



Rendiconti
Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL
Memoria di Matematica
102^a (1984), Vol. VIII, fasc. 12, pagg. 261-274

GINO ARRIGHI (*)

Sulla matematica attorno all'anno Mille (**)

Ueber die Mathematik der Jahrtausendwende

ZUSAMMENFASSUNG. — Als Beitrag zur Geschichte der Mathematik, im besonderen der Arithmetik, der Jahrtausendwende, werden hier zwei unedirierte Arbeiten erläutert und zum Teil veröffentlicht. Es handelt sich um eine im Kod. 250 (10. Jahrhundert) der Burgbibliothek von Bam enthaltenen *Glossa zum Calade* von *Victorius* (5. Jahrhundert) und um einen im Kod. Vat. Lat. 544 (11. Jahrhundert) der Apostolischen Vatikanischen Bibliothek befindlichen *Abax*. Diese zwei gemäss ihrem Zeitalter von extremer Seltenheit unedirierte Abhandlungen, ergänzen sich, in ihrem Inhalt, gegenseitig.

INTRODUZIONE

I due trattati inediti che qui illustro e trascivo per quanto necessita costituiscono una importante testimonianza sulla cultura attorno all'anno Mille su quella parte della matematica già detta aritmetica pratica, *η λογιστική* dei Greci.

La estrema rarità di testi di tal sorta li rende particolarmente pregiati, inoltre essi hanno la peculiarità di essere pressochè complementari nel senso che presentano argomenti diversi; c'è poi da tener conto che le loro stesure possono distare nel tempo di circa cinquanta anni.

Segnalo la perdurante presenza di lunghe tabelle di « conti fatti », prospetti di misure coi reciproci rapporti quasi precursori delle « pratiche di mercatura », dispositivi e norme per la esecuzione delle operazioni che avevano allora svolgimento quanto mai complesso.

A proposito di queste difficoltà ricordo che nell'*Algorismus*, posto ai ff. 159v-166v del Cod. Sal. IX 23 (sec. XIII) della Universitäts Bibliothek di Heidelberg, dopo le regole di addizione e sottrazione si legge: « Multiplicatio

(*) Indirizzo dell'A.: Via Lanardi 2, Lucca.

(**) Memoria presentata il 15 maggio 1984 da Giuseppe Scors Dragoni, uno dei XL.

quanto praecedentibus utilior tanto et difficilior » e il giudizio si fa poi ancor più carico così « Divisio plane difficilis et laboriosa, sed utilis, sed fructuosa, sed jocunda ». Sono ancor da venire il multiplicar col « quadrilaterum in forma scacherii » che precede quello « per heriquocolo » donde poi l'attuale e così non è noto il « partir per galera » che si protrarrà a lungo prima di aversi il dispositivo oggi in uso e che fu detto « a danda ». Circa la divisione è opportuno quel « plane »; ma dubito alquanto che, nell'effettuaria, la « iucunditas » si impadronisse dei monaci dell'abbazia cistercense di Salem donde proviene quel codice ora in Heidelberg.

I. - *Giunta* AL *Calculus* DI VICTORIUS.

Cod. 250 (sec. X) della Burgerbibliothek di Berna.

Il *Calculus* di Victorius, edito da Gottfried Friedlein (¹), si apre con una breve « praefatio » cui seguono 49 tabelle coi prodotti per 2, 3, ..., 50 dei numeri (?): 1000, 900, ..., 100, 90, 80, ..., 10, 9, 8, ..., 1, (iabus), (discas), (dodras), (bisse), (septus), (semis), (quincus), (treas), (quares), (sextas), (se-scunsa), (uncia), (semuncia), (duaesesciae), (sicilicus), (sesclae), (dimidiasesclae).

Questa ed altre imprese procurarono all'autore giudizi di tal sorta (²): « Victorius, gente Aquitanus, domo Lemovicensis, calculi mathematicis perquam excitatum, claruit anno 457 », « calculator studiosissimus », « calculator scrupulosus ».

Friedlein dice che in vari codici « sunt additae tabulae, quas vel noni vel decimi saeculi calculatores finxerunt », la scrittura che ha inizio a f. 7r del Cod. 250 (sec. X) della Burgerbibliothek di Berna costituisce una addizione all'opera di Victorius; ma è di particolare importanza giacchè, oltre alle tavole, contiene anche del testo.

