Rendiconti
Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL
Memorie di Matematica
104° (1986), Vol. X, fasc. 5, pagg. 45-51

FRANCO FAGNOLA (*) - GIORGIO LETTA (**)

Sur la représentation intégrale des martingales d'un processus de comptage (***)

Sulla rappresentazione integrale delle martingale di un processo di conteggio

Sunto. — Si dà una nuova dimostrazione del teorema che permette di rappresentare sotto forma di integrale stocastico ogni martingala locale relativa alla filtrazione naturale di un processo di conteggio. Questa dimostrazione fa uso soltanto di semplici argomenti di teoria « generale » dei processi.

Introduction

Il est bien connu qu'étant donné un processus de Poisson (N_t), toute martingale locale, relative au « grossissement habituel » de la filtration naturelle de (N_t), peut être représentée sous forme d'intégrale stochastique d'un processus prévisible, par rapport au processus compensé $(N_t - pt)$.

C. S. Chou et P. A. Meyer ([1], [2]) ont étendu ce résultat au cas d'un processus de comptage quelconque, par des raisonnements portant sur les lois des instants de saut.

Un théorème analogue, concernant des processus ponctuels marqués, a été ensuite obtenu par J. Jacod [6], à l'aide du théorème de Girsanov.

Dans le présent article, nous proposons une nouvelle démonstration du théorème de Chou et Meyer, ne faisant appel qu'à des arguments élémentaires de théorie « générale » des processus.

1. - Hypothèses, notations, rappels

Le langage, les notations et les conventions sont les mêmes que dans [7]. En particulier, les martingales locales sont, par définition, *nulles en* 0.

(*) Scuola Normale Superiore, Piazza dei Cavalieri - I 56100 Pisa.
(**) Dipartimento di Matematica, Via Buonarroti, 2 - I 56100 Pisa.
(***) Memoria presentata il 14 giugno 1985 da Giorgio Letta, socio dell'Accademia.

ISSN-0392-4106

On se place sur un espace probabilisé (Ω, A, P). Etant donnée une suite croissante $(T_n)_{n\geq 0}$ de variables aléatoires positives, à graphes disjoints, avec $T_0 = 0$, $\sup_n T_n = +\infty$, on considère le *processus de comptage* N défini par

$$N = \sum_{n\geq 1} I_{[T_n, \infty[},$$

et l'on désigne par $\mathcal{F}^0 = (\mathcal{F}_t^0)$ la *filtration naturelle* de N: pour tout t, $\mathcal{F}_t^0$ est la tribu engendrée par les N_s avec $s < t$. On sait que $\mathcal{F}^0$ est continue à droite et qu'elle est la moins fine parmi toutes les filtrations qui rendent chacune des variables aléatoires T_n un temps d'arrêt. On désigne par $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)$ le *grossissement habituel* de $\mathcal{F}^0$, c'est-à-dire la filtration (continue à droite) définie de la façon suivante: pour tout t, $\mathcal{F}_t$ est la tribu constituée par les éléments de A qui sont équivalents (pour la loi P) à un élément de $\mathcal{F}_t^0$. Dans la suite, toutes les notions faisant intervenir une filtration seront à entendre (sauf mention expresse du contraire) comme relatives à la filtration $\mathcal{F}$.

Les propositions suivantes sont immédiates:

(1.1) *Tout temps d'arrêt est presque sûrement égal à un temps d'arrêt de la filtration $\mathcal{F}^0$.*

(1.2) *Tout temps d'arrêt qui coïncide presque sûrement avec un temps d'arrêt prévisible est prévisible.*

Nous aurons besoin aussi des résultats suivants:

(1.3) *Pour tout entier $n \geq 1$, la tribu progressive et la tribu prévisible ont même trace sur le graphe de T_n.*

(Voir [5], (1.3), ou bien [4], Proposition 1, c).)

(1.4) *Soit S un temps d'arrêt, avec $[\![S]\!] \subset]\!]T_{n-1}, T_n[\![$. Il existe alors un temps d'arrêt S', prévisible, tel que l'on ait*

$$[\![S]\!] = [\![S']\!] \cap]\!]T_{n-1}, T_n[\![.$$

Démonstration: Grâce à (1.1), (1.2), on peut supposer que S est un temps d'arrêt de la filtration $\mathcal{F}^0$. On voit alors, en raisonnant comme dans la démonstration du Lemme (11.20) de [7], qu'il existe une fonction positive S', mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{F}^0_{T_{n-1}}$, telle que l'on ait:

$$S' = S \text{ sur } \{S < \infty\}, \qquad S' > T_n \text{ ailleurs}.$$

La fonction S' répond à la question: elle est en effet un temps d'arrêt annonçable de la filtration $\mathcal{F}^0$ (voir [3], chap. IV, N. 72, pag. 205).

