Rendiconti
Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL
Memorie di Matematica
104° (1986), Vol. X, fasc. 12, pagg. 153-163

RITA GIULIANO ANTONINI (*)

Comparaison de densités arithmétiques (**)

Confronto di densità aritmetiche

SUNTO. — Vengono dati alcuni criteri generali che permettono di confrontare due densità definite da due diverse famiglie di misure su $\mathbb{N}^*$. Si ottengono da essi alcuni risultati che contengono, come casi particolari, teoremi ben noti riguardanti le densità analitica, asintotica e logaritmica.

ABSTRACT. — Some general criteria are given, which can be used to compare two densities defined by different families of measures on $\mathbb{N}^*$. These criteria yield some results which contain, as particular cases, well known theorems concerning the analytic, asymptotic and logarithmic densities.

INTRODUCTION

Les différentes notions de « densité arithmétique » qui ont été étudiées dans la littérature peuvent être facilement ramenées à un schéma commun, de la manière suivante. On se donne un ensemble T d'indices, filtré par un filtre $\mathcal{F}$, et une famille $(\mu_t)_{t\in T}$ de mesures positives et bornées sur l'ensemble $\mathbb{N}^*$ des entiers strictement positifs. On suppose que, suivant le filtre $\mathcal{F}$, la famille (μ_t) converge vers 1 sur $\mathbb{N}^*$, et vers 0 sur toute partie de $\mathbb{N}^*$ réduite à un seul élément (donc aussi sur toute partie finie).

Etant donnée une partie $\mathcal{A}$ quelconque de $\mathbb{N}^*$, on s'intéresse à la limite (suivant le filtre $\mathcal{F}$) de la fonction $t \mapsto \mu_t(\mathcal{A})$.

Lorsque cette limite existe, on l'appelle la *densité* de $\mathcal{A}$ (relative à la famille (μ_t)).

De façon plus générale, si f est une fonction arithmétique réelle (c'est-à-dire une application de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{R}$), positive ou bornée, on considère, pour

(*) Dipartimento di Matematica « L. Tonelli », Via Buonarroti 2, 56100 Pisa (Italy).
(**) Memoria presentata il 15 novembre 1985 da Giorgio Letta, socio dell'Accademia.

ISSN-0392-4106

tout t, l'intégrale de f par rapport à μ_t, c'est-à-dire le nombre

$$\mu_t[f] = \int f \, d\mu_t = \sum_{k \geq 1} f(k) \mu_t(k) ,$$

et on s'intéresse à la limite (suivant le filtre $\mathcal{F}$) de la fonction $t \mapsto \mu_t[f]$. Lorsque cette limite existe, on l'appelle la *densité* de f.

Voilà trois cas particuliers classiques:

(*a*) La *densité asymptotique* de f est la limite suivante (lorsqu'elle existe):

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(k) .$$

C'est un cas particulier de la notion précédente, obtenu en prenant comme famille de mesures la *suite* $(\mu_n)_{n \geq 1}$ définie par

$$\mu = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k .$$

Dans cette formule, ε_k désigne la loi de Dirac sur $\mathbf{N}^*$ définie par une masse unité placée au point k. Par conséquent, μ_n désigne la répartition uniforme sur l'intervalle $[1, n]$ des entiers. Le filtre $\mathcal{F}$ est naturellement le filtre constitué par les parties de $\mathbf{N}^*$ dont le complémentaire est fini.

(*b*) La *densité logarithmique* de f est la limite suivante (lorsqu'elle existe).

$$\lim_n \frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^{n} f(k) \log \left(1 + \frac{1}{k}\right) .$$

Il s'agit de la densité relative à la suite (μ_n) définie par

$$\mu_n = \frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^{n} \log \left(1 + \frac{1}{k}\right) \varepsilon_k .$$

(*c*) La *densité analytique* de f est la limite suivante (lorsqu'elle existe)

$$\lim_{t \downarrow 0} t \sum_{k \geq 1} f(k) k^{-(1+t)} .$$

Il s'agit encore d'un cas particulier de la notion générale introduite ci-dessus. Ici la famille $(\mu_t)_{t \in T}$ est définie par

$$T =]0, +\infty[, \qquad \mu_t = t \sum_{k \geq 1} k^{-(1+t)} \varepsilon_k .$$

Le filtre $\mathcal{F}$ est naturellement le filtre induit sur $]0, +\infty[$ par le filtre des voisinages de 0 dans $\mathbf{R}$.

