Rendiconti
Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL
Memorie di Matematica
105° (1987), Vol. XI, fasc. 19, pagg. 285-291

FRANCO FAGNOLA (*)

Une caractérisation de la filtration naturelle d'un processus ponctuel marqué (**)

Abstract. — We prove that, for a given marked point process, the usual enlargement of the natural filtration is essentially the unique filtration possessing the martingale representation property.

Una caratterizzazione della filtrazione naturale di un processo puntuale marcato

Sunto. — Assegnato un processo puntuale marcato, si dimostra che l'ingrandimento abituale della sua filtrazione naturale è sostanzialmente l'unica filtrazione rispetto alla quale valga la proprietà di rappresentazione delle martingale dimostrata in [2].

Introduction

Etant donné un processus ponctuel marqué (dont le paramètre « spatial » varie dans un espace mesurable quelconque), désignons par μ sa mesure aléatoire et par $\mathcal{F}^0$ sa filtration naturelle. Considérons en outre le grossissement habituel $\mathcal{F}$ de $\mathcal{F}^0$.

Nous avons démontré dans [2] que $\mathcal{F}$ possède la *propriété de représentation des martingales*: si l'on munit l'espace Ω de la filtration $\mathcal{F}$, toute martingale (locale) peut être représentée comme différence de deux processus, dont l'un est l'intégrale stochastique, par rapport a μ, d'un processus paramétré prévisible, et l'autre est un processus prévisible à variation finie. Ce résultat entraîne immédiatement, dans le cas où μ possède une compensatrice locale prévisible, un théorème de Jacod bien connu (voir [5]).

Dans le présent article nous nous proposons de montrer que la propriété précédente est *caractéristique* de la filtration $\mathcal{F}$, au sens suivant: toute filtration $\mathcal{G}$, continue à droite, plus fine que $\mathcal{F}$, et possédant la même propriété

(*) Università di Trento, Dipartimento di Matematica, 38050 Povo (TN).
(**) Memoria presentata il 29 giugno 1987 da Giorgio Letta, uno dei XL.

ISSN-0392-4106

de représentation, coïncide avec $\mathcal{F}$ dès que la tribu $\mathcal{G}_0$ coïncide avec $\mathcal{F}_0$. Ce résultat généralise un résultat analogue obtenu par Itmi [4] dans le cas particulier où la filtration $\mathcal{F}$ est quasi-continue à gauche.

L'étape principale de la démonstration consiste à établir un lemme (voir (2.9)) qui nous a été inspiré par l'assertion (2.2), 2) de [6].

1. - Hypothèses et notations

Le langage, les notations, les conventions sont les mêmes que dans [2], [7]. En particulier, un *processus de Stieltjes* est un processus à variation finie (continu à droite), *nul en* 0.

On se donne un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et un espace mesurable $(E, \mathcal{E})$.

Un *processus ponctuel marqué* est un couple

$$((T_n)_{n\geq 0}, (Z_n)_{n\geq 1}), \tag{1.1}$$

où $(T_n)_{n\geq 0}$ est une suite croissante de variables aléatoires positives sur $(\Omega, \mathcal{A})$, à graphes disjoints, avec $T_0 = 0$, $\sup_n T_n = \infty$, et où $(Z_n)_{n\geq 1}$ est une suite d'applications mesurables de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $(E, \mathcal{E})$.

Un *processus paramétré* H est une fonction réelle mesurable

$$(x, t, \omega) \mapsto H(x, t, \omega)$$

sur l'espace $E \times]0, \infty[\times \Omega$ muni de la tribu produit $\mathcal{E} \otimes \mathcal{B}(]0, \infty[) \otimes \mathcal{A}$. Lorsque l'espace $(\Omega, \mathcal{A})$ est muni d'une filtration, le processus paramétré H est dit *prévisible* si la fonction

$$(x, (t, \omega)) \mapsto H(x, t, \omega)$$

est mesurable sur l'espace $E \times]0, \infty[$ muni du produit de la tribu $\mathcal{E}$ et de la tribu prévisible.

