \mathrm{R}\,.$$

Noteremo ancora S il morfismo così ottenuto

$$S\colon X^n \to X^n\,.$$

Osserviamo che S risulta non espansivo rispetto ad ogni seminorma della famiglia indotta da X su X^n, infatti se $u \in X^n$ per ogni $t \in \mathrm{R}$ si ha:

$$(Su(t))^2 < (u(t))^2$$

poichè S è non espansiva in R^n, quindi segue:

$$\int_{-\infty}^{T} (Su(t))^2\,dt < \int_{-\infty}^{T} (u(t))^2\,dt \qquad \text{per ogni } T \in \mathrm{R}\,.$$

Dato dunque A dispositivo di $\mathfrak{D}$, consideriamo il dispositivo $\tilde{A}$ di $\mathfrak{T}$ risolubile che ha come morfismo di scattering ancora S, cioè i cui funzionamenti sono tutte e sole le coppie $(x, y) \in X^n \times X^n$, della forma:

$$\begin{cases} x(t) = u(t) + Su(t)\,, \\ y(t) = u(t) - Su(t)\,, \end{cases} \qquad u \in X^n\,;$$

il dispositivo $\tilde{A}$ « puramente resistivo », risulta monotono.

Si verifica facilmente che la totalità dei dispositivi $\tilde{A}$ dell'universo totale $\mathfrak{T}$, ottenuti come appena descritto dai dispositivi A dell'universo $\mathfrak{D}$, costituisce un sottouniverso di $\mathfrak{T}$, che denoteremo ancora $\mathfrak{D}$ risultando isomorfo a quello inizialmente considerato.

Interessano poi dispositivi di $\mathfrak{T}$ non lineari, monotoni, risolubili le cui mappe di scattering

$$G\colon X^n \to X^n \qquad \text{con } G(0) = 0\,,$$

siano debolmente contrattive nel senso precisato nel seguito; per tali mappe

G. Darbo ha dimostrato in [4] un teorema di esplicitazione in grande che sarà qui utilizzato per garantire l'ammissibilità del feedback.

Definizione: *Siano X, Y spazi seminormati, data l'applicazione $G: X \to Y$, dato $r > 0$ si ponga:*

$$\omega_{x_0}(r) = \sup_{\|x - x_0\| < r} \|G(x) - G(x_0)\|, \qquad x_0 \in X,$$

$$\omega_K(r) = \sup_{x_0 \in K} \omega_{x_0}(r), \qquad K \subset X \text{ non vuoto}.$$

Si dice G debolmente contrattiva se per ogni $K \subset X$ non vuoto e limitato e per ogni $r > 0$ risulta $\omega_K(r) < r$.

Osservazione: È ovvio che una applicazione debolmente contrattiva è non espansiva ma non è detto il viceversa.

Consideriamo ora nell'universo totale su X tutte le reti miste di dispositivi lineari di $\mathfrak{D}$, quindi passivi puramente resistivi, e di dispositivi monotoni anche non lineari purchè risolubili e con mappa di scattering debolmente contrattiva, cioè la totalità $\mathfrak{U}$ dei dispositivi della forma:

$$A = \theta_*(L + M)$$

dove:

L è un dispositivo lineare passivo puramente resistivo,

M è un dispositivo monotono risolubile con mappa di scattering G debolmente contrattiva rispetto ad ogni seminorma,

θ è un trasduttore elementare.

Teorema 2: *La famiglia $\mathfrak{V}$ di dispositivi dell'universo totale su X è un universo di dispositivi monotoni, ed ogni suo dispositivo è risolubile.*

Dim.: È ovvio che $\mathfrak{V}$ è un universo di dispositivi, e che tutti i dispositivi di $\mathfrak{V}$ sono monotoni, poichè i dispositivi monotoni costituiscono un sottouniverso di $\mathfrak{T}$; mostreremo che $\mathfrak{V}$ è un universo risolubile.

Ogni dispositivo A di $\mathfrak{V}$ potrà essere posto nella forma:

$$A = \iota_*(L + M)$$

con L opportuno dispositivo di $\mathfrak{D}$ essendo ι il trasduttore che realizza le cortocircuitazioni necessarie fra terminali di L e di M.