Dans le présent article, nous nous proposons de donner des critères permettant de comparer deux densités définies par deux différentes familles filtrées de mesures sur $\mathbf{N}^*$.

On obtiendra, entre autres, un critère contenant, comme cas particulier (voir Exemple (2.8)), un résultat de P. Nanopoulos sur la densité analytique ([4], Th. (2.9)).

1. - Deux critères generaux de comparaison

Nous commencerons par considérer un cas particulier du schéma introduit ci-dessus pour la construction d'une densité. Ce cas particulier comprend, entre autres, le cas de la densité asymptotique et celui de la densité logarithmique.

On se donne sur $\mathbf{N}^*$ une mesure positive μ, non bornée. On choisit une suite $(S_n)_{n\geq 1}$ de nombres réels strictement positifs, telle que l'on ait (lorsque n tend vers l'infini)

$$S_n \sim \mu([1, n]) \,, \tag{1.1}$$

et on considère la suite (μ_n) de mesures bornées sur $\mathbf{N}^*$ définie par

$$\mu_n = \frac{1}{S_n} I_{[1,n]}\mu \,. \tag{1.2}$$

Il est clair que la notion de densité définie par cette suite ne dépend pas du choix de la suite (S_n) vérifiant la relation (1.1). Elle ne dépend que de la mesure μ. On pourra donc l'appeler la *densité associée* à μ, ou la *μ-densité*.

Nous nous proposons maintenant de montrer que cette notion ne change pas (au moins pour les fonctions arithmétiques bornées) si l'on remplace μ par une mesure ν telle que l'on ait (lorsque k tend vers l'infini) $\nu\{k\} \sim \mu\{k\}$.

De façon plus précise, nous démontrerons la proposition suivante:

(1.3) Proposition: *Soient μ, ν deux mesures positives non bornées sur* $\mathbf{N}^*$, *telles que l'on ait (lorsque k tend vers l'infini)*

$$\nu\{k\} \sim c\mu\{k\}$$

pour une constante c convenable (avec $0 < c < +\infty$).

On a alors (lorsque n tend vers l'infini)

$$\nu([1, n]) \sim c\mu([1, n]) \,. \tag{1.4}$$

En outre, étant données deux suites (S_n), (T_n) de nombres réels strictement positifs, vérifiant les relations

$$S_n \sim \mu([1, n]) \,, \qquad T_n \sim \nu([1, n]) \,,$$

on a, pour toute fonction arithmétique bornée f,

$$\lim_n \left(\frac{1}{S_n} \int_{[1,n]} f\, d\mu - \frac{1}{T_n} \int_{[1,n]} f\, d\nu \right) = 0 \,. \tag{1.5}$$

Démonstration: Quitte à remplacer μ par $c\mu$, on pourra supposer $c = 1$. On pourra en outre supposer $\mu < \nu$. (En effet, dans le cas général on se ramène à ce cas particulier en comparant chacune des deux mesures μ, ν avec la mesure $\mu \vee \nu$.)

Fixons un nombre réel $\varepsilon > 0$. Il existe un entier p, tel que, pour tout entier $k > p$, on ait

$$(1-\varepsilon)\nu\{k\} < \mu\{k\} < \nu\{k\} .$$

On a alors, pour tout $n > p$,

$$(1-\varepsilon)\nu([p, n]) < \mu([p, n]) < \nu([p, n]) .$$

On a d'autre part (puisque les mesures μ, ν sont non bornées)

$$\mu([1, n]) \sim \mu([p, n]) , \qquad \nu([1, n]) \sim \nu([p, n]) .$$

Il en résulte

$$(1-\varepsilon) < \liminf_n \frac{\mu([1, n])}{\nu([1, n])} < \limsup_n \frac{\mu([1, n])}{\nu([1, n])} < 1 ,$$

ce qui prouve la relation (1.4).