Dans toute la suite, on suppose donné le processus ponctuel marqué (1.1), et l'on désigne par μ la mesure aléatoire associée à ce processus, c'est-à-dire la mesure aléatoire définie par

$$\mu_\omega(dx, ds) = \sum_{n\geq 1, T_n(\omega)<\infty} \varepsilon_{(Z_n(\omega), T_n(\omega))}(dx, ds) .$$

Pour tout processus paramétré H, on peut alors considérer l'intégrale stochastique de H par rapport à μ, c'est-à-dire le processus de Stieltjes $H \cdot \mu$ défini par

$$(H \cdot \mu)(t, \omega) = \sum_{n\geq 1, T_n(\omega)\leq t} H(Z_n(\omega), T_n(\omega), \omega) . \tag{1.2}$$

Il s'agit d'un processus purement discontinu, ne sautant que sur les graphes des T_n (avec $n \geq 1$).

La *filtration naturelle* $\mathcal{F}^*$ du processus ponctuel marqué (1.1) est, par définition, la moins fine parmi toutes les filtrations sur $(\Omega, \mathcal{A})$ qui rendent chacune des fonctions de la forme $(T_n)_{\{Z_n \in B\}}$ (avec $n > 1$ et $B \in \mathcal{E}$) un temps d'arrêt. Nous désignerons par $\mathcal{F}$ le *grossissement habituel* de $\mathcal{F}^*$, c'est-à-dire la filtration (continue à droite) définie de la façon suivante: pour tout t, la tribu $\mathcal{F}_t$ est constituée par les éléments de $\mathcal{A}$ qui sont équivalents (pour la loi P) à un élément de $\mathcal{F}^*_t$.

2. - Le théorème de caractérisation de $\mathcal{F}$

Nous nous proposons de démontrer le résultat suivant:

(2.1) Théorème: *Soit $\mathcal{G}$ une filtration avec les propriétés suivantes:*

(*a*) *$\mathcal{G}$ est plus fine que $\mathcal{F}$.*

(*b*) *La tribu $\mathcal{G}_0$ coïncide avec $\mathcal{F}_0$.*

(*c*) *$\mathcal{G}$ est continue à droite.*

(*d*) *Par rapport à $\mathcal{G}$, toute martingale bornée, continue à droite et nulle en 0, peut être représentée comme différence de deux processus, dont l'un est de la forme* (1.2), *avec H processus paramétré prévisible, et l'autre est indistinguable d'un processus de Stieltjes prévisible.*

La filtration $\mathcal{G}$ coïncide alors avec $\mathcal{F}$.

Dans toute la suite, nous nous placerons dans les hypothèses du théorème énoncé ci-dessus. Toutes les notions faisant intervenir une filtration seront à entendre, sauf mention expresse du contraire, comme relatives à la filtration $\mathcal{G}$.

(2.2) Convention: Pour abréger le langage, nous dirons que deux processus sont *équivalents* si leur différence est indistinguable d'un processus de Stieltjes prévisible.

(2.3) Remarque: Avec ce langage, l'hypothèse (2.1) (*d*) peut s'énoncer de la manière suivante: toute martingale M bornée, continue à droite et nulle en 0, est équivalente à un processus de Stieltjes de la forme $H \cdot \mu$, avec H processus paramétré prévisible. On remarquera que M est alors indistinguable d'un processus de Stieltjes à variation localement intégrable (voir [7], (35.3)). Par conséquent, le processus $H \cdot \mu$ est, lui aussi, à variation localement intégrable, et son compensateur local prévisible est indistinguable de $H \cdot \mu - M$ (voir [7], § 35). Si, pour un certain entier $n > 1$, la martingale M vérifie la relation $M = M^{T_n} - M^{T_{n-1}}$, le processus paramétré prévisible H peut être supposé nul hors de l'ensemble

$$\{(x, t, \omega) : T_{n-1}(\omega) < t \leq T_n(\omega)\} \tag{2.4}$$

(quitte à le multiplier par l'indicatrice de cet ensemble): par conséquent, on peut supposer que le processus $H \cdot \mu$ ne saute que sur $[T_n]$.