Le processus N est croissant et localement borné. Il existe donc un processus L, croissant, localement intégrable et prévisible (unique, à indistinguabilité près) qui soit un *compensateur local* pour N, c'est-à-dire tel que la différence

$$X = N - L$$

soit une martingale locale. Cette dernière propriété de L peut s'exprimer, de façon équivalente, en disant que la mesure associée à L coïncide, sur la tribu prévisible, avec la mesure associée à N (voir [7], (35.13)). La proposition suivante montre, entre autres, que L vérifie (hors d'un ensemble évanescent) la relation $\Delta L \leq 1$.

(1.5) *Pour tout entier $n \geq 1$, on a (à un ensemble évanescent près)*

$$]T_{n-1}, T_n] \cap \{\Delta L \geq 1\} = [T_n] \cap \{\Delta L = 1\} .$$

Démonstration. L'ensemble prévisible qui figure au premier membre est une réunion dénombrable de graphes de temps d'arrêt prévisibles. Soit S un de ces temps d'arrêt. Puisque les mesures associées aux processus croissants L, N prennent la même valeur sur le graphe de S on a

$$E[\Delta_S L] = P\{S = T_n < \infty\} .$$

Autrement dit, la fonction positive $\Delta_S L - I_{\{S = T_n < \infty\}}$ est négligeable. On a donc $\Delta_S L = I_{\{S = T_n < \infty\}}$ presque sûrement, ce qui revient à dire que le graphe de S est contenu (à un ensemble évanescent près) dans le second membre de la relation à démontrer.

2. - Résultats préliminaires

Dans ce paragraphe on suppose que Y est une martingale (à trajectoires continues à droite et pourvues de limites à gauche), *dominée dans L^1*, c'est-à-dire telle que la variable aléatoire

$$Y^*_\infty = \sup_t |Y_t|$$

soit intégrable. On suppose en outre que Y vérifie, pour un certain entier $n \geq 1$, la relation

$$Y^*_\infty = Y^{|T_n} - Y^{|T_{n-1}} \tag{2.1}$$

(où $Y^{|T_n}$ désigne le processus Y arrêté à T_n).

(2.2) Lemme. *Dans les hypothèses précédentes, fixons un couple s, t de nombres réels positifs, avec $s < t$, et posons*

$$A = \{s < T_{n-1} \leq t\} , \qquad B = \{s < T_n \leq t\} .$$

On a alors

$$E[|Y_t - Y_s|] < 4\int_{A \cup B} Y_\infty^* \, dP .$$

Démonstration. Le complémentaire de $A \cup B$ est égal à la réunion des trois ensemble suivants:

$$C = \{t < T_{n-1}\}, \qquad D = \{T_n < s\}, \qquad E = \{T_{n-1} < s < t < T_n\} .$$

Sur $C \cup D$ on a $Y_s = Y_t$ (à cause de l'hypothèse (2.1)). Sur E la tribu $\mathcal{F}_t$ admet même trace que $\mathcal{F}_s$. (Il suffit en effet de remarquer que la tribu $\mathcal{F}_t^0$, qui est engendrée par les N_r avec $r < t$, admet sur E même trace que $\mathcal{F}_t^0$, car chacune des variables aléatoires N_r avec $s < r < t$ coïncide, sur E, avec N_s). Posons

$$U = I_{\{Y_s < Y_t\}} - I_{\{Y_s > Y_t\}} ,$$

et désignons par U' une variable aléatoire $\mathcal{F}_s$-mesurable, à valeurs dans $\{-1, 1\}$, qui coïncide avec U sur E. On peut alors écrire

$$|Y_t - Y_s| = U(Y_t - Y_s) = (U - U')(Y_t - Y_s) + U'(Y_t - Y_s) .$$

Remarquons, en outre, que le terme $(U - U')(Y_t - Y_s)$ est nul sur $C \cup D \cup E$ et que le terme $U'(Y_t - Y_s)$ a une espérance nulle (Y étant une martingale). Il en résulte

$$E[|Y_t - Y_s|] = \int_{A \cup B} (U - U')(Y_t - Y_s) \, dP < 2\int_{A \cup B} |Y_t - Y_s| \, dP < 4\int_{A \cup B} Y_\infty^* \, dP .$$