A f. 1r di questo codice si trova una « mensa Pythagorea » intitolata a Gerbertus di Aurillac che fu papa col nome di Silvestro II, subito dopo ha inizio l'opera di Victorius con la « praefatio » a f. 1v e le tavole ai ff. 2r-6r; a ciò segue la *Giunta* che passo in esame.

A f. 7r, con

viii et viii xviii,

hanno inizio le tavole di addizione: 9 + 9, 9 + 8, ..., 9 + 1; 8 + 8, 8 + 7, ...

(¹) VICTORIUS, *Calculus ex Codice Vaticano editus a Godofredo Friedlein*, in « Bulletin de Bibliografia e di Storia delle Scienze Matematiche e Fisiche », t. IV (1871), p. 443.

(²) I numeri interi sono scritti alla romana, i simboli delle « minime », qui sostituiti coi nomi racchiusi in parentesi, stanno per i rapporti con l'asse o la linea. Avverto ancora che una rotazione del tipo (semis) (uncia) sta per (semitis) + (uncia) cioè $\frac{1}{2} + \frac{1}{12}$.

(³) MICHELLE CHASLUS, *Recherches des traces anciennes de l'Algebre. Calcul de Victorius et Commentaire d'Albin*, in « Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences », t. LXIV (1867), p. 1059, vol. nota 1 a p. 1061.

..., 8 + 1, 7 + 7, 7 + 6, ..., 7 + 1; 6 + 6, 6 + 5, ..., 5 + 5, 5 + 4, ..., 5 + 1; 4 + 4, 4 + 3, ..., 4 + 1; 3 + 3, 3 + 2, 3 + 1; 2 + 2, 2 + 1; 1 + 1; e (semis) (semis), (septus)(quincus), ..., (iabus) (uncia) che tutte danno 1.

Seguono i multipli dell'uncia secondo 1, 2, ..., 12.

Con

De ī t c R dcccc

hanno inizio le tavole di sottrazione: 1000 — 100, 1000 — 200, ..., 1000 — 900; 100 — 10, 100 — 20, ..., 100 — 90; 10 — 1, 10 — 2, ..., 10 — 9; poi, e fino a f. 7v, troviamo le differenze da 1 di: (semuncia), (uncia), (sesuncia), (sextas), (quaras), (quaras) (semuncia), (treas), (treas) (semuncia), (quincus), (quincus) (semuncia), (semis), (semis) (semuncia), (septus), (septus) (semuncia), (bisse), (bisse) (semuncia), (dodras), (dodras) (semuncia), (distas), (distas) (semuncia), (iabus), (iabus) (semuncia). Seguono le differenze dall'uncia di: (dimidiasclae), (sesclae), (sicilicus), (duasesclae), (semuncia), (sicilicus) (duasesclae), (semuncia) (sesclae), (semuncia) (sicilicus), (semuncia) (duasesclae), (semuncia) (sicilicus) (sesclae).

Si hanno poi le tavole di addizione dei primi nove multipli di 100 fra loro e dei primi nove multipli di 10 pure fra loro; seguono, e fino a f. 8r, le addizioni fra loro dei multipli dell'uncia minori dell'asse ed ancora: (sesuncia) (sesuncia), (sesuncia) (asse), (sesuncia) (semuncia), (uncia) (semuncia), (semuncia) (semuncia).

Segue una tabella che dà l'equivalente in (scripuli) di tutte le « minutiae » e somme di « minutiae » fin qui incontrate e, con

i in se i,

comincia la tavola dei quadrati dei numeri interi da 1 a 50, che ha termine a f. 8v, e dei numeri misti nella forma

$n + (quaras)$ $n + (semis)$ $n + (dodras)$ con $n = 1, 2, \dots, 13$.

In riferimento a quest'ultima parte si legge:

« Totus prior numerus et eius quarta pars in secundo tramite invenitur, secundo totus prior numerus et duae quartae partes eius in secundo tramite invenitur, tertio totus prior numerus et ter quarta pars eius in secundo tramite invenitur.

« Quotquot ergo asses (quaras) aut (semis) aut (dodras) praecesserint eodem numero, assum ipse (dodras) vel (semis) vel (quaras) geminantur usque xii locum in quo xii (quaras) in se cl (semuncia) (sicilicus) efficiunt, eo quod duodecies (quaras) geminatur ».

