



Rendiconti
Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL
Memorie di Matematica
101* (1983), Vol. VII, fasc. 11, pagg. 177-192

MARIO VOLPATO (*)

Sulla caratterizzazione, discretizzazione e simulazione del processo poissoniano (**)

SUMMARY. — For each equipartition of R^+ with step length $1/n$, we define a discrete-time stochastic process (that can be considered as arrivals of customers at a counter), in which it is assumed that in each interval of the equipartition one and only one customer can arrive with probability that is constant, the same for each interval, and given by the probability of success in a Bernoulli sampling scheme with two alternatives: success and failure. We show that the marginal laws for the waiting time for the arrival of the r -th customer, for the time length between two successive arrivals (which is a geometric law characterizing the discrete process), and for the total number of customers that may arrive in a fixed period of time, converge, for the step length of the equipartition tending to zero, to the analogous marginal laws that are typical for a continuous-time stochastic process of the Poisson type.

For the simulation of such marginal laws of the discrete process we give an algorithm expressed by means of an appropriate flow-chart.

I. - INTRODUZIONE

In un processo di arrivi aleatori di clienti ad uno sportello (in senso figurato) che rende servizi, si pone il problema di un conveniente dimensionamento delle strutture dello sportello in modo che si possa ritenere altamente probabile che un cliente riceva il servizio richiesto non oltre un fissato limite di tempo. È appena il caso di ricordare che un siffatto problema si incontra, per esempio, per dimensionare le apparecchiature delle centrali di una rete di telefonia, di informatica, di telematica; oppure, per dimensionare e controllare (nel senso di *gestire*) le piste di decollo ed atterraggio di un aeroporto ove il traffico degli aerei in partenza ed in arrivo (i clienti) assume dimensioni non facilmente dominabili (almeno, con sufficiente affidabilità) dalle decisioni che possono improv-

(*) Indirizzo dell'A.: Centro di Matematica Applicata dell'Università di Padova, via Belzoni 7, Padova.

(**) Memoria presentata il 2 luglio 1983 da Giuseppe Scora Dragoni, uno dei XL.

visare delle persone incaricate di presiedere il servizio. È facile immaginare tante altre situazioni, anche nel campo economico e sociale, in cui si pone il problema ora accennato. Tanto per dare un'idea, le unità di danaro (l'unità potendo essere, per esempio, il milione) che vengono depositate in un istituto di credito possono essere configurate come clienti che arrivano all'istituto per chiedere il servizio di essere date a prestito ad imprenditori che intendono investire; similmente, gli ordini che arrivano ad una impresa di produzione o ad un gestore di un magazzino possono essere riguardati come clienti che domandano il servizio della loro evasione; e così via. È notorio che molto spesso in siffatti problemi si accettano soluzioni relativamente ottime fornite dalla simulazione della gestione della situazione che li pone.

Ciò premesso, in questa nota dedicata appunto ai processi di arrivi aleatori di clienti ad uno sportello che rende servizi, si dimostra (utilizzando in maniera determinante un nostro risultato stabilito con altro A. (*) che il classico processo stocastico poissoniano può considerarsi un processo limite (in una opportuna definizione di convergenza) di una successione di processi stocastici a tempi discreti (chiamati, *bernoulliani* perché legati ad altrettanti processi di estrazione bernoulliane da universi a due alternative) facilmente simulabili coi moderni mezzi di elaborazione automatica veloce, e perciò utili nelle applicazioni.

Una più dettagliata descrizione dei risultati è esposta nel n. 2.

2. - DESCRIZIONE DEI RISULTATI

Anzitutto vien definito un processo a tempi discreti di arrivi aleatori dipendente:

1) da una equipartizione D_n , del semiasse positivo dei tempi, il cui passo di ampiezza $1/n$ viene assunto come unità di tempo;

2) dalle estrazioni bernoulliane da un universo (*urns* in senso figurato U_n) a due alternative: *successo* e *insuccesso*, aventi probabilità di comparsa complementari λ/n e $(1-\lambda/n)$ costanti in ogni singola estrazione, con λ reale positivo; la dipendenza essendo intesa nel senso che si assume la seguente ipotesi (h): nel generico tratto parziale

$$T_{i,n} = \left(t \in \mathbb{R}^+; \frac{i-1}{n} < t < \frac{i}{n} \right), \quad (i = 1, 2, \dots)$$

arriva uno ed un solo cliente, soltanto se in una estrazione dalla urna U_n si verifica il successo.

Anche se più complessa, può essere utile rilevare la seguente altra formulazione dell'ipotesi (h): nel generico tratto parziale $T_{i,n}$ arriva uno ed un solo

(*) M. VOLPATO - A. BRESSANI, *Sulla assoluta continuità di una variabile aleatoria la cui densità è limite di una successione di densità costanti a tratti*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, vol. 60 (1978), pp. 237-255.

cliente se, in un campione di taglia i estratto dall'urna U_n , si verifica il successo nell'ultima, appunto la i -ma, estrazione che completa il campione, oltre ad eventuali successi che possono essersi verificati prima.

