Rendiconti
Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL
Memorie di Matematica
104° (1986), Vol. X, fasc. 6, pagg. 53-63

FRANCO PARODI (*)

Linearizzazione di dispositivi non lineari risolubili a tempo discreto (***)

Linearization of non linear discrete-time solvable devices

SUMMARY. — Using the methods introduced in [1], [2] we construct a universe of non linear discrete-time devices with differentiable scattering maps. Then we prove that the application which associates to every devices of this universe the linear, tangent in the origin, device, is a morfism in the universe of the linear passive solvable devices.

INTRODUZIONE

Con tecnica analoga a quella seguita in [1], [2] e con notazioni alle quali rimandiamo esplicitamente, si costruisce un universo di dispositivi, anche non lineari, risolubili i cui funzionamenti sono funzioni reali a tempo discreto, cioè elementi dello spazio X delle successioni reali.

I dispositivi di tale universo risultano dalla connessione in rete di dispositivi lineari risolubili con morfismo di scattering non espansivo, e di dispositivi, eventualmente non lineari, risolubili con mappa di scattering localmente contrattiva, la mappa di scattering di ogni dispositivo è comunque una funzione non anticipativa da X^n in X^n, n essendo il numero dei terminali del dispositivo considerato.

Lo spazio X^n risulta dotato di una famiglia crescente di seminorme; dopo aver richiamato le nozioni essenziali per mappe non anticipative da X^n in X^n, si mostra che, limitandosi al sottouniverso dei dispositivi con mappa di scattering di classe C^1, la trasformazione che associa ad ogni dispositivo di questo tipo, il dispositivo lineare tangente nell'origine, è un morfismo di quest'ultimo universo nell'universo dei dispositivi lineari monotoni risolubili.

(*) Istituto Matematico della Facoltà di Ingegneria, Genova.
(**) Memoria presentata il 19 giugno 1985 da Giuseppe Scorza Dragoni, uno dei XL.

ISSN-0392-4106

0. - Mappe non anticipative di classe C^1

Sia X lo spazio delle successioni reali, noteremo $x \in X$, $x = (x_i)$; sia $n \in N$, consideriamo X^n, risulta quest'ultimo uno spazio vettoriale, dotato della famiglia crescente di seminorme, verificante l'assioma di separazione, così definita:

$$|x|_p = \left(\sum_{i=1}^{p} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad p \in N,$$

ciascuna associata al «prodotto scalare»:

$$\langle x, y \rangle_p = \sum_{i=1}^{p} \langle x_i, y_i \rangle, \qquad x, y \in X^n,$$

dove $\langle -, - \rangle$ denota il prodotto scalare in R^n.

Alla famiglia di seminorme $|-|_p$ è associata in modo naturale una topologia metrizzabile, useremo nel seguito la convergenza in tale topologia.

Consideriamo mappe:

$$G\colon X^n \to X^m, \qquad n, m \in N,$$

non anticipative, cioè tali che le prime p componenti di $G(x)$ dipendono solo dalle prime p componenti di x, ovvero tali che, se $y = G(x)$, sia:

$$\left|\begin{array}{l} y_1 = G_1(x_1) \\ y_2 = G_2(x_1, x_2) \\ y_3 = G_3(x_1, x_2, x_3) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_i = G_i(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_i) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right.$$

dove per ogni i è $G_i\colon R^{i \times n} \to R^m$.

Consideriamo mappe G non anticipative e derivabili secondo Gateaux, pensando in X^m la convergenza associata alla topologia, se G è derivabile in $a \in X^n$ noteremo:

$$G'(a)\colon X^n \to X^m$$

il morfismo lineare non anticipativo derivato di G in a.