Passando ai sistemi associati nella rappresentazione mediante le mappe di scattering, e distinguendo le entrate e le uscite destinate al feedback, detti S il morfismo di scattering di L e G la mappa di scattering di M, sia S così descritto:

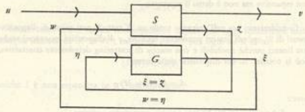
$$\begin{cases} v = Au + Bw\,, \\ \zeta = Cu + Dw\,, \end{cases} \qquad u \in X^p\,,\ w \in X^q\,,$$

con A, B, C, D matrici reali non espansive come la matrice:

$$S = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right);$$

e sia: $\eta = G(\xi)$ con $\eta, \xi \in X^q$ e $G\colon X^q \to X^q$ mappa debolmente contrattiva rispetto ad ogni seminorma.

Basterà mostrare che chiuso il feedback



si ha un sistema con mappa ingresso-uscita definita su tutto X^p, cioè che la equazione:

$$w = G(Cu + Dw)$$

ha una ed una sola soluzione $w \in X^q$ per ogni $u \in X^p$.

Essendo il morfismo $T\colon X^p \times X^q \to X^q$, $T(u, w) = Cu + Dw$, non espansivo rispetto ad ogni seminorma, poichè componente di uno non espansivo, e la mappa G debolmente contrattiva rispetto ad ogni seminorma, risulta la mappa composta:

$$GT\colon X^p \times X^q \to X^q$$

debolmente contrattiva rispetto ad ogni seminorma, come mostrato nel seguente *Lemma* 3.

Pertanto si conclude che per ogni $u \in X^p$, la mappa GT ha un unico punto fisso $w \in X^q$, utilizzando il teorema di esplicitazione in grande di G. Darbo [4], relativo a mappe debolmente contrattive in spazi dotati di una famiglia di seminorme e completi rispetto alla topologia caratterizzata da tale famiglia, come appunto lo spazio X e quindi le sue potenze X^n.

Lemma 3: *Siano X, Y, Z spazi seminormati, siano $G\colon Y \to Z$ una applicazione debolmente contrattiva e $T\colon X \to Y$ una applicazione non espansiva, la applicazione composta $G \circ T\colon X \to Z$ risulta debolmente contrattiva.*

Dim.: Dalla definizione si ha se $x_0 \in X$ ed $r > 0$:

$$\omega_{GT,x_0} = \sup_{\|x-x_0\|<r} \|G(T(x)) - G(T(x_0))\| \leq \sup_{\|y-T(x_0)\|<r} \|G(y) - G(T(x_0))\| = \omega_{G,T(x_0)}(r).$$

La diseguaglianza segue dal fatto che, essendo T non espansiva, per $x \in X$ tali che $\|x - x_0\| < r$ si ha:

$$\|T(x) - T(x_0)\| < \|x - x_0\| < r\,.$$

Se poi K è una parte non vuota limitata di X, per ogni $r > 0$ si ha:

$$\omega_{GT,K}(r) = \sup_{x_0 \in K} \omega_{GT,x_0}(r) < \sup_{x_0 \in K} \omega_{G,T(K)}(r) = \omega_{G,T(K)}(r) < r\,.$$

La prima diseguaglianza si ottiene da quella appena provata, la seconda segue dal fatto che G è debolmente contrattiva, quindi:

$$\omega_{G,H}(r) < r \qquad \text{per ogni } H \subset Y \text{ non vuoto e limitato}\,,$$

e $T(K)$ è una parte limitata di Y, essendo K limitata e T non espansiva.

BIBLIOGRAFIA

[1] F. Parodi, *Su un universo di dispositivi risolubili e monotoni massimali*, Rend. Acc. Naz. Scienze Mem. di Mat., Vol. IX (1985).

[2] F. Parodi, *Un universo di dispositivi risolubili a tempo discreto*, Rend. Acc. Naz. Scienze Mem. di Mat., Vol. IX (1985).

[3] F. Parodi, *Linearizzazione di dispositivi non lineari a tempo discreto*, Rend. Acc. Naz. Scienze Mem. di Mat., Vol. X (1986).

[4] G. Darbo, *Teoremi di esplicitazione in grande*, Rend. Acc. Naz. Scienze Mem. di Mat., Vol. IX (1985).

[5] G. Darbo - G. Maia: *Costruzione di alcuni universi lineari risolubili*, Rend. Acc. Naz. Scienze Mem. di Mat., Vol. IX (1985).

[6] F. Parodi, *Costruzione di un universo di dispositivi non lineari su una coppia di gruppi abeliani*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 58 (1977).

[7] G. Darbo, *Aspetti algebrici categoriali della teoria dei dispositivi*, Symposia Mathematica, 4 (1970).

[8] F. Parodi, *Categoria degli universi di dispositivi e categoria delle T-algebre*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 62 (1980).

[9] F. Parodi, *Alcune proprietà della categoria delle T-algebre*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 62 (1980).