Pour prouver la relation (1.5), supposons $|f| < 1$ (ce qui ne restreint pas la généralité) et posons:

$$s_n = \mu([1, n]) , \qquad t_n = \nu([1, n]) , \qquad \sigma_n = \int_{[1,n]} f \, d\mu , \qquad \tau_n = \int_{[1,n]} f \, d\nu .$$

On a alors

$$S_n \sim s_n \sim t_n \sim T_n .$$

On a en outre

$$|\sigma_n - \tau_n| < \sum_{k=1}^{n} |f(k)| (\nu\{k\} - \mu\{k\}) < \sum_{k=1}^{n} (\nu\{k\} - \mu\{k\}) = t_n - s_n ,$$

et par conséquent

$$\left| \frac{\sigma_n}{S_n} - \frac{\tau_n}{T_n} \right| < \left| \frac{\sigma_n}{S_n} - \frac{\tau_n}{S_n} \right| + \left| \frac{\tau_n}{S_n} - \frac{\tau_n}{T_n} \right| < \frac{t_n - s_n}{S_n} + \left| \tau_n \frac{T_n - S_n}{S_n T_n} \right| .$$

Il suffit alors de remarquer que chacun des deux termes au second membre tend vers 0, grâce aux relations suivantes:

$$\frac{t_n - s_n}{S_n} \sim \frac{t_n - s_n}{s_n} = \frac{t_n}{s_n} - 1 , \qquad \left| \tau_n \frac{T_n - S_n}{S_n T_n} \right| \sim \frac{|\tau_n|}{t_n} \frac{|T_n - S_n|}{S_n} < \left| \frac{T_n}{S_n} - 1 \right| .$$

(1.6) Exemple: Etant donnée une suite convergente $(a_k)_{k \geq 1}$ de nombres réels positifs, avec $\sum_{k \geq 1} a_k = +\infty$, la proposition précédente s'applique aux deux mesures suivantes:

$$\mu = \sum_{k\geq 1} a_k \varepsilon_k , \qquad \nu = \sum_{k\geq 1} \log(1+a_k)\varepsilon_k .$$

Il suffit en effet de remarquer que, si l'on pose

$$a = \lim_k a_k , \qquad c = \begin{cases} \frac{1}{a}\log(1+a) & \text{si } a>0 , \\ 1 & \text{si } a=0 , \end{cases}$$

on a

$$\log(1+a_k) \sim c a_k .$$

En prenant $a_k = 1/k$, on trouve en particulier le corollaire suivant:

(1.7) Corollaire: *Pour toute fonction arithmétique f, positive et bornée, et tout nombre réel $l>0$, les conditions suivantes sont équivalentes:*

(*a*) $\lim_n \frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^{n} f(k)/k = l$.

(*b*) $\lim_n \frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^{n} f(k) \log\left(1+\frac{1}{k}\right) = l$

(*autrement dit, f admet l comme densité logarithmique*).

Un deuxième critère de comparaison est basé sur le théorème suivant:

(1.8) Théorème: *Soient $(\mu_t)_{t\in T}$, $(\nu_t)_{t\in T}$ deux familles de mesures positives bornées sur* $\mathbf{N}^*$, *admettant un même ensemble T comme ensemble des indices. Soit $\mathcal{F}$ un filtre sur T, et supposons que les deux conditions suivantes soient remplies:*

(*a*) *Chacune des deux familles (μ_t), (ν_t) converge vers* 0, *suivant le filtre $\mathcal{F}$, sur toute partie de* $\mathbf{N}^*$ *réduite à un seul élément.*

(*b*) *On a (suivant le produit du filtre $\mathcal{F}$ et du filtre constitué par les parties de* $\mathbf{N}^*$ *dont le complémentaire est fini)*

$$\mu_t(k) \sim \nu_t(k) .$$

Dans ces conditions, pour toute fonction arithmétique *positive f, les deux fonctions $t \mapsto \mu_t[f]$, $t \mapsto \nu_t[f]$ admettent (suivant le filtre $\mathcal{F}$) les mêmes valeurs d'adhérence dans* $\mathbf{R}$.