Dalla caratterizzazione della topologia in X^m e dal fatto che G è non anticipativo segue che la matrice rappresentativa di $G'(a)$ coincide con la matrice (infinita ma subdiagonale a blocchi) degli Jacobiani parziali $(\partial G_i/\partial x_j)_{x=a}$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial x_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial G_2}{\partial x_1} & \frac{\partial G_2}{\partial x_2} & 0 & 0 \\ \frac{\partial G_3}{\partial x_1} & \frac{\partial G_3}{\partial x_2} & \frac{\partial G_3}{\partial x_3} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

ciascun blocco $(\partial G_i/\partial x_j)_{x=a}$ è ovviamente una matrice $m \times n$.

Si constata anche da questa caratterizzazione che $G'(a)$ è un morfismo lineare non anticipativo anch'esso.

Denotiamo $L_0(X^n, X^m)$ lo spazio vettoriale dei morfismi lineari non anticipativi da X^n in X^m, se G è derivabile in tutto X^n si ha la mappa:

$$G' : X^n \to L_0(X^n, X^m) .$$

Lo spazio $L_0(X^n, X^m)$ risulta dotato della famiglia di seminorme seguente:

$$|U|_p = \sup_{|X|_p \leq 1} |U(x)|_p , \qquad p \in N$$

che risulta verificare l'assioma di separazione, poichè la famiglia di seminorme in X^n è crescente rispetto a p; risulta inoltre anche essa crescente rispetto a p.

Consideriamo anche in $L_0(X^n, X^m)$ la topologia metrizzabile associata alla famiglia di seminorme.

La mappa

$$G : X^n \to X^m ,$$

non anticipativa, è detta di classe C^1 se è derivabile in X^n e

$$G' : X^n \to L_0(X^n, X^m)$$

risulta continua.

La continuità di G' si caratterizza facilmente mediante la continuità di tutti gli Jacobiani parziali $(\partial G_i/\partial x_j)$.

Si noti, anche a tale scopo, che essendo G non anticipativa, anche G' risulta non anticipativa.

1. - Un universo di dispositivi risolubili di classe C^1

Sia U l'universo risolubile [1] generato nell'universo totale su X dai dispositivi (anche non lineari) strettamente monotoni risolubili, e dai dispositivi lineari passivi risolubili, e sia D il sottouniverso di U costituito dai dispositivi lineari passivi risolubili; avremo necessità nel seguito di restringere le nostre considerazioni ad un opportuno sottouniverso di U.

Sia V la totalità dei dispositivi di U del tipo:

$$A = \theta_*(L + M)$$

dove:

L lineare passivo risolubile,

M risolubile, con mappa di scattering localmente contrattiva [1] e di classe C^1,

θ trasduttore elementare.

Teorema 0: La famiglia di dispositivi V costituisce un sottouniverso dell'universo U.

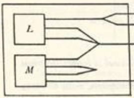
Dim.: È ovvio che V è un universo poichè la somma di dispositivi risolubili con mappa di scattering localmente contrattiva e di classe C^1 è banalmente un dispositivo dello stesso tipo; allora V è un sottouniverso di U.

Teorema 1: Ogni dispositivo di V ha mappa di scattering di classe C^1.

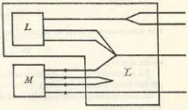
Dim.: Sia A un dispositivo di V con n terminali, sarà con le notazioni già usate in [1], [2],

$$A = \theta_*(L + M) = \iota_*(\mathcal{L} + M),$$

con $\mathcal{L}$ opportuno dispositivo lineare passivo risolubile e ι il trasduttore che realizza le cortocircuitazioni dei terminali di M con gli opportuni terminali di L.



$\theta_*(L + M)$



$\iota_*(\mathcal{L} + M)$

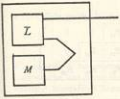
(1) Una mappa $G: X^n \to X^m$ è detta localmente contrattiva se è localmente contrattiva rispetto a ciascuna seminorma $|-|_p$ cioè se:

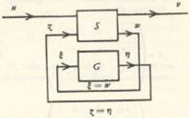
per ogni $p \in N$ esistono $k, \delta \in R$, $k < 1$, $\delta > 0$ tali che $|G(x) - G(y)|_p < k|x - y|_p$;
per ogni $x, y \in X^m$ tali che $|x|_p < \delta$, $|y|_p < \delta$.