(2.3) Lemme: *Dans les hypothèses précédentes, on a les conclusions suivantes:*

(*a*) *La martingale Y est indistinguable d'un processus à variation intégrable.*

(*b*) *Pour que Y soit évanescente, (il faut et) il suffit que l'on ait presque sûrement $\Delta_{T_n} Y = 0$.*

(*c*) *La relation $\Delta_{T_n} Y = 0$ est, en tout cas, presque sûrement vérifiée sur l'ensemble $\{\Delta_{T_n} X = 0\}$.*

Démonstration. (*a*) Etant donnée une famille (J_k) d'intervalles disjoints, de la forme $J_k =]s_k, t_k]$ (avec $0 < s_k < t_k < \infty$), posons

$$A_k = \{s_k < T_{n-1} < t_k\}, \quad B_k = \{t_k < T_n < t_k\}, \qquad A = \bigcup_k A_k , \; B = \bigcup_k B_k .$$

On a alors, en vertu du lemme précédent,

$$E\Big[\sum_k |Y_{t_k} - Y_{s_k}|\Big] < 4\sum_k \int_{A_k} Y_\infty^* \, dP + 4\sum_k \int_{B_k} Y_\infty^* \, dP = 4\int_A Y_\infty^* \, dP + 4\int_B Y_\infty^* \, dP .$$

Si, pour un entier m donné, on applique ce résultat à la suite $(J_k)_{k\geq 1}$ définie par $J_k =](k-1)2^{-m}, k2^{-m}]$ (et l'on fait tendre ensuite m vers l'infini), on trouve:

$$E\Big[\sup_m \sum_{k\geq 1} |Y_{k2^{-m}} - Y_{(k-1)2^{-m}}|\Big] < 8E[Y^*_\infty] < +\infty .$$

Ceci prouve l'assertion (*a*).

(*b*) Supposons maintenant que l'on ait $\Delta_{T_n} Y = 0$, et montrons que la martingale Y est évanescente. Il suffit pour cela, d'après (*a*), de montrer que presque toutes les trajectoires de Y sont continues (voir [7], (23.5)), c'est-à-dire que les deux ensembles $\{\Delta Y > 0\}$, $\{\Delta Y < 0\}$ sont évanescents. Or, chacun de ces ensembles est contenu dans $]T_{n-1}, T_n[$ et est une réunion dénombrable de graphes de temps d'arrêt. Si S est un de ces temps d'arrêt, on a, en vertu de (1.4), $E[\Delta_S Y] = 0$, et par conséquent $P\{S < \infty\} = 0$, d'où la conclusion.

(*c*) Démontrons enfin l'assertion (*c*). Remarquons, à cet effet, que l'ensemble

$$[T_n] \cap \{\Delta X = 0\} = [T_n] \cap \{\Delta L = 1\} \tag{2.4}$$

est prévisible, en vertu de (1.5) (car il coïncide, à un ensemble évanescent près, avec l'ensemble prévisible $]T_{n-1}, T_n] \cap \{\Delta L > 1\}$). Par conséquent (voir (1.3)) toute partie progressive de l'ensemble (2.4) est un graphe de temps de arrêt prévisible. Ceci s'applique en particulier aux deux ensembles

$$[T_n] \cap \{\Delta X = 0\} \cap \{\Delta Y > 0\}, \qquad [T_n] \cap \{\Delta X = 0\} \cap \{\Delta Y < 0\} .$$

Il en résulte que chacun de ces ensembles est évanescent, ce qui prouve l'assertion (*c*).

3. - Le théorème de représentation

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème de représentation:

(3.1) Théorème: *Dans les hypothèses du § 1, soit Y une martingale locale. Il existe alors un processus prévisible H, tel que l'intégrale stochastique de Stieltjes $H \cdot X$ soit définie et indistinguable de Y.*

Démonstration. Puisque le processus croissant Y^* (défini par $Y^*_t = \sup_{0\leq s\leq t} |Y_s|$) est localement intégrable (voir [7], (34.2) et (35.2)), on peut tout d'abord se ramener, par arrêt, au cas où Y est une martingale dominée dans L^1. En outre, il est clair qu'il suffit de démontrer que, pour tout $n > 1$, le processus

$$Y^{|T_n} - Y^{|T_{n-1}}$$

peut se mettre sous la forme $H^n \cdot X$ (avec H^n prévisible et nul hors de $]T_{n-1}, T_n]$), car alors on aura $Y = H \cdot X$, avec $H = \sum_n H^n$.