Démonstration: Soit l une valeur d'adhérence pour la fonction $t \mapsto \mu_t[f]$. Il existe un ultrafiltre $\mathcal{U}$ sur T, plus fin que $\mathcal{F}$, tel que l'on ait

$$l = \lim_{t,\mathcal{U}} \mu_t[f] .$$

Posons

$$l' = \lim_{t, \mathfrak{U}} \nu_t[f],$$

et montrons que l' coïncide avec l (ce qui prouvera l'assertion du théorème).

Etant donné un nombre réel $\varepsilon > 0$, on peut trouver, d'après l'hypothèse (b), un élément F de $\mathcal{F}$ et un entier n, tels que l'on ait

$$\mu_t(k) < (1+\varepsilon)\nu_t(k) \qquad \text{pour } t \in F \text{ et } k > n.$$

On a alors

$$\int_{]n,+\infty[} f\, d\mu_t < (1+\varepsilon) \int_{]n,+\infty[} f\, d\nu_t \qquad \text{pour } t \in F.$$

Si, dans cette relation, on passe à la limite par rapport à t, suivant l'ultrafiltre $\mathfrak{U}$, on trouve (en tenant compte de l'hypothèse (a)) $l < (1+\varepsilon)l'$. Il en résulte (ε étant arbitraire) $l < l'$. De façon analogue on démontre l'inégalité opposée.

2. - Comparaison entre densité logarithmique et densité analytique

Dans ce paragraphe nous démontrerons un critère permettant, entre autres, de comparer les densités logarithmique et analytique.

Ce critère repose sur le lemme suivant:

(2.1) Lemme: *Etant données une mesure positive* $\mu = \sum_{k \geq 1} a_k \varepsilon_k$ *sur* $\mathbf{N}^*$ *et une suite croissante* (S_n) *de nombres réels strictement positifs, vérifiant les relations*

(2.2) $$\lim_n S_n = +\infty, \qquad S_n \sim S_{n+1},$$

posons, pour tout nombre réel $t > 0$,

(2.3) $$g(t) = \sum_{k \geq 1} a_k \exp(-tS_k).$$

Pour tout nombre réel $l > 0$, *les conditions suivantes sont équivalentes:*

(a) $\lim_n \frac{1}{S_n} \mu([1,n]) = l$.

(b) $\lim_{t \downarrow 0} t g(t) = l$.

Démonstration: Considérons sur $\mathbf{R}_+$ la mesure ν image de μ par l'application $k \mapsto S_k$, et désignons par F sa fonction de répartition.

La fonction g définie par (2.3) est la transformée de Laplace de ν. Par conséquent (voir: [3], p. 421; [5], p. 283-284; [2], p. 103, dém. du Lemme 2.18) la condition (*b*) équivaut à la condition suivante:

$$\lim_{x\to+\infty} F(x)/x = l\,.$$

Il suffit donc de vérifier que cette dernière condition équivaut à la condition (*a*). Remarquons, à cet effet, que l'on a

$$F(x) = \mu\{k : S_k < x\}\,.$$

Par conséquent, si, pour tout nombre réel positif x assez grand, on désigne par n_x l'entier déterminé par la relation

$$S_{n_x} < x < S_{n_x+1}\,,$$

on a

$$F(x) = F(S_{n_x}) = \mu([1, n_x])\,,$$

de sorte que le rapport $F(x)/x$ est compris entre $\mu([1, n_x])/S_{n_x+1}$ et $\mu([1, n_x])/S_{n_x}$.