Il f. 9r si apre con altra tavola così:

(as) (dimidiascla) deduc pars cxliiii

e, per miglior comprensione, riferisco altra riga estratta da più sotto:

(as) (treas) (sicilicus) deduc pars xlviii Duc xvii

che è da intendersi così: il (treas) più il (sicilicus) valgono i 17/48 dell'(as) giacchè $1/3 + 1/48 = 17/48$. E così si procede per una lunga serie di « minutiae » e di particolari loro somme; nella prima riga è sottointeso un « Duc i ».

I	as	xi	UNCIAS	xx octo
ii	labur	xii	UNCIAS	xx octo
iii	distas	x	UNCIAS	xx octo
iiii	deduc	xviii	UNCIAS	xx octo
v	bitas	xvii	UNCIAS	xx octo
vi	septas	xvi	UNCIAS	xx octo
vii	semit	xv	UNCIAS	xx octo
viii	quintas	xiv	UNCIAS	xx octo
ix	treas	xiii	UNCIAS	xx octo
x	quart	xi	UNCIAS	xx octo
xi	semit	x	UNCIAS	xx octo
xii	sextuncia	i	UNCIAS	xx octo
xiii	uncia			xx octo
xiv	sextuncia			xx octo
xv	dracmas			xx octo
xvi	solidus			xx octo
xvii	solidus			xx octo
xviii	solidus			xx octo
xix	solidus			xx octo
xx	solidus			xx octo

A f. 9r del Cod. 250 della Burgerbibliothek di Berna.

Dopo un utile prospetto di equivalenza delle « minutiae » in scripuli che presenta una evidente svista circa la sesuncia, troviamo una tavola intitolata « LINGUA CALCULI » che si estende sino a f. 9v: « Bis media sescle id est sescle », « Bis sescle id est duae sesclae », ..., « Bis iabus id est assis et distas », « Bis assis id est dipondius », ... continuando i raddoppiamenti di tal sorta donde estraggo: « Bis quinquas id est ceas », « Bis sexai id est ceanbiae », ..., « Bis quinquen id est chile », ..., « Bis chile id est dischile ». E, sotto un titolo « Item », ancora: « Ter media sescla », « Quater media sescla », « Quinquies media sescla et reliqua ».

Fin che troviamo questo testo esteso:

« EXPLANATIO IN PRIMAE PARTIS CALCULIS »

« Producitur pars cxliiii (as). Haec est forma vel nota assis, sed aliquando corrupitur forma eius notae inscriptione eius quia sic est (as) haec figura rationabiliter. Ideo enim assium notae corrupuntur nisi in uno loco ubi absque

[il segno di uncia è cancellato, nota marginale: (dodras)] duo dodras, i (semis).

« Item ponas duo dodras super priores, remanent (semis) (semuncia) (sicilicus) [f. 10r] quae mittes iterum super dodras item ut ante id est tres sicilicos ad unamquamque unciam. Postea dicis iiii in se viiij, sic isto modo per omnia crescente numero intellectus aperit ».

E qui ha termine il testo teorico, i capitoli che seguono sono dedicati alle misure e, in certi casi, potrebbero riguardarsi come parti introduttive di « pratiche di mercatura »; di essi mi limiterò a riferire i titoli e, per ciascuno, l'elenco degli enti dei quali vi si fa parola; così:

« OLEARIA INCIPIUNT PONDERA »: mesura centum sextarii, himminae, quartarii, octuarii, chiati, libram, congeus, olei pondo, anfora italica, anfora gallica, ...

« ITEM MELARIA INCIPIUNT »: chiatus, octuarius, quartarius, himmina, sextarius, mellis pondo, congeus, modius, anfora Italia, anfora gallica, centum pondo mellis, talentum, talentum olei, talentum mellis, ...

« DE GEOMETRICA NUNC LOQUITUR »: digitus, palma, gressus, pedes, pollicis, passus, pertica, aripinis vel aripennis, levua, scadium, iugeru, bisse vel bes, achina, ictus, obolus, uncias, medignum, mina, libra Graeciae, librae acticae, ...

« DE REBUS LIQUIDES »: coclearia, chiatus, himminae, oephi sive opha, modii, sicel et sicilicus, stater, dragma, denarium, trimesis tributum, ...

