Rendiconti
Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL
Memorie di Matematica
104° (1986), Vol. X, fasc. 24, pagg. 255-259

GIULIANO BRATTI (*)

Estensione di un teorema di Fichera relativo al fenomeno di Hartogs per sistemi differenziali a coefficienti costanti (**)

Extension of a Fichera's Theorem, for systems of P.D.E. with constant coefficients, relative to the Hartogs' phenomenon

SUMMARY. — I give the extension of the Theorem 3 of [2], there proved for system $P(D) = \| p_{i,1}(D) \|$, $i \geq 2$, for every kind of system of P.D.E. with constant coefficients.

0. Gaetano Fichera ha dimostrato in [2] il seguente teorema:

Se $P(D) = \| p_{i,1}(D) \|$, $i \geq 2$, è un sistema differenziale di operatori lineari alle derivate parziali ed a coefficienti costanti, $P(D)$ verifica il fenomeno di Hartogs $H(G)$ (¹) se e soltanto se: i polinomi $p_{i,1}$ son primi tra di loro ed inoltre è soddisfatta una certa condizione (²) sulla propagazione degli zeri delle soluzioni del sistema omogeneo $P(D)U = 0$.

In questa Nota mi propongo di estendere quel teorema al caso di sistemi differenziali $P(D) = \| p_{i,j}(D) \|$, $1 \leq i \leq t$ e $1 \leq j \leq s$, qualsiasi. A questo scopo farò uso dei risultati di algebra omologica del Cap. VIII di [3], e di un teorema sulla propagazione delle analiticità delle soluzioni delle equazioni alle derivate parziali di J. Boman [1].

1. Sia $P(D)$ un sistema differenziale di operatori lineari alle derivate parziali ed a coefficienti costanti:

$$P(D) = \| p_{i,j}(D) \|, \qquad 1 \leq i \leq t \text{ e } 1 \leq j \leq s.$$

(*) Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico dell'Università, Via Belzoni 7, I-35131 Padova.
(**) Nota presentata il 21 maggio 1986 da Giuseppe Scorza Dragoni, uno dei XL.
(¹) Per le definizioni si veda il successivo paragrafo 1.
(²) Per ulteriori chiarimenti si veda l'ipotesi *J*) del Teorema 1 di questa Nota.

ISSN-0392-4106

Se A è un aperto di R^n, indicherò con $H(G)$ una qualsiasi famiglia di compatti di A, che invada A e tale che $A \sim G$ sia connesso, per ogni G in $H(G)$. Per ogni G in $H(G)$ si pone

$$C_P^\infty(A \sim G) = \{f \text{ in } C^\infty(A \sim G)^s \colon P(D)f = 0\}$$

e

$$C_P^\infty(A) = \{F \text{ in } C^\infty(A)^s \colon P(D)\,F = 0\}.$$

Definizione 1. *Se f sia in $C_P^\infty(A \sim G)$, ogni F in $C_P^\infty(A)$ tale che la sua restrizione su $A \sim G$, cioè la $F|_{(A \sim G)}$, coincide con f si dice una P-estensione di f.*

Definizione 2. *Il sistema differenziale $P(D)$ verifica il fenomeno di Hartogs $H(G)$ se per ogni G in $H(G)$ ogni f in $C_P^\infty(A \sim G)$ ammette una sola P-estensione.*

Lemma 1. *Le seguenti proposizioni,* p_1) *e* p_2), *si equivalgono:*

p_1) *ogni f in $C_P^\infty(A \sim G)$ che ammetta P-estensioni ammette una sola P-estensione;*

p_2) *il sistema differenziale $P(D)$ è determinato* (²).

Dimostrazione. p_1) *implica* p_2): posto che $\mathcal{Q}^s$ ($\mathcal{Q}^t$) sia l'algebra complessa delle s-uple (t-uple) di polinomi in n indeterminante, e che $P\colon \mathcal{Q}^s \to \mathcal{Q}^t$ agisca così

$$P(q_1, q_2, \dots, q_s) = \sum_i p_{i,j} q_i$$

$1 \le i \le t$, allora se $P(D)$ non fosse determinato esisterebbe $(q_1, q_2, \dots, q_s) \neq$ $\neq (0, 0, \dots, 0)$ in $\operatorname{Ker}(P)$; e dunque, scelta comunque la w in $C_c^\infty(A)$, con $\operatorname{supp}(w) \subset G$ e G in $H(G)$, lo zero di $C_P^\infty(A \sim G)$ ammetterebbe come P-estensione anche la

$$F = (q_1(D)w, q_2(D)w, \dots, q_s(D)w).$$

p_2) *implica* p_1): se $P(D)$ è determinato, e se la f in $C_P^\infty(A \sim G)$ ammettesse due distinte P-estensioni, la F_1 e la F_2, allora la differenza $(F_1 - F_2)$, che sta in $C_c^\infty(A)^s$, sarebbe una soluzione con supporto compatto del sistema omogeneo $P(D)(F_1 - F_2) = 0$; assurdo in base alla Proposizione 1 di [3], pag. 387.
La dimostrazione è conclusa.