La conclusion résulte alors du fait que l'on a $\lim\limits_{x\to+\infty} n_x = +\infty$ et $S_n \sim S_{n+1}$.

Voilà maintenant le critère annoncé au début du paragraphe:

(2.4) Théorème: *Soit* $\mu = \sum\limits_{k\geq 1} a_k \varepsilon_k$ *une mesure positive non bornée sur* $\mathbf{N}^*$, *et soit* (S_n) *une suite croissante de nombres réels strictement positifs, telle que l'on ait*

$$\mu([1, n]) \sim S_n \sim S_{n+1}\,. \tag{2.5}$$

Posons, pour tout nombre réel $t > 0$,

$$\mu_t = t \sum_{k\geq 1} a_k \exp(-tS_k)\varepsilon_k\,. \tag{2.6}$$

On a alors

$$\lim_{t\downarrow 0} \mu_t(\mathbf{N}^*) = 1\,, \qquad \lim_{t\downarrow 0} \mu_t(k) = 0 \qquad \textit{pour tout } k \geq 1\,. \tag{2.7}$$

En outre, pour toute fonction arithmétique positive f *et tout nombre réel* $l > 0$, *les conditions suivantes sont équivalentes*:

(*a*) $\lim\limits_{n} \dfrac{1}{S_n} \displaystyle\int_{[1,n]} f\,d\mu = l$

(autrement dit, f *admet* l *comme* μ*-densité).*

(*b*) $\lim\limits_{t\downarrow 0} t \sum\limits_{k\geq 1} f(k) a_k \exp(-tS_k) = l$

(autrement dit, f *admet* l *comme densité relative à la famille* $(\mu_t)_{t>0}$ *définie par* (2.6)).

DÉMONSTRATION: La première des relations (2.7), c'est-à-dire

$$\lim_{t\downarrow 0} t \sum_{k\geq 1} a_k \exp(-tS_k) = 1 ,$$

résulte de l'hypothèse (2.5), grâce au lemme précédent.

La seconde des relations (2.7) est évidente.

Enfin, pour prouver l'équivalence des conditions (*a*), (*b*), il suffit d'appliquer le lemme précédent à la mesure $f.\mu$.

(2.8) EXEMPLE: Soit $\mu = \sum_{k\geq 1} a_k \varepsilon_k$ une mesure positive non bornée sur $\mathbf{N}^*$, telle que la suite (a_k) soit bornée. Soit en outre (S_n) une suite croissante de nombres réels strictement positifs, telle que l'on ait

$$S_{n+1} - S_n \sim a_n .$$

On a alors (la suite (a_n) étant bornée) $S_{n+1} = S_n + (S_{n+1} - S_n) \sim S_n$. En outre, il résulte de (1.3) que l'on a $\mu([1, n]) \sim S_n$. Les hypothèses de (2.4) sont donc remplies, de sorte qu'on peut considérer, pour tout nombre réel $t > 0$, la mesure bornée μ_t définie par (2.6), c'est-à-dire par

$$\mu_t\{k\} = ta_k \exp(-tS_k) . \tag{2.9}$$

A côté de cette mesure, nous considérerons aussi la mesure ν_t définie par

$$\nu_t\{k\} = \exp(-tS_k) - \exp(-tS_{k+1}) . \tag{2.10}$$

Il est facile de voir que l'on a

$$\nu_t\{k\} \sim \mu_t\{k\}$$

lorsque t tend vers 0 et k vers l'infini, c'est-à-dire suivant le filtre induit sur $]0, +\infty[\times\mathbf{N}^*$ par les voisinages du point $(0, +\infty)$ dans $\overline{\mathbf{R}}^2$. En effet, suivant ce filtre, la fonction

$$(t, k) \mapsto t(S_{k+1} - S_k)$$

converge vers 0, de sorte que l'on a

$$\nu_t\{k\} = [1 - \exp(-t(S_{k+1} - S_k))] \exp(-tS_k) \sim$$
$$\sim t(S_{k+1} - S_k) \exp(-tS_k) \sim ta_k \exp(-tS_k) = \mu_t\{k\} .$$

Il résulte donc de (1.8) que, pour toute fonction arithmétique positive f et tout nombre réel $l > 0$, la condition (*b*) de (2.4) est équivalente à celle que l'on obtient en remplaçant μ_t par ν_t.