En d'autres termes, on peut se placer dans les hypothèses du paragraphe précédent.

Il résulte de (1.3) qu'il existe un processus prévisible H, nul hors de $]T_{n-1}, T_n]$, tel que l'on ait $Y = H \Delta X$ sur $[T_n] \cap \{\Delta X \neq 0\}$, c'est-à-dire tel que la relation

$$\Delta_{T_n} Y = H_{T_n} \Delta_{T_n} X$$

ait lieu sur l'ensemble

$$\{T_n < \infty\} \cap \{\Delta_{T_n} X \neq 0\}.$$

Cette relation aura alors lieu presque sûrement sur l'ensemble $\{T_n < \infty\}$, en vertu de (2.3) (c).

Montrons maintenant que l'integrale stochastique de Stieltjes

$$H \cdot X = H \cdot (X^{|T_n} - X^{|T_{n-1}}).$$

est bien définie. Désignons, à cet effet, par μ la mesure associée au processus (à variation intégrable)

$$X^{|T_n} - X^{|T_{n-1}}$$

Puisque ce processus est une martingale, la mesure μ est nulle sur la tribu prévisible: autrement dit, les deux mesures μ^+, μ^- coïncident sur la tribu prévisible. Il est clair, d'autre part, que la mesure μ est portée par $]T_{n-1}, T_n]$ et que, sur toute partie mesurable de $]T_{n-1}, T_n[$, elle est négative (car elle coïncide avec l'opposée de la mesure associée au processus croissant L). En outre, la mesure μ est positive sur toute partie mesurable du graphe de T_n, car sur ce graphe on a (hors d'un ensemble évanescent) $\Delta X = 1 - \Delta L > 0$ (voir (1.5)). On a donc

$$\int |H| \, d\mu^- = \int |H| \, d\mu^+ = \int_{[T_n]} |H| \, d\mu = \int_{\{T_n < \infty\}} |H_{T_n}| \Delta_{T_n} X \, dP = E[|\Delta_{T_n} Y|] < +\infty .$$

Il en résulte que, pour presque tout ω, la trajectoire $H(\cdot, \omega)$ est intégrable, sur $]0, \infty[$, par rapport à la mesure de Radon qui admet $X(\cdot, \omega)$ comme fonction de répartition. Quitte à modifier H sur un ensemble (prévisible) évanescent, on pourra supposer que la propriété précédente ait lieu pour tout ω. L'intégrale stochastique de Stieltjes $H \cdot X$ est alors bien définie. En outre, $H \cdot X$ est une martingale (à variation intégrable). Par conséquent, la différence $Y - H \cdot X$ est elle aussi une martingale. Si on lui applique l'assertion (b) du Lemme (2.3), on trouve que cette différence est évanescente, c'est-à-dire que Y est indistinguable de $H \cdot X$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] C. S. Chou - P. A. Meyer, *La représentation des martingales comme intégrales stochastiques dans les processus ponctuels*, CRAS Paris, 278 (1974), p. 1561-1563.

[2] C.S. Chou - P.A. Meyer, *Sur la représentation des martingales comme intégrales stochastiques dans les processus ponctuels*, Sém. Prob., IX (1975), Springer LN n. 465, p. 226-236.

[3] C. Dellacherie - P. A. Meyer, *Probabilités et potentiel*, Chap. I-IV, Hermann (1975).

[4] M. Emery, *Annonçabilité des temps prévisibles: deux contre-exemples*, Sém. Prob. XIV, Springer LN n. 784 (1980), p. 318-323.

[5] F. Fagnola - G. Letta, *Sur la représentation prévisible des martingales du processus de Poisson*, Pubblic. Dip. Mat. Pisa, N. 109 (1985).

[6] J. Jacod, *Multivariate point processes: predictable projection, Radon-Nikodym derivatives, representation of martingales*, ZW 31 (1975), p. 235-253.

[7] G. Letta, *Martingales et intégration stochastique*, Pisa, Scuola Normale Superiore, Quaderni, 1984.