Le Théorème (2.1) est une conséquence facile des deux lemmes suivants:

(2.5) Lemme: (*a*) *Pour tout nombre réel $t > 0$ et tout entier $n > 1$, les deux tribus $\mathfrak{G}_t$, $\mathfrak{G}_{t \wedge T_{n-1}}$ ont même trace sur l'ensemble $\{t < T_n\}$.*

(*b*) *Pour tout entier $n > 1$, la trace de la tribu prévisible sur le graphe de T_n est contenue dans la trace de la tribu $\mathcal{B}(]0, \infty[) \otimes \mathfrak{G}_{T_{n-1}}$ sur ce même graphe.*

(2.6) Lemme: *Pour tout entier $n > 0$, les deux tribus $\mathfrak{G}_{T_n}$, $\mathcal{F}_{T_n}$ ont même trace sur l'ensemble $\{T_n < \infty\}$.*

Voilà comment le Théorème (2.1) peut être déduit des résultats (2.5), (2.6). Etant donné un nombre réel $t > 0$ et un élément A de $\mathfrak{G}_t$, il suffit de prouver que chacun des ensembles de la forme

$$A \cap \{T_{n-1} \leq t < T_n\} \tag{2.7}$$

(avec $n > 1$) appartient à $\mathcal{F}_t$.

Or, d'après (2.5), l'ensemble (2.7) peut se mettre sous la forme

$$B \cap \{T_{n-1} \leq t < T_n\},$$

avec $B \in \mathfrak{G}_{T_{n-1}}$, donc aussi, grâce à (2.6), sous la forme

$$C \cap \{T_{n-1} \leq t < T_n\},$$

avec $C \in \mathcal{F}_{T_{n-1}}$: sous cette dernière forme, son appartenance à $\mathcal{F}_t$ est évidente.

Le Lemme (2.6) est, à son tour, une conséquence facile de (2.5) (*b*). De façon précise, il peut être démontré par récurrence:

Démonstration de (2.6): D'après l'hypothèse (2.1) (*b*), on a $\mathfrak{G}_0 = \mathcal{F}_0$. Supposons que, pour un certain entier $n > 1$, les deux tribus $\mathfrak{G}_{T_{n-1}}$, $\mathcal{F}_{T_{n-1}}$ aient même trace sur l'ensemble $\{T_{n-1} < \infty\}$, et montrons que les tribus $\mathfrak{G}_{T_n}$, $\mathcal{F}_{T_n}$ ont même trace sur l'ensemble $\{T_n < \infty\}$.

Soit V une variable aléatoire réelle bornée, mesurable par rapport à $\mathfrak{G}_{T_n}$, et désignons par M la martingale (continue à droite) fermée par V. En appliquant l'hypothèse (2.1) (*d*) à la martingale $M - M^{T_{n-1}}$, on voit que, sur l'ensemble $\{T_n < \infty\}$, la variable aléatoire V coïncide presque sûrement avec une fonction du type

$$\omega \mapsto M(T_{n-1}(\omega), \omega) + H(Z_n(\omega), T_n(\omega), \omega) - Y(T_n(\omega), \omega), \tag{2.8}$$

où H est un processus paramétré prévisible (nul hors de l'ensemble (2.4)), et Y est un processus de Stieltjes prévisible.

D'après l'hypothèse de récurrence, le premier terme de la somme qui figure dans (2.8) est mesurable par rapport à la trace de $\mathcal{F}_{T_{n-1}}$. Grâce à (2.5) (*b*), les autres termes sont mesurables par rapport à la tribu engendré sur $\{T_n < \infty\}$ par la trace de $\mathfrak{G}_{T_{n-1}}$ (c'est-à-dire de $\mathcal{F}_{T_{n-1}}$) et par les restrictions des variables aléatoires Z_n, T_n. On sait, d'autre part, que cette dernière tribu est simplement la trace de $\mathcal{F}_{T_n}$ sur $\{T_n < \infty\}$ (voir [2], (3.1), (3.3), ou bien [1], T 30, p. 307, T 36, p. 309). L'assertion est donc prouvée.