Il Lemma 1 mostra che lo studio dei sistemi differenziali $P(D)$ che verificano il fenomeno di Hartogs $H(G)$ è ben ambientato solo nel caso dei sistemi differenziali che sono determinati. Per questi sistemi è immediato controllare che deve esser $t \ge s$, e si può supporre subito che sia $t > s$ in virtù dell'ipo-

(²) Seguendo [4], pag. 387, si dice che il sistema differenziale $P(D)$ è determinato se

$$\operatorname{Hom}(M, \mathcal{Q}) \simeq \operatorname{Ker}(P) = 0,$$

dove $M = \mathcal{Q}^s / P^t \mathcal{Q}^t$, e P^t è la trasposta di P.

tesi I_2) di [2], pag. 202: infatti, il verificarsi d'un fenomeno di Hartogs $H(G)$ per un sistema differenziale quadrato, $t = s$, implicherebbe, in base a quella ipotesi, che l'applicazione lineare

$$P(D) \colon C_c^\infty(A)^s \to C_c^\infty(A)^s$$

è suriettiva, il che sarebbe assurdo.

LEMMA 2. *Se il sistema differenziale $P(D)$ verifica il fenomeno di Hartogs $H(G)$, allora verifica anche il fenomeno di Hartogs $H^*(G) = H(G) \cup \{p\}$, per ogni punto p di A.*

DIMOSTRAZIONE. Sia w in $C_P^\infty(A \sim \{p\})$ e sia G in $H(G)$ che contiene p; poichè $C_P^\infty(A \sim \{p\}) \subset C_P^\infty(A \sim G)$ in virtù dell'ipotesi esiste una P-estensione, la W, di w: $W|_{(A\sim G)} = w$. La funzione $u = W - w$, che sta in $C_P^\infty(A \sim \{p\})$, è nulla in $A \sim G$; se q è un punto di G, con $q_n > p_n$, posto

$$\text{(1)} \qquad A' = \{x \text{ in } A \sim \{p\} : x_n > q_n\} \quad \text{e} \quad F = G \cap \{x \text{ in } R^n : x_n \geq q_n\}$$

si ha:

i) F è un compatto di $A \sim \{p\}$;

ii) u è nulla in $A' \sim F$ e $P(D)u = 0$ in A'.

In virtù del Teorema 2 di [1], pag. 271, u risulta analitica su tutto A' e dunque è ivi nulla.

Ripetendo il ragionamento precedente con q tale che $q_n < p_n$ e le diseguaglianze di (1) invertite si prova che

$$u|_{(A\sim\{p\})} = 0, \quad \text{cioè} \quad W|_{(A\sim\{p\})} = w.$$

Poichè $P(D)$ verifica un fenomeno di Hartogs, in virtù del precedente lemma $P(D)$ è determinato sicchè la W è l'unica estensione della w.

La dimostrazione è conclusa.

I Lemmi 1 e 2, insieme al Teorema 1 di [3], pag. 389, porgono la seguente estensione del Teorema 3 di [2], pag. 206:

TEOREMA 1. *Le seguenti proposizioni, p_1) e p_2) si equivalgono:*

p_1) *il sistema differenziale $P(D)$ verifica il fenomeno di Hartogs $H(G)$;*

p_2) *il sistema differenziale $P(D)$ è sovradeterminato* (4) *e $P(D)$ verifica l'ipotesi J):*

J) *se G sta in $H(G)$ e $G \subset B_\varrho = \{x \text{ in } R^n : |x| < \varrho\}$; e se f sta in $C_P^\infty(R^n \sim G)$ e $f|_{(R^n\sim B_\varrho)} = 0$, anche $f|_{(R^n\sim G)} = 0$.*

(4) Il sistema differenziale $P(D)$ è sovradeterminato, se $\mathrm{Hom}(M, Q) = \mathrm{Ext}^1(M, Q) = 0$. Nel caso che $P(D)$ sia una matrice colonna si ha $\mathrm{Ext}^1(M, Q) \simeq Q/\Delta Q$, dove Δ è il massimo comun divisore degli elementi di $P(D)$.