Sia

$$S: X^{m+n} \to X^{m+n}$$

il morfismo di scattering di L non espansivo, che ci consente di pensare L come sistema di cui S è il morfismo entrata-uscita





Sia poi

$$G: X^{n'} \to X^{m}$$

la mappa di scattering di M, localmente contrattiva e di classe C^1, potremo pensare anche G come mappa entrata-uscita di un sistema.

La cortocircuitazione dei terminali di L ed M corrisponde al feedback incrociato sulle corrispondenti entrate-uscite dei sistemi associati [1].

Descriviamo opportunamente S distinguendo le entrate ζ e le uscite w destinate al feedback:

$$S: \begin{cases} v = Au + B\zeta, & u, v \in X^m, \\ w = Cu + D\zeta, & \zeta, w \in X^n, \end{cases}$$

con A, B, C, D matrici infinite subdiagonali a blocchi, infatti descrivendo S componente per componente si ha:

$$\left| \begin{array}{l} v_1 = A_{11}u_1 + B_{11}\zeta_1 \\ w_1 = C_{11}u_1 + D_{11}\zeta_1 \\ v_2 = A_{21}u_1 + A_{22}u_2 + B_{21}\zeta_1 + B_{22}\zeta_2 \\ w_2 = C_{21}u_1 + C_{22}u_2 + D_{21}\zeta_1 + D_{22}\zeta_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ v_i = \sum_{j=1}^{i} A_{ij}u_j + \sum_{j=1}^{i} B_{ij}\zeta_j \\ w_i = \sum_{j=1}^{i} C_{ij}u_j \times \sum_{j=1}^{i} D_{ij}\zeta_j \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array} \right.$$

con A_{ij} matrici reali $m \times m$,

B_{ij} matrici reali $m \times n$,

C_{ij} matrici reali $n \times m$,

D_{ij} matrici reali $n \times n$,

tutte subunitarie essendo S non espansiva.

Risultano allora:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 & 0 & \\ A_{21} & A_{22} & 0 & \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} B_{11} & 0 & 0 & \\ B_{21} & B_{22} & 0 & \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \ldots$$

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & 0 & 0 & \\ C_{21} & C_{22} & 0 & \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} D_{11} & 0 & 0 & \\ D_{21} & D_{22} & 0 & \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Sia poi $\eta = G(\xi)$, $\xi, \eta \in X^n$; posto $\xi = w$ si ha:

$$\begin{cases} v = Au + Bz, \\ \eta = G(Cu + Dz), \end{cases}$$

e posto $z = \eta$, dall'equazione:

$$z = G(Cu + Dz),$$

con $G(Cu + Dz)$: $X^{m+n} \to X^n$ localmente contrattiva, poichè G è localmente contrattiva e $Cu + Dz$ è non espansiva, si esplicita una unica [3], [4] funzione:

$$z(u): X^m \to X^n.$$

Tale funzione è derivabile come si ottiene dal teorema di Dini applicato ricorrentemente alle successive equazioni:

$$z_1 = G_1(C_{11}u_1 + D_{11}z_1)$$

$$z_2 = G_2(C_{11}u_1 + D_{11}z_1,\ C_{21}u_1 + C_{22}u_2 + D_{21}z_1 + D_{22}z_2)$$

....

$$z_i = G_i\Big(C_{11}u_1 + D_{11}z_1, \ldots, \sum_{j=1}^{i} C_{ij}u_j + D_{ij}z_j\Big)$$

....

in cui risulta la matrice $I-(\partial G_1/\partial \xi_1)(\ldots)\, D_{11}$ invertibile perchè $(\partial G_1/\partial \xi_1)(\ldots)D_{11}$ è la matrice di una contrazione in R^n; e ancora $I-(\partial G_2/\partial \xi_2)(\ldots)D_{22}$ è invertibile essendo $(\partial G_2/\partial \xi_2)(\ldots)D_{22}$ la matrice di una contrazione in R^n, e così in generale la matrice

$$I-\frac{\partial G_i}{\partial \xi_i}(\ldots)\,D_{ii}$$

è invertibile perchè la matrice

$$\frac{\partial G_i}{\partial \xi_i}(\ldots)\,D_{ii}$$

è la matrice di una contrazione in R^n, infatti, essendo G, e quindi ogni sua componente, una contrazione locale, il morfismo G', e quindi le sue componenti, risultano contrazioni lineari.