Per tale processo, che vien chiamato *processo* (di arrivi aleatori) *a tempi discreti bernoulliano* e rappresentato col simbolo $\mathfrak{B}(\lambda/n)$ si prova che

a) la variabile casuale ξ_n , che indica l'istante aleatorio in cui arriva l' r -mo cliente (tale istante essendo notoriamente detto *tempo di attesa*, da parte dello sportello, dell' r -mo cliente; e nel quale, quindi, si ~~totalizza~~ il numero r di clienti arrivati) è una *variabile casuale di Pascal* che assume i valori i/n ($i = r, r + 1, \dots$) con le probabilità

$$\binom{i-1}{r-1} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^r \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{i-r}, \quad (i = r, r + 1, \dots);$$

b) la variabile casuale η_n , che indica il numero complessivo di tutti i clienti arrivabili nel corso dell'intervallo di tempo $]0, x]$, senza la condizione che l'ultimo arrivo si verifichi nel fissato istante x , è una *variabile casuale bernoulliana* (binomiale) che assume i valori k , ($k = 0, 1, 2, \dots, i(n, x)$), con le probabilità

$$\binom{i(n, x)}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{i(n, x) - k}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots, i(n, x))$$

dove $i(n, x)$ è quel particolare valore dell'indice i che individua il tratto parziale $T_{i(n, x), n}$ che contiene il numero reale positivo x prefissato, e dove λ/n appare il numero medio di clienti che arrivano nell'unità di tempo $1/n$;

c) la variabile casuale τ_n , che indica il tempo separatore di due arrivi successivi è una *variabile geometrica* che assume i valori i/n , ($i = 1, 2, \dots$) con le probabilità

$$\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{i-1} \frac{\lambda}{n}, \quad (i = 1, 2, \dots)$$

tipica del processo a tempi discreti bernoulliano, nel senso che è condizione necessaria e sufficiente per la bernoullianità del processo il fatto che sia una variabile casuale geometrica il tempo separatore di due arrivi successivi.

Infine (ed è questa la novità precipua dei risultati), utilizzando un nostro criterio di esistenza ed unicità di una distribuzione assolutamente continua *compatibile* con una successione di istogrammi statistici a colonne (cfr. nota (7)) si prova che col divergere di n (e quindi, con l'infinitesimalità del *passo* di ampiezza $1/n$ dell'equipartizione D_n)

a) il profilo superiore dell'istogramma statistico a colonne che si ottiene sormontando il generico tratto parziale

$$T_{i,n} = \left\{ t \in \mathbb{R}^*, \frac{i-1}{n} < t < \frac{i}{n} \right\}, \quad (i = 1, 2, \dots)$$

dell'equipartizione con un rettangolo di area uguale alla probabilità che la variabile ξ_n di Pascal associa all'estremo destro i/n di $T_{i,n}$, converge *dappertutto* verso la densità della variabile casuale assolutamente continua di Erlang, la convergenza fra le due variabili verificandosi, uniformemente, anche *in legge*;

β) la variabile bernoulliana η_n (associata, nel processo a tempi discreti bernoulliano, all'estremo destro i/n di quel particolare tratto spaziale $T_{i,n}$ dell'equipartizione che contiene un fissato x ; tratto che, col divergere di n , si riduce allora al solo punto x) converge verso la variabile casuale di Poisson, avente λx per valor medio, il numero λ palesandosi così come valor medio degli arrivi nell'unità di tempo anche nel processo poissoniano, a tempo continuo, $\mathcal{P}(\lambda)$ che definiremo come processo limite, col divergere di n , del processo a tempi discreti $\mathcal{B}(\lambda/n)$,

γ) la variabile casuale geometrica \mathcal{G}_n che caratterizza il processo discreto bernoulliano, atteggiata ad istogramma statistico a colonne come indicato in *a*), converge anche in legge (oltre che in densità) verso la variabile casuale distribuita con legge esponenziale che, notoriamente, è la legge *tipica* secondo la quale devono essere distribuiti i tempi separatori di due arrivi successivi affinché un processo stocastico di arrivi sia a tempo continuo poissoniano.

Per tutti questi fatti allora si conviene di dire che

il processo stocastico a tempi discreti bernoulliano, dipendente dal passo $1/n$ dell'equipartizione del semiasse reale positivo che discretizza il tempo, converge verso il processo stocastico a tempo continuo poissoniano;

in simboli

$$\mathcal{B}\left(\frac{\lambda}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathcal{P}(\lambda).$$

A conclusione del lavoro, dato l'interesse che può avere nelle applicazioni, viene indicato con un flow-chart un algoritmo per la simulazione della variabile di Pascal descritta in *a*) e per la variabile bernoulliana descritta in *b*) che, appunto, sono le variabili casuali precipue del processo stocastico (di arrivi) a tempi discreti $\mathcal{B}(\lambda/n)$.

3. - STUDIO DEL PROCESSO STOCASTICO A TEMPI DISCRETI BERNOULLIANO $\mathcal{B}(\lambda/n)$

Come si è detto nel precedente paragrafo, il processo è