Il nous reste à démontrer le Lemme (2.5). A cet effet, nous commencerons par démontrer le lemme suivant:

(2.9) Lemme: *Etant donnés un entier $n \geq 1$ et un temps d'arrêt $S \leq T_n$, désignons par M la martingale (continue à droite) fermée par l'indicatrice de l'ensemble $\{S = T_n\}$.*

Il existe alors un processus paramétré prévisible H, tel que $H \cdot \mu$ soit un processus de Stieltjes croissant, ne sautant que sur $[\![T_n]\!]$, et que la différence $H \cdot \mu - (M - M^{T_{n-1}})$ soit un processus de Stieltjes prévisible et croissant.

Démonstration: Nous pouvons supposer que la martingale $M - M^{0}$ soit un processus de Stieltjes, et que l'on ait partout

$$0 \leq M \leq 1 , \quad M = M^{S} , \qquad M_S = I_{\{S = T_n\}} \text{ sur } \{S < \infty\} .$$

On aura alors

$$\Delta M \geq 0 \text{ en tout point de } [\![T_n]\!] . \tag{2.10}$$

(De façon plus précise: sur $[\![T_n]\!] \cap [\![S]\!]$, on aura $M = 1$, donc $\Delta M \geq 0$; sur $[\![T_n]\!] \cap [\![S]\!]^c$ on aura $\Delta M = 0$.)

L'hypothèse (2.1) (d) entraine l'existence d'un processus paramétré prévisible H, tel que la martingale $M - M^{T_{n-1}}$ soit équivalente (au sens de (2.2)) au processus $H \cdot \mu$ et que celui-ci ne saute que sur $[\![T_n]\!]$ (voir (2.3)).

Puisque la différence

$$Y = H \cdot \mu - (M - M^{T_{n-1}})$$

est un processus de Stieltjes prévisible, l'ensemble

$$\{\Delta Y < 0\} = \{\Delta (H \cdot \mu) < \Delta M\} \tag{2.11}$$

est un réunion dénombrable de graphes de temps d'arrêt prévisibles. Soit R l'un quelconque de ces temps d'arrêt, et montrons que son graphe est contenu dans celui de T_n (à une partie évanescente près). Remarquons, à cet effet, que l'on a $\Delta Y = - \Delta M$ hors du graphe de T_n, et $E[\Delta_R M] = 0$. Par conséquent, si l'ensemble $\{R \neq T_n\}$ n'était pas négligeable, on aurait

$$0 > \int_{\{R \neq T_n\}} \Delta_R Y \, dP = - \int_{\{R \neq T_n\}} \Delta_R M \, dP = \int_{\{R = T_n\}} \Delta_R M \, dP \geq 0$$

(où la dernière égalité est due à (2.10)).

Nous avons ainsi prouvé que l'ensemble (2.11) est inclus (à une partie évanescente près) dans le graphe de T_n. Nous pourrons donc supposer qu'il coïncide avec le graphe d'un temps d'arrêt prévisible U, avec $[\![U]\!] \subset [\![T_n]\!]$. Désignons par H' le produit de H par l'indicatrice de l'ensemble

$$\{(x, t, \omega) : t \neq U(\omega)\} .$$

On a alors, sur le graphe de T_n,

$$\Delta(H' \cdot \mu) > \Delta M > 0 .$$

En outre, H' est un processus paramétré prévisible, et le processus de Stieltjes croissant $H' \cdot \mu$ (qui ne saute que sur $[\![T_n]\!] \setminus [\![U]\!]$) diffère de $H \cdot \mu$ par un processus prévisible (ne sautant que sur $[\![U]\!]$), de sorte qu'il est encore équivalent à la martingale $M - M^{T_{n-1}}$.