Derivando si ha:

$$\zeta'(u) = G'(Cu + D\zeta(u))\,(C + D\zeta'(u))$$

e la matrice infinita ma subdiagonale a blocchi

$$I - G'(\ldots)D$$

risulta invertibile per ogni u poichè la matrice infinita ma subdiagonale a blocchi

$$G'(\ldots)D$$

è la matrice di una contrazione in X^n, e sono quindi contrazioni tutti i blocchi sulla sua diagonale, allora sono invertibili tutti i blocchi sulla diagonale della matrice precedente.

Si ha allora:

$$\zeta'(u) = (I - G'(\ldots)D)^{-1}\,G'(\ldots)C$$

per ogni u, pertanto chiuso il feedback si ha:

$$v = Au + B\zeta(u)$$

ed è questa la mappa di scattering del dispositivo $\iota_*(L+M)$, certamente di classe C^1.

Osservazione: Si noti che non costituiscono invece un universo tutti i dispositivi di U con mappa di scattering di classe C^1, come si prova con facili esempi già nel caso stazionario; è essenziale che « la parte non lineare » abbia mappa di scattering localmente contrattiva.

2. - Linearizzazione dei dispositivi dell'universo V

Definizione: Dato un dispositivo A di V con mappa di scattering

$$v = S(u),$$

diciamo dispositivo lineare tangente ad A in $(0, 0)$ il dispositivo lineare A' che ha morfismo di scattering

$$v = S'(0)u.$$

Teorema 2: La trasformazione $\mathfrak{L}$ che associa ad ogni dispositivo A di V il dispositivo lineare A', tangente ad A in $(0, 0)$, è un morfismo dell'universo V nell'universo D.

Dim.: Occorre intanto provare che se $A \in V$ allora $A' \in D$; basterà mostrare che A' è passivo.

Con le notazioni già introdotte nella dimostrazione del Teorema 1,

$$A = \iota_*(\bar{L} + M)$$

è certamente monotono, perchè i dispositivi monotoni formano un universo, e la sua mappa di scattering

$$v = Au + B\zeta(u)$$

è allora certamente non espansiva, derivabile, come già mostrato, ed ha come derivata in 0 il morfismo non espansivo:

$$v = Au + B\zeta'(0)u = \big(A + B(I - G'(0))^{-1}G'(0)C\big)u.$$

Allora il dispositivo A', che ha questo come morfismo di scattering, appartiene all'universo D.

Per provare infine che $\mathfrak{L}$ è un morfismo di universi [5], occorre provare che:

$$(\varphi_* A)' = \varphi_*(A')$$

per ogni $A \in V$, φ trasduttore elementare.

Ancora con le notazioni della dimostrazione del Teorema 1, basta dimostrare che se

$$A = \theta_*(L + M) = \iota_*(\bar{L} + M)$$

allora

$$(\theta_*(L + M)) = \theta_*(L + M').$$

Infatti per ogni trasduttore φ risulta allora:

$$\varphi_*(\mathcal{A}') = \varphi_*(\theta_*(L+M))' = \varphi_*\theta_*(L+M') = (\varphi\theta)_*(L+M') =$$
$$= ((\varphi\theta)_*(L+M))' = \big(\varphi_*(\theta_*(L+M))\big)' = (\varphi_*(\mathcal{A}))' .$$

E ci si può ridurre a mostrare la relazione:

$$(\iota_*(L+M))' = \iota_*(L+M') ,$$

che si interpreta sui sistemi associati come compatibilità dell'operazione di feed-back con la linearizzazione.