Osservazione 1. L'ipotesi J) di p_2) è l'ipotesi I_5) di [2], pag. 206. I sistemi differenziali $P(D) = \|p_{i,j}(D)\|$ considerati nel Teorema 3 di [2] sono sovradeterminati, in virtù dell'ipotesi I_6) di [2] e della Proposizione 3 di [3], pag. 386.

Dimostrazione del Teorema 1. p_1) *implica* p_2): il Lemma 1 prova che $P(D)$ è determinato, cioè che $\mathrm{Hom}\,(M, \mathcal{Q}) = 0$. Il Lemma 2 prova che $P(D)$ verifica il fenomeno di Hartogs $H^{*}(G) = H(G) \cup \{p\}$, con p in A; dunque, in virtù del Teorema 1 di [3], nell'isomorfismo B del quale si pone $K = \{p\}$, risulta $\mathrm{Ext}^1\,(M, \mathcal{Q}) = 0$, vale a dire che $P(D)$ è un sistema differenziale sovradeterminato.

La dimostrazione che $P(D)$ soddisfa anche all'ipotesi J) è sinottica alla dimostrazione della necessità dell'ipotesi I_5) nel Teorema 3 di [2].

p_2) *implica* p_1): è facile controllare che l'ipotesi J) implica da sola l'ipotesi I_1) del Teorema 1 di [2]. Basta quindi far vedere che vale anche l'ipotesi I_2) di quel teorema, e la dimostrazione sarà conclusa.

Siano dunque $(w_1, w_2, \ldots, w_t)$ in $C_c^{\infty}(A)^t$ e $(f_1, f_2, \ldots, f_s)$ in $C^{\infty}(A)^s$ tali che

$$\sum_j p_{i,j}(D) f_j = w_i$$

$i \leq i \leq t$. Ciò implica che $(w_1, w_2, \ldots, w_t)$ è compatibile per il sistema differenziale $P(D)$, e quindi, visto che R^n è convesso, in virtù del Teorema 3 di [3], pag. 305 si può supporre che le f_j, $i \leq j \leq s$, sian definite su tutto R^n.

Ora, ammesso che $\bigcup_i \mathrm{supp}\,(w_i) \subset G$, con G in $H(G)$, sia $\mathcal{K}$ la copertura convessa e compatta di G, ovvio che

$$F = (f_1, f_2, \ldots, f_s)$$

stia in $C_P^{\infty}(R^n \sim \mathcal{K})$; visto che $P(D)$ è sovradeterminato, in virtù del Corollario 3 di [3], pag. 394, esiste una distribuzione $U = (u_1, u_2, \ldots, u_s)$ su R^n che soddisfa il sistema omogeneo $P(D)U = 0$ e tale che $U|(R^n \sim \mathcal{K}) = F$. Risulta

$$P(D)(F - U) = W$$

con $W = (w_1, w_2, \ldots, w_t)$. Il fatto poi che la distribuzione $(F - U)$ abbia supporto compatto, così come la W, implica che $(F - U)$ sta in $C_c^{\infty}(R^n)^s$; infatti, poichè $P(D)$ è sovradeterminato, un suo minore d'ordine massimo ha certamente determinante non nullo; se questo minore è il $\mathcal{Q}(D) = \|p_{i,j}(D)\|$, con $1 \leq i \leq s$ e $1 \leq j \leq s$, si ha

$$\det\,(\mathcal{Q}(D))(f_j - u_j) = \begin{vmatrix} p_{1,1}(D), \ldots, w_1, \ldots, p_{1,s}(D) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ p_{s,1}(D), \ldots, w_s, \ldots, p_{s,s}(D) \end{vmatrix} \tag{1}$$

con le w_i nella j-esima colonna; dunque, se si indica con V il secondo membro di (1), si ha: $(f_j - u_j) = V * E$, con $\det\,(\mathcal{Q}(D))\, E = \delta$. Per concludere basta verificare che il supporto di $(f_i - u_i)$ è contenuto in A; ciò dipende dall'ipotesi J): infatti $(F - U)$ sta in $C_F^\infty(A \sim G)$ e $\operatorname{supp}(F - U)$ è contenuto in qualche B_ϱ, se ϱ è abbastanza grande.

La dimostrazione è conclusa.

BIBLIOGRAFIA

[1] J. Boman, *On the propagation of analiticity of solutions of differential equations with constant coefficients*, Ark För Mat., Band 5, n. 17 (1963).

[2] G. Fichera, *Sul fenomeno di Hartogs per gli operatori lineari alle derivate parziali*, Rendiconti Ist. Lomb. Sc. A, 117 (1983).

[3] V. P. Palamodov, *Linear differential operators with constant coefficients*, Springer-Verlag, 1970.