Le processus paramétré H' répond donc à la question, car la différence $H' \cdot \mu - (M - M^{T_{n-1}})$ est indistinguable du compensateur local prévisible de $H' \cdot \mu$.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le Lemme (2.5).

Démonstration de (2.5): (*a*) Etant donnés l'entier $n > 1$, le nombre réel $t > 0$ et l'élément A de $\mathcal{G}_t$, il s'agit de prouver que l'ensemble

$$B = A \cap \{t < T_n\}$$

appartient à la trace de la tribu $\mathcal{G}_{t \wedge T_{n-1}}$ sur $\{t < T_n\}$.

Considérons, à cet effet, le temps d'arrêt $S = t_A \wedge T_n$, et construisons en correspondence la martingale M et le processus paramétré H comme dans le Lemme (2.9). On a alors $B = \{S < T_n\}$, de sorte que la martingale $L = 1 - M$ est fermée par l'indicatrice de B; ceci permet d'écrire (à un ensemble négligeable près)

$$B = \{L_{t \wedge T_n} > 0\} = \{t < T_n\} \cap \{L_t > 0\} .$$

Nous savons, d'autre part, que $H \cdot \mu$ est un processus purement discontinu, ne sautant que sur $[\![T_n]\!]$, et que $H \cdot \mu + L - L^{T_{n-1}}$ est un processus croissant; on a donc:

$$\{t < T_n\} \subset \{L_{t \wedge T_{n-1}} < L_t\} .$$

En outre, puisque L est une martingale positive, la variable aléatoire L_t est presque sûrement nulle sur l'ensemble $\{L_{t \wedge T_{n-1}} = 0\}$.

Il en résulte (à un ensemble négligeable près).

$$B = \{t < T_n\} \cap \{L_{t \wedge T_{n-1}} > 0\} ,$$

ce qui prouve l'assertion.

(*b*) Il suffit de prouver qu'étant donnés un entier $n>1$ et un temps d'arrêt S quelconque, on peut trouver une variable aleatoire positive S', mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{G}_{T_{n-1}}$, telle que l'on ait

$$]S, \infty[\, \cap [T_n] = \,]S', \infty[\, \cap [T_n] .$$

Remarquons, à cet effet, que la partie (*a*) du Lemme (déjà démontrée) nous permet d'écrire, pour tout nombre réel $t>0$,

$$\{S<t\} \cap \{t<T_n\} = A_t \cap \{t<T_n\} ,$$

avec $A_t \in \mathcal{G}_{T_{n-1}}$. Il suffit alors de poser $S' = \inf\{t_{A_t} ;\, t \in \mathbf{Q}_+\}$.

BIBLIOGRAFIA

[1] P. Brémaud, *Point Processes and Queues-Martingale Dynamics*, Springer (1981).

[2] F. Fagnola, *Sur la représentation intégrale des martingales d'un processus ponctuel marqué*, Rend. Acc. Naz. Sc. detta dei XL, Vol. X (1986), 191-199.

[3] F. Fagnola - G. Letta, *Sur la représentation intégrale des martingales d'un processus de comptage*, Rend. Acc. Naz. Sc. detta dei XL, Vol. X (1986), 45-51.

[4] M. Itmi, *Processus ponctuels marqués stochastiques. Représentation des martingales et filtration naturelle quasi-continue à gauche*, Sém. Prob. XV (1979/80), 618-626.

[5] J. Jacod, *Multivariate point processes: predictable projection, Radon-Nikodym derivatives, representation of martingales*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete, 31 (1975), 235-253.

[6] D. Lépingle - P.-A. Meyer - M. Yor, *Extrémalité et remplissage de tribus pour certaines martingales purement discontinues*, Sém. Prob. XV (1979/80), 604-617.

[7] G. Letta, *Martingales et intégration stochastique*, Scuola Normale Superiore, Quaderni (1984).