Si è già visto che il dispositivo

$$(\iota_*(L+M))'$$

ha come morfismo di scattering

$$v = \big(A + B(I - G'(0))^{-1}G'(0)C\big)u .$$

Calcoliamo ora il morfismo di scattering del dispositivo

$$\iota_*(L+M') .$$

Il dispositivo M' ha morfismo di scattering

$$\eta = G'(0)\xi$$

e la matrice $G'(0)$ è una contrazione poichè G è localmente contrattiva.

Si ha allora ponendo $\xi = w$

$$\begin{cases} v = Au + Bz , \\ \eta = G'(0)(Cu + Dz) , \end{cases}$$

e posto $z = \eta$, dall'equazione

$$z = G'(0)(Cu + Dz)$$

si ricava:

$$z = (I - G'(0)D)^{-1}G'(0)Cu$$

essendo la matrice $(I - G'(0)D)^{-1}$ invertibile come già visto nella dimostrazione del Teorema 1.

Chiuso il feedback si ha:

$$v = Au + B(I - G'(0)D)^{-1}G'(0)Cu .$$

Quest'ultimo è allora il morfismo di scattering del dispositivo $\iota_*(L + M')$ che risulta identico al morfismo di scattering del dispositivo $(\iota_*(L + M))'$ e questo conclude la dimostrazione.

Osservazione: Come già osservato nel corso della dimostrazione, abbiamo provato la compatibilità dell'operazione di linearizzazione con l'operazione di feedback nell'universo di sistemi associato all'universo di dispositivi risolubile V, il risultato può avere interesse autonomo nella teoria dei sistemi.

Teorema 3: Il morfismo $\mathfrak{L}$: $V \to D$ è una retrazione dell'universo V in D.

Dim.: La dimostrazione segue ovviamente dal fatto che $\mathfrak{L}$ lascia fissi i dispositivi lineari.

3. - Linearizzazione e cambiamenti di scala

Teorema 4: Il morfismo $\mathfrak{L}$ commuta con gli automorfismi di cambiamento di scala [2].

Dim.: I cambiamenti di scala sullo spazio delle tensioni e delle correnti sono rappresentati da trasformazioni del tipo:

$$X = ax , \qquad Y = by \qquad \text{con } a, b \text{ reali positivi} .$$

È immediato verificare che ognuna di esse individua un automorfismo nell'universo totale e che tale automorfismo subordina un automorfismo sull'universo D e anche sugli universi U, V, perchè si verifica banalmente che l'insieme dei generatori di ciascuno di questi è invariante per tali trasformazioni.

La commutatività con $\mathfrak{L}$ dei cambiamenti di scala è poi conseguenza immediata delle regole di derivazione.

BIBLIOGRAFIA

[1] F. Parodi, *Un universo di dispositivi risolubili a tempo discreto*, Rend. Acc. Naz. Scienze Mem. di Mat., Vol. IX (1985).

[2] F. Parodi, *Su un universo di dispositivi risolubili e monotoni massimali*, Rend. Acc. Naz. Scienze Mem. di Mat., Vol. IX (1985).

[3] G. Darbo, *Un teorema di esplicitazione in grande*, Rend. Acc. Naz. Scienze Mem. di Mat., Vol. V (1981-82).

[4] G. Darbo, *Teoremi di esplicitazione in grande*, Rend. Acc. Naz. Scienze Mem. di Mat., Vol. IX (1985).

[5] G. Darbo, *Aspetti algebrico categoriali della teoria dei dispositivi*, Symposia Mathematica, Vol. IV (1970).

— F. Parodi, *Costruzione di un universo di dispositivi non lineari su una coppia di gruppi abeliani*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, Vol. LVIII (1977).

— F. Parodi, *Categoria degli universi di dispositivi e categoria delle T-algebre*.

— F. Parodi, *Alcune proprietà della categoria delle T-algebre*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, Vol. 62, (1980).