Trovo ora un capitolo dove, in colonna, sono disposti i simboli dei pesi con a lato la nota esplicativa; per semplificare riporto qui tutti i simboli avvertendo che il numero unito a ciascuno di essi indicherà pure la nota pertinente:

Z	—	=	T	F	E	H	N	l ^o	l ^o
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

KY	K ^o	l ^o	l ^o	M	AN	λ ^o	Nr	r ^o	λ
14	15	16	17	18	19	20	11	12	13

« DE SIGNIS PONDERUM »

« Ponderis signa plerisque ignota sunt et inde errorem legentibus faciunt quapropter formas eorum et characteres ut a veteribus signata sunt subiciamus »

- 1) littera significat dimidium obolum,
- 2) virgula aequaliter iacens et porrecta simpliciter significat obolum,
- 3) geminata virgula duo oboli sunt,
- 4) t latinum significat obolos iiii,
- 5) latinum significat obolos liii,
- 6) latinum demonstrat obolos v, oboli vero vi propterea characterem non habent eo quod in una dragma vi veniant quodam pondus denarii argenti,

- 7) eta littera significat siliquis viiii id est tremisse,
- 8) latinum significat nummista graecum id est solidum,
- 9) iota adiuncta beta significat dimidium solidum,
- 10) virgulae duae ex uno angulo a leua in dexteram se dividentes significant dragmam quam etiam oleen appellant,
- 11) en latinum adiunctum gamma graeco significat semunciam,
- 12) gamma autem graecae litterae o latinum in fine adiunctum significat unciam,
- 13) lauda graecum per medium sui i latinum adiunctum significat libram,
- 14) cappa graecum circa finem coenuum adiuncto fix latino significat chiatum,
- 15) si vero o latinum habuerit adiunctum emnam demonstrat quam graeci cotilem vocant,
- 16) xi graecum si acceperit e latinum significat sextarium,
- 17) si o latinum adiunctum indicat acitabulum quod graeci oxifalona vocant,
- 18) mi graecum superposito N latino significat mina,
- 19) a latinum in fine habens lauda graecum significat talentum,
- 20) a graecum in dextro brachio superiori o littera coniuncta kenix est ».

E dopo ciò, ecco l'ultimo capitolo della *Ginta*:

« NOMINA PONDERUM MEDICINALIUM QUORUM MENTIO
IN CONFECTIONEM CONTINETUR »

Obolus est scripulus dimidius siliquae iii
Coclearium scripulus i et dimidius id est siliquae viiii
Dragma scripulos iii id est siliquae xviii
Ulce scripuli iii
Stater habet dragmas iiii id est scripulos xii
facit semunciam siliquarum lxxii
Cyatus habet dragmas x id est scripulos cxxx
facit unciam i scripulos vi siliquae clxxx
Acitabulum habet dragmas xvi id est scripulos xlv
facit unciam i (semis) et scripulos viiii siliquae clxxx
Cotula habet dragmas lxxii id est scripulos ccxvi
facit unciam viiii siliquae m ccxcvi
Mina habet stateres xxv id est dragmas c, scripulos ccc
facit libram i siliquae m decem
Talentum habet minas lx
facit libras lxxi (semis) siliquis cviii
Libra habet scripulos cclxxxviii facit dragmam xcvi
Congius habet [...] vi
[...] habet (duo oboli) xviii
Cyatus habet (duo oboli) i [...]
Cotula habet cyatos vi
Acitabulum habet octavam partem sextarii
Cocleare habet tertiam partem cyati
Sextarius vini habet librae i (duo oboli) vi

Sextarius olei habet librae i (semis)
Sextarius mellis habet librae ii (semis)
Ulcem dragma i id est scripuli iii
Tetrobolon dragmas xv id est scripulos xlv».

2. - *Un Abaco*

Cod. Vat. Lat. 644 (sec. XI) della Biblioteca Apostolica Vaticana.

L'*Abaco* che trovasi negli ultimi fogli del Cod. Vat. Lat. 644 (sec. XI) della Biblioteca Apostolica Vaticana, sebbene si trovi assieme a passi di musica e di astronomia, è estraneo al Quadrivio al quale appartengono invece le due arti predette; tuttavia riferirò anche su queste già che mi si porge la occasione di documentare la cultura e la metodologia del tempo.

Così a f. 75v si legge:

« De divisione musicae artis. Divisione musicae artis sunt tres. Prima harmonica quae ex vocum cantu constat. Secunda organica quae ex flatu constat. Tertia rithmica quae ex pulsu digitorum sonum recipit ».