Particularisons maintenant les hypothèses précédentes, en prenant:

$$a_k = 1/k\,, \qquad s_k = \log k\,.$$

Les relations (2.9), (2.10) deviennent alors, respectivement:

$$\mu_t\{k\} = tk^{-(1+t)}\,, \qquad \nu_t\{k\} = k^{-t} - (k+1)^{-t}\,.$$

Par conséquent, la densité dont on parle dans la condition (*b*) de (2.4) devient la densité analytique. On obtient donc (pour toute fonction arithmétique positive f et tout nombre réel $l \geqslant 0$) l'équivalence des conditions suivantes:

(*a*) $\lim\limits_{n} \dfrac{1}{\log n} \sum\limits_{k=1}^{n} f(k)/k = l$.

(*b*) f admet l comme densité analytique.

(*c*) $\lim\limits_{t \downarrow 0} \sum\limits_{k \geqslant 1} f(k)[k^{-t} - (k+1)^{-t}] = l$.

On remarquera que la première de ces conditions est identique à la condition (*a*) du Corollaire (1.7): d'après ce corollaire, elle est donc équivalente (si f est bornée) au fait que l est la densité logarithmique de f.

A signaler que l'équivalence des conditions (*a*), (*b*) ci-dessus se trouve déjà (pour $l \neq 0$) dans [1] et que, dans le cas où f est l'indicatrice d'une partie de $\mathbf{N}^*$, l'équivalence des conditions (*b*), (*c*) se réduit à un critère de P. Nanopoulos (voir [4], Th. (2.9)).

3. - Comparaison entre densité analytique et densité asymptotique

Etant donnée une suite $(a_k)_{k \geqslant 1}$ de nombres réels positifs, convergente et telle que l'on ait

$$\sum_{k \geqslant 1} a_k = +\infty\,,$$

posons:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k\,, \qquad a = \lim_k a_k\,.$$

Considérons en outre les deux familles $(\mu_t)_{t>0}$, $(\nu_t)_{t>0}$ de mesures bornées sur $\mathbf{N}^*$ définies de la manière suivante:

$$\mu_t\{k\} = t a_{k+1} \exp(-t s_k)\,,$$
$$\nu_t\{k\} = \exp(-a_t)(\exp(s_{k-1}) - \exp(s_k)) \sum_{n \geqslant k} a_{n+1} \exp(-(1+t)s_n)\,.$$

(3.1) Proposition: *Dans les hypothèses précédentes, on a, lorsque le couple* (t, k) *tend vers* $(0, +\infty)$,

$$\mu_t\{k\} \sim \nu_t\{k\}\,.$$

Démonstration : Posons

$$A = \begin{cases} \dfrac{\exp(a) - 1}{a} & \text{si } a > 0 , \\ 1 & \text{si } a = 0 . \end{cases}$$

On a alors, lorsque k tend vers l'infini,

$$\exp(s_{k+1}) - \exp(s_k) = \exp(s_k)(\exp(a_{k+1}) - 1) \sim \exp(s_k) A a_{k+1} .$$

