Rendiconti
Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL
Memorie di Matematica
105° (1987), Vol. XI, fasc. 15, pagg. 237-241

GIULIANO BRATTI (*)

Un teorema coomologico sul prolungamento degli integrali di equazioni differenziali ampliato in uno su morfismi di fasci di gruppi abeliani (**)

On a Komatsu-Kaneko's Theorem for Extension of Solutions of Partial Differential Equations

SUMMARY. — Following (1) and (3) we will give a theorem to calculate $H^1_K(A, \Phi_\varrho)$ for sheaves of abelian groups over a topological space X. We will deduce Theorem 4.1, [3], pag. 244, and Theorem 2, [1], pag. 262, from our result.

Il Teorema 4.1 di H. Komatsu [3], pag. 244, e la sua estensione al caso del fascio A delle funzioni analitiche reali, dovuta ad A. Kaneko [1], pag. 262, si possono ottenere come casi particolari d'un teorema più generale nel modo qui esposto.

Sia X uno spazio topologico di Hausdorff del tipo $X = \bigcup_n K_n$, $K_n \subset \mathring{K}_n \subset\subset X_{n+1}$ ($\mathring{K}_n$ è l'interno di K_n); sia Φ un fascio di gruppi abeliani su X, e siano

$$\varrho = \|\varrho_{i,j}\|, \quad 1<i<s \text{ e } 1<j<t, \qquad \sigma = \|\sigma_{h,k}\|, \quad 1<h<t \text{ e } 1<k<t$$

due matrici di morfismi di Φ; Φ_ϱ sia il fascio delle soluzioni del sistema omogeneo $\varrho(u) = 0$, che supponiamo privo di soluzioni a supporto compatto.

TEOREMA. *Se Φ, ϱ e σ soddisfano queste ipotesi:*

i$_1$) *per ogni n la sequenza*

$$\Phi(K_n)^s \xrightarrow{\varrho} \Phi(K_n)^t \xrightarrow{\sigma} \Phi(K_n)^{t_1}$$

è esatta; ed inoltre

(*) Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico dell'Università, Via Belzoni 7, I-35131 Padova.
(**) Nota presentata il 14 maggio 1987 da Giuseppe Scorza Dragoni, uno dei XL.

ISSN-0392-4106

i$_2$) *Φ_0 ammette una risoluzione aciclica del tipo*

$$0 \to \Phi_0 \to \Phi^0 \xrightarrow{\varrho} \Phi^1 \xrightarrow{\varrho} \Phi^2 \to \dots$$

allora: per ogni aperto A relativamente compatto di X, e per ogni $K \subset\subset A$ si ha

$$H^1_K(A, \Phi_0) \simeq \Phi_1(A \sim K)/\Phi_1(A). \tag{1}$$

DIMOSTRAZIONE. Si tratta d'una conseguenza del Teorema di excisione [3], pag. 195, interpretata nel modo proposto da Kaneko [1], pag. 263. Eccola: la sequenza

$$0 \to \Gamma_K(A, \Phi_0) \to H^0(A, \Phi_0) \to$$
$$\to H^0(A \sim K, \Phi_0) \xrightarrow{a} H^1_K(A, \Phi_0) \xrightarrow{b} H^1(A, \Phi_0) \xrightarrow{c} H^1(A \sim K, \Phi_0) \dots$$

è esatta; sicchè, se si dimostra che c è iniettivo ($\ker(c) = 0$), vista l'esattezza ne risulterà che b è il morfismo nullo, e dunque che a è suriettivo; dopo di che la tesi sarà ovvia.

Ora, in virtù dell'ipotesi i$_2$), si ha

$$H^1(A, \Phi_0) \simeq \Phi_1(A)/\varrho(\Phi(A)^0)$$

e

$$H^1(A \sim K, \Phi_0) \simeq \Phi_1(A \sim K)/\varrho(\Phi(A \sim K)^0),$$

e quindi se la (classe della)u in $H^1(A \sim K, \Phi_0)$ ha c-immagine nulla, esiste v in $\Phi(A \sim K)^0$ tale che $u = \varrho(v)$, in $A \sim K$. In virtù dell'ipotesi i$_2$) si ha

$$v = f - g \qquad \text{con } f \text{ in } \Phi(A \sim K)^0 \text{ e } g \text{ in } \Phi(A)^0,$$

così che, in $A \sim K$, si ha

$$\varrho(f) = u + \varrho(g).$$

Se $A \subset K_n$ (A è relativamente compatto) posto

$$h = \begin{cases} u + \varrho(g), & \text{in } A, \\ \varrho(f), & \text{in } K_n \sim K, \end{cases}$$

in virtù dell'ipotesi i$_1$), visto che $\sigma(h) = 0$, esiste una w in $\Phi(K_n)^0$ tale che

$$\varrho(w) = h$$

ovvero

$$u = \varrho(w - g), \qquad \text{in } A;$$

ciò dimostra che la u è nulla in $H^1(A, \Phi_0)$.

La dimostrazione è conclusa.