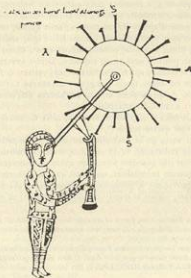
Il f. 76r si apre coll'elenco delle ninfe con la indicazione a che presiedevano, seguono un passo di carattere morale-teologico e una cronologia da Adamo a Cristo; troviamo poi queste note sulla Luna:

Luna i et xxx, iiii punctis lucet per noctem.
Luna ii et xxviii, una hora et tribus lucet punctis.
Luna iii et xxviii, duabus horis et duobus punctis.
Luna iiii et xxvii, tribus horis et uno puncto.
Luna v et xxvi, iiii horis lucet.
Luna vi et xxv, iiii horis lucet et iiii punctis.
Luna vii et xxiiii, v horis lucet et iiii punctis.
Luna viii et xxiii, vi horis lucet et duobus punctis.
Luna viiii et xxv, vii horis lucet et uno puncto.
Luna x et xxi, viii horis lucet.
Luna xi et xx, vii horis lucet et iiii punctis.
Luna xii et xviii, viiii horis lucet et tribus punctis.
Luna xiii et xviii, x horis lucet et duobus punctis.
Luna xiiii et xvii, xi horis lucet et uno puncto.
Luna xiv et xvi, xii horis lucet.

Segue una collana di versi il primo dei quali ricorda l'inizio di un vespro (Cod. Vat. Lat. 3797, f. 324v) per un « martyr apostolicus » forse dovuto a S. Pier Damiani:

Spera caeli quater senis horis dum revolvitur,
Omnes stellae fixae caelo quae cum ea ambiunt
Circa axem breviores circulos efficiunt.

Illa igitur quae polo apparet vicinior
Inter omnes tamen ei splendorem praecipuus
Ipsa noculum horarum computatrix dicitur.
Argumentum en inventum cardini oppositum
Recta linea si serves luminum intuitu
Hora noctis nosse potes galli sine vocibus.
O quam pulchrum stema tenet clavorum positio!
Crucis Christi rotae fixi hoc in orologio
In qua ipse carne pendens pro salute hominum
Dextra leva et profunda quae tendit ad aethera
Serva semper computatrix per distincta tempora
Aequinoctia designans atque solestitia.
Ante axem si quis volvens curiosus steterit
Aequinoctium vernale a sinistra noverit,
Cernere ad dextram sui autumnale poterit.
Solistitia duobus indita temporibus:
Aestivalis qui erectus ad superna ducitur,
Radius ad imam mersus gemmalis deducitur.



L'Abaco ha inizio ai ff. 77v-78r contenenti una grande tavola che nella parte alta è divisa in sette strisce orizzontali, al di sotto si trovano tre file di archetti disposte orizzontalmente; le colonne sono dodici, ma nelle prime tre fasce sono divise per metà.

La prima fascia contiene i nomi dell'asse e delle sue « minutiae », la seconda i loro simboli e la terza taluni rapporti fra loro. Abbiamo così: $ax = 12$ once, $deunx = 11$ once, $dextans = 10$ once, $dodrans = 9$ once, $bisse = 8$ once, $septunx = 7$ once, $semis = 6$ once, $quincunx = 5$ once, $triens = 4$ once, $quadrans = 3$ once, $sextans = 2$ once, $sexquunx = 1$ oncia e $1/2$ (il simbolo della mezza oncia è dedotto da quello dell'oncia sopprimendo il punto superiore), $uncia = 24$ scripuli, $semuncia = 12$ scripuli = $1/2$ oncia (« P. II uncia »), $duella = 8$ scripuli = $1/3$ d'oncia, $sicilicus = 6$ scripuli = $1/4$ d'oncia, $sexstula = 4$ scripuli = $1/6$ d'oncia, $dragma = 3$ scripuli = $1/8$ d'oncia, $dimidia-sextula = 2$ scripuli = $1/12$ d'oncia, $scripulus = 8$ calchi = $1/24$ d'oncia = 16 silique, $obolus = 4$ calchi = $1/2$ scripulo = 8 silique, $cerates = 2$ calchi = $1/4$ di scripulo = 4 silique, $calcus = 1/8$ di scripulo = 2 silique, $siliqua$.

Osservo che non tutti questi rapporti coincidono con quelli di un certo elenco, d'altronde inesatto, dedotto dalle *Regule abaci* di Adelardo di Bath⁽¹⁾, il primo traduttore dall'arabo in latino degli *Elementi* di Euclide.