Il suffit donc de vérifier que, lorsque le couple (t, k) tend vers $(0, +\infty)$, on a

$$\exp(-t s_k) \sim \exp(-a) A \exp(s_k) \sum_{n \geq k} a_{n+1} \exp(-(1+t) s_n) ,$$

ou — ce qui revient au même —

$$\exp(-(1+t) s_k) \sim \exp(-a) A \sum_{n \geq k} a_{n+1} \exp(-(1+t) s_n) .$$

Posons $\exp(-a) A = c$, $1 + t = u$. Il s'agit alors de prouver que, lorsque le couple (u, k) tend vers $(1, +\infty)$, on a

$$\exp(-u s_k) \sim c \sum_{n \geq k} a_{n+1} \exp(-u s_n) . \tag{3.2}$$

Remarquons, à cet effet, que l'on a

$$\exp(-u s_n) - \exp(-u s_{n+1}) \sim \exp(-u s_{n+1}) A a_{n+1} =$$
$$= \exp(-u a_{n+1}) A a_{n+1} \exp(-u s_n) \sim c a_{n+1} \exp(-u s_n) .$$

Par conséquent, étant donné $\varepsilon > 0$, on peut trouver un entier p et un élément δ de $]0, 1[$, tels que, pour tout entier $n > p$ et tout élément u de $]1 - \delta, 1 + \delta[$, on ait

$$(c - \varepsilon) a_{n+1} \exp(-u s_n) < \exp(-u s_n) - \exp(-u s_{n+1}) < (c + \varepsilon) a_{n+1} \exp(-u s_n) .$$

On a alors, pour tout élément u de $]1 - \delta, 1 + \delta[$ et tout entier $k > p$,

$$(c - \varepsilon) \sum_{n \geq k} a_{n+1} \exp(-u s_n) < \exp(-u s_k) < (c + \varepsilon) \sum_{n \geq k} a_{n+1} \exp(-u s_n) ,$$

ce qui prouve la relation (3.2).

La proposition est ainsi démontrée.

Remarquons maintenant que, pour toute fonction arithmétique positive f, on a

$$\nu_t[f] = \exp(-a)\, t \sum_{k \geq 1} f(k)(\exp(s_{k+1}) - \exp(s_k)) \sum_{n \geq k} a_{n+1} \exp(-(1+t)s_n) =$$

$$= \exp(-a)\, t \sum_{n \geq 1} a_{n+1} \exp(-ts_n) \exp(-s_n) \sum_{k=1}^{n} f(k)(\exp(s_{k+1}) - \exp(s_k)),$$

c'est-à-dire

$$\nu_t[f] = \mu_t[Hf],$$

où Hf désigne la fonction arithmétique définie par

$$Hf(n) = \exp(-s_n) \sum_{k=1}^{n} f(k)(\exp(s_{k+1}) - \exp(s_k)).$$

On voit donc, en tenant compte de la proposition précédente et du théorème (1.8), que les conditions suivantes sont équivalentes:

(a) $\lim_{t \downarrow 0} \mu_t[Hf] = l$.

(b) $\lim_{t \downarrow 0} \nu_t[f] \;= l$.

(c) $\lim_{t \downarrow 0} \mu_t[f] \;= l$.

En outre, la condition (a) est évidemment remplie dans le cas où la condition suivante est satisfaite:

(d) $\lim_{n} Hf(n) = l$.

Particularisons maintenant les hypothèses précédentes, en prenant $a_1 = 0$ et $a_{k+1} = \log(1 + 1/k)$, c'èst-à-dire $s_n = \log n$. On a alors

$$Hf(n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(k),$$

$$\mu_t(k) = t \log(1 + 1/k)\, k^{-t} \sim tk^{-(1+t)}.$$

Par conséquent, la condition (c) (resp. (d)) équivaut au fait que f admet l comme densité analytique (resp. asymptotique). On retrouve ainsi le résultat bien connu, selon lequel la densité analytique est un prolongement de la densité asymptotique.

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. Diaconis, *Weak and Strong Averages in Probability and the Theory of Numbers*, Ph. D. Dissertation, Harward University, Cambridge, Mass., 1974.
[2] P.D.T.A. Elliot, *Probabilistic Number Theory - I*, Springer (1979).
[3] W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol. II, Wiley.
[4] A. Fuchs - G. Letta, *Sur le problème du premier chiffre décimal*, Boll. Un. Mat. Ital., (6), 3-B (1984), 451-461.
[5] G. H. Hardy, *Divergent Series*, Oxford (1949).