Corollario. *Se, oltre alle ipotesi del Teorema precedente, vale anche questa altra ipotesi:*

i$_2$) *per ogni f in $\Phi_e(X)$ e per ogni $K \subset\subset X$, la circostanza $f = \varrho(g)$ in $X \sim K$ implica*

$$f = \varrho(h), \qquad \text{con } h \text{ in } \Phi(X)^*,$$

allora: la (1) *vale per ogni aperto A di X e per ogni $K \subset\subset A$.*

Dimostrazione. La restrizione canonica

$$\Phi_e(X \sim K)/\Phi_e(X) \xrightarrow{r} \Phi_e(A \sim K)/\Phi_e(A)$$

è un isomorfismo. Infatti, se $[z]$ sta in $\Phi_e(X \sim K)/\Phi_e(X)$ e $r([z]) = 0$ allora, indicato con z_1 un rappresentante di $[z]$, risulta $z_{1|A \sim K} = u$, con u in $\Phi_e(A)$, e dunque la

$$Z = \begin{cases} z_1, & \text{in } X \sim K, \\ u, & \text{in } A, \end{cases}$$

che individua la stessa classe della z_1, è nulla in $\Phi_e(X \sim K)/\Phi_e(X)$. Dopo di che, se la z' sta in $\Phi(A \sim K)$, in virtù dell'ipotesi i$_2$) si ha $z' = f - g$, con f in $\Phi(X \sim K)$ e g in $\Phi(A)$, da cui la

$$h = \begin{cases} \varrho(f), & \text{in } X \sim K, \\ \varrho(g), & \text{in } A, \end{cases}$$

in virtù dell'ipotesi i$_2$) è anche del tipo $h = \varrho(k)$ su X, con k in $\Phi(X)^*$, cioè

$$z' = (f - k) - (g - k)$$

con $(g - k)$ in $\Phi_e(A)$.

Ne risulta: se A è un aperto di X, se $K \subset\subset A$ e se B è un aperto relativamente compatto in X tale che $K \subset B \subset A$, in virtù del Teorema di excisione, del Teorema che precede e dei brevi conti di sopra

$$H^1_K(A, \Phi_e) \cong H^1_K(B, \Phi_e) \cong \Phi_e(B \sim K)/\Phi_e(B) \cong$$
$$\cong \Phi_e(X \sim K)/\Phi_e(X) \cong \Phi_e(A \sim K)/\Phi_e(A).$$

La dimostrazione è conclusa.

Osservazione: Il Teorema di H. Komatsu si deduce facilmente dal Teorema che precede, poichè è facile controllare la validità delle ipotesi i$_j$), $j = 1, 2, 3$.

Infatti, nel caso che Φ sia $\mathcal{B}$, $\mathfrak{D}'$ oppure $\mathcal{E}$ (rispettivamente: il fascio delle iperfunzioni, delle distribuzioni e quello delle funzioni di classe C^∞ su R^n), sopra $X = R^n$, con $K_n = (x$ in R^n: $|x| \le n)$, ovvia la i_1), la risoluzione aciclica cui allude l'i_2) è quella di [3], pag. 236, mentre la validità dell'i_3) si deduce dalla risolubilità dei sistemi differenziali, per « dati compatibili » del tipo $\mathcal{B}$, $\mathfrak{D}'$ oppure $\mathcal{E}$ sopra ogni convesso di R^n.

Nel caso del fascio A, l'unica difficoltà (il resto è come sopra), è la prova dell'i_3), che, senza passare per (2), come in (1), si può fare così:

sia f in $A_\sigma(R^n)$, dove σ è il sistema di compatibilità [3], pag. 236, del sistema differenziale ϱ, e sia u in $A(R^n \sim K)^s$ tale che $\varrho(u) = f$; posto che L sia un compatto convesso tale che $K \subset L$, ed indicata con v in $A(L)^s$ una soluzione di $\varrho(v) = f$, in $L \sim K$ risulta $\varrho(u - v) = 0$. Se Δ è un minore d'ordine massimo estratto da ϱ, e se

$$\mathrm{Det}\,(\Delta) = RE$$

con E prodotto di tutti gli eventuali fattori ellittici di $\mathrm{Det}\,(\Delta)$, in $L \sim K$ si ha

$$E(u) = E(v) + h\,, \qquad \text{on } h \text{ in } A_R(L \sim K)^s\,;$$

in virtù di (1), h ammette un'estensione analitica $\hat{h}$ su tutto L; posto

$$t = \begin{cases} E(u)\,, & \text{in } R^n \sim K\,, \\ E(v) + \hat{h}\,, & \text{in } L\,, \end{cases}$$

per l'ellitticità di E esiste w in $A(R^n)^s$ tale che $E(w) = t$, cioè $\varrho(w) = f + k$, con $E(k) = 0$. Risulta: $\varrho(w - u) = k$, in $R^n \sim K$ ed $E(w - u) = 0$, sempre in $R^n \sim K$, così che per il sistema differenziale ellittico

$$\begin{cases} \varrho \\ \mathcal{E} \end{cases}$$

dove $\mathcal{E} = \|p_{i,j}(D)\|$, $1 \le i \le s$ e $1 \le j \le s$, $p_{i,i}(D) = E$ e $p_{i,j}(D) = 0$, se $i \neq j$ [1], il dato

$$\begin{cases} k \\ 0 \end{cases}$$

è compatibile. Ciò implica che esiste z in $A(R^n)^s$ tale che $\varrho(z) = k$ ovvero

$$\varrho(w - z) = f\,.$$

[1] Si suppone che $\Delta = \|p_{i,j}(D)\|$, $1 \le i \le s$ e $1 \le j \le s$.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. Kaneko, *Note on continuation of real analytic solutions of partial differential equations with constant coefficients*, Proc. Japan Acad., 51 (1975), pp. 262-264.

[2] T. Kawai, *On the theory of Fourier hyperfunctions and its applications to partial differential equations with constant coefficients*, J. Fac. Sci. Tokyo, Sect. I, 17 (1970), pp. 467-517.

[3] H. Komatsu, *Relative cohomology of sheaves of solutions of differential equations*, Lectures Notes in Math., 287 (1973), pp. 192-259.