Nella quarta fascia, a partire da destra, si trovano le potenze del 10 da 1 a 10 bilioni espresse alla romana; nella sesta sono collocati quei simboli ai quali, nella *Geometria* attribuita a Boezio, si allude con la frase⁽²⁾: « Habebant enim diverse formatos apices vel caracteres »; nella quinta, ordinatamente e al di sopra di ciascuno, sono collocati i nomi loro: *igis, andras, ormis, arbas, quimas, calcis, zenis, temenias, celentis, sijos*; questi ultimi due, come pure i loro apici sono posti in uno stesso riquadro. Debbo avvertire che, nei vari codici nei quali si trovano apici, s'incontrano lievi varianti di forma e di nome.

Nella settima ed ultima fascia si legge: « GERBERTUS LATIO NUMEROS ABACIQUE FIGURAS ». A destra della tavola, dall'altezza dell'ultima fascia, c'è la scritta verticale: « LINEA MINUTIARUM ».

Questa tavola offre il dispositivo al quale, nella *Geometria* ora citata, si fa riferimento con queste parole⁽³⁾:

« Pythagorici vero, ne in multiplicationibus et participationibus et in pōdismis aliquando fallerentur, ut in omnibus erant ingeniosissimi et subtilissimi, descripserunt sibi quandam formulam, quam ob honorem sui praeceptoris mensam Pythagoream nominabant, quia hoc, quod depinxerant, magistro prae-monstrante cogoverant; a posterioribus appellabatur abacus, ut quod alta mente conceperant, melius si quasi vivendo ostenderent, in notitiam omnium

(1) BALDASSARRE BONCOMPAGNI, *Inferno ad una scritto indito di Adelardo di Bath intitolato « Regule abaci »*, in « *Bollettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze Matematiche e Fisiche* », t. XIV (1881), p. 1. Il prospetto è a p. 71.

(2) ANGELO MARINO TORQUATO SEVERINO BORSI, *De institutione arithmetica libri duo De institutione musica libri quinque. Auctōr Geometria quo fertur Boetii. Et libri manu scripti a dōto Godefrido Fridōin, Lipsiae in aedibus B.G. Teubneri, MDCCCLVII*, p. 397.

(3) P. 396.

transfundere possent, eamque subterius habita sat mira descriptione formabant ».

E un ignoto commentatore di Gerbertus, non più tardo del sec. XI, dice (*):
 « Vocatur ergo abacus mensa geometricalis, quae in numeros atque formas numerorum divisa, et ad subtilitatem constant tenuissima, et ad exercitationem jucundissima, et ad scientiam utilissima. In qua videlicet mensa plurimorum collationes et distributiones numerorum, quasi diversorum generum cibi, studiosae menti inferentur ».

Non mi soffermo ulteriormente su questa « mensa » e neppure sul suo uso per eseguire le operazioni rimandando per questo agli scritti di Michel Chasles (†) e di Gottfried Friedlein (‡); ma intendo fornire una mia interpretazione della scritta di richiamo gerbertiano alla quale ne furono date diverse non soddisfacenti, cioè è da intendersi come dotata di punteggiatura così: « GERBERTUS. LATIO: NUMEROS ABACIQUE FIGURAE » con « latio - lationis » quale « actus ferendi ». Si consideri però che la presenza di quel nome non ha senso di attribuzione, è un atto di ossequio di uso frequente per lui; così ad esempio ai ff. 4v-5r del *Libre de abaco* di Radulfus Laudanensis (secc. XI-XII) contenuto nel Cod. Lat. 15120 (sec. XII) della Bibliothèque Nationale di Parigi si legge:

« Sed quoniam ea de qua sermo est disciplina apud omnes ferme occidentaliū paritum incolas oblivioni tradita est, contigit et hanc calculandi disciplinam, utpote cuius fructus, cessante acie ad cuius adminiculum reperta fuerat, non adeo magnus advertebatur, in contemptum venisse, nisi quantum a summae prudentiae viro Giberto, cui Sapientis cognomen fuit, atque ab eximio doctore Hermannō eorumque discipulis usque ad nostra tempora derivata a fontibus illorum modica licet predictae scientiae vena manavit ».

Il f. 78v si apre con una delucidazione circa le « minutiae » così:

DE UNCIA

Libra vel as ex unciois constat duodenis,
 Uncia de libra linquit subtracta deuncem,
 Et sextans hoc est eadem geminata decuncem,
 Hic quadrans haec scilicet et ipsa ter acta dodrantem,
 Inde triens ipsius quadruplicatio bissem,
 Quincunx septusem quae sat sua pondera produunt,

(*) GERBERTI, *Pactus Silvestri II pape Opera Mathematica (972-1003) Accusant etc. Colligit etc. Dr. Nicolaus Bahner Professor Kijunensis*, Berolini 1899, R. Friedländer et Sohn, pp. 250.

(†) Turi pubblicati in « Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences »: *Explication des Traités de l'Abacus, et particulièrement du Traité de Gerbert* (t. XVI, 1843, p. 150); *Règles de l'Abacus (traduction littérale)* (t. XVI, 1843, p. 218); *Analyse et explication du traité de Gerbert* (t. XVI, 1843, p. 281); *Développement et détails historiques sur divers points du système de l'Abacus* (t. XVI, 1843, p. 1395); *Recherches des traces du système de l'Abacus après que cette méthode a pris le nom d'Algoèbre. Premiers qu'à toutes les époques, jusqu'au XVII^e siècle, on a vu que l'Arithmétique vulgaire avait pour origine cette méthode ancienne* (t. XVII, 1843, p. 143).

(‡) *Die Entwicklung des Rechnens seit Columen*, in « Zeitschrift für Mathematik und Physik », Zehtener Jahrgang, Lipsia, 1865, p. 241.

Semis semis se medium dum dividit assem,
 Nec vacat unciolae mediam sesquuncia vicens,
 Uncia xx scripulos et iiii ambit,
 Dimidium stater ac semuncia dicitur eius,
 Tertia duae sesclae pars est eademque duella,
 Quarta sidus vel sicilicus vel denique sikel,
 Sextula sexta modo solet et modo sescla vocatur,
 Octavam appellant dragma vel rarius olcen,
 Et duodenariam mediam sesclam vocitarunt,
 Vigenam quartam scripulus seu gramma retentit,
 Unus item scripulus calcis componitur octo,
 Dimidium scripuli est obolus, pars quarta ceratos,
 Hic sextam fingi placuit siliquasque vocant,
 Ultimus est calculus ciceris duo granula pensans.

Varie considerazioni sono suggerite da quanto abbiamo visto sino ad ora, mi limiterò però solo alla numerazione. Se la collocazione degli apici nelle colonne della « mensa » intitolate alle varie potenze del 10 può valutarsi quale una valutazione a sistema decimale nella struttura dei numeri interi, quando si passi ai non interi l'intesa è in ben altro senso giacchè ci troviamo dinanzi a file di « minutiae » coi segni sottointesi di addizione. E che la « mensa », anche per Gerbertus, fosse in uso per effettuare le operazioni ci è testimoniato da questo passo dell'amico suo Richerius (*):

« In geometria vero non minor in docendo labor expensus est. Cuius introductioni, abacum, id est tabulam diductae, novem numero notas omem numerum significantes disposuit. Ad quarum etiam similitudinem, mille corneos effecit characteres qui per 27 abaci partes mutati, cuiusque numeri multiplicationem sive divisionem designarent; tanto compendio numerorum multitudinem dividentes vel multiplicantes, ut praec nimia numerositate potius intelligi quam verbis valeret ostendi. Quorum scientiam qui ad plenum scribere desiderat, legat eius librum quem scribit ad C. grammaticum; ibi enim haec satis habundanter tractata inveniet ».

Al « DE UNCIA » segue una parte che inizia con « Verbi gratia. De cxx in xi ... » e termina col simbolo del siclico, non sto a riferirla giacchè in lezioni assai simili è già alle stampe a cura di Alexandre Olleris (*) e del Bubnov (**). Così il capoverso seguente è assai prossimo al primo capitoletto di *Ratio nume-*

(*) Vol. il primo scritto cit. in (*), nota (5) a p. 158.

(*) *Oeuvres de Gerbert pape sous le nom de Sylvestre II millième de sti. précédées etc. par A. Olleris etc.*, Ciernont 1^{re}, Paris, 1867. Il passo fa parte di un'opera intitolata *Regula de abaci computi* che l'Olleris erroneamente attribuisce a Gerberto e va dal capoverso che inizia a p. 344 a tutto il primo capoverso che inizia a p. 345.

(**) Op. cit. in (*). Il passo fa parte di un'opera intitolata *De minutis* che il Bubnov dice di inserirle abacista del secolo X e va dal capoverso che inizia a p. 242 a tutto il capoverso che termina a p. 244.

rarum abaci secundum Herigerum del Cod. Scaliger 38 (sec. XI) di Leyda⁽⁹⁾ salvo che nel nostro si ha l'oggettivo ordinale in luogo dell'« ulteriore », e c'è la norma « Millenus quemcumque multiplicat in quarto digitum, in quinto articulum » mancante in quel codice; la conclusione suona: « Et in ceteris ordinibus huius modi multiplicatio, digitorum et articulorum similitudinem servetur ».

Se le due parti ora dette presentano affinità con scritti già alle stampe, ciò che qui di seguito trascrivo, e che va da mezzo di f. 78v al mezzo di f. 79r, è per mia esperienza inedito.

« Simplex divisio cum differentia taliter sit usque ad denarium perficit, differentia in divisione quicumque numerus sit ita ut singularis secundet, decenus tertiet, centenus quartet, millenus quintet et ceteri divisores dividendos unum aut plures uno plus numero diminuant. In composita autem divisione quot lineas habet per se ultimus divisor per totidem lineas ponitur ultima denominatio. Et in primo divisore usque ad x crescit differentia, in ceteris usque ad novem, prout ultimum qui semper sine differentia. Si vero interruptiones inciderint, quotquot fuerint, novenarius supplebuntur et loco differentiae novenarii habebuntur. Et si ultimus divisor fuerit unitas, dividendo qualitercumque fuerit medietas accipiatur, si binarius tertia pars de dividendo, si ternarius quarta, si quaternarius quinta, si quaternarius vi, si septenarius octava, si octonarius nona, si novenarius x^{ma}. Et si novenarii solum modo fuerint divisores, quamvis plures sint, primus differentiam habebit et ceteri carebunt. Et hic divisione composita differentia.

« RATIO DIVIDENCUM MINUCIARUM
DE SIMPLICI ET SINGULARI MINUCIA »

« Si quelibet minucia assis, unciae aut scripuli in divisionibus dividens sola et simpliciter apponatur differentias ad assis integritatem exposcit. De dividendis vel dividendo numquam a partibus denominationes trahentur neque a toto ductae secundabuntur aut terciabuntur aut in extensoris limitis linea collocabuntur, si maximus dividendorum si ratio plures adhibuerit in eadem linea positus secundum numerum quem articulariter designabit differentias minuciae multiplicabit. Quicquid vero ex huius multiplicationis summa ad asses redigi poterit ad sedem propriam remeabit digiti videlicet ad digitos et articuli ad articulos, que infra assem fuerit minuciarum limitem non transiliet. Si vero dividendi praeter unum non fuerint asses ex multiplicatione renati eiusdem dividendi rationem servabunt. Quod si plures forte contigerit assibus ex multiplicatione factis aggregabuntur et praedicti dividendi lege in nullo separabuntur quem extra limitem in quo sunt numquam ducentur et ad multiplicationem articulariter conferentur donec in singulari linea positi stabilientur. In hac autem tamdiu multiplicando subsistent quamdiu ex multiplicatione asses poterint redintegrari. Cum autem defectus perfectionem assis impediend aufrende

(9) Op. cit. in (2), p. 221.

sunt differentiae et considerandum iterum id quo remanserit dividendi equale sit an maius minusve. Si aequale equalitas illa unitati assignata locabitur in singulari linea. Si maius quociens poteris ab eo dividentem subtrahere tot unitatibus denominationes augebis. Si minus relinque sunt. Interea in reformatione multiplicationem aliter quam articulariter fieri nisi in singulari linea sumopere cavendum sit.

« DE SIMPLICI DIVISIONE CUM MINUCIA »

« Si singularis linea dividens cum minutus fuerit differentiis minuciae integris adhibitis uno curtabitur singularis. Dividendi vero secundabuntur articulariter in articulares multiplicationem facientes per minuciarum differencias sicut iam supra dictum est.

« DE COMPOSITA DIVISIONE CUM MINUTUS »

« Si compositus numerus cum minuciae divisor fuerit, minuciae datis plenis differentiis numerus addentur omnibus unitate multate excepto primo divisore, qui semper est sine differencia nisi simplex fuerit divisio quantum ad integros numeros.

« Denominaciones vero directe a partibus, sicut ex maximo divisore colligitur, secundabuntur, terciabuntur aut ita ponentur sicut in abaco computator assuefactus intellet et si interruptiones evenerint novemariis supplebuntur.

« Multiplicandas vero differencias minuciarum articulariter ubi ratio persuadebitur nunquam obliviscaris et iam in reformatione. Duas, tres aut plures minucias simul dividentes ponere sit cuiquam facile in superioribus exercitationibus tractamus ut illis differencias integras ad assis soliditatem addere non obliviscatur et ne aliquid dictorum per singulari divisiones minutis eius inspectui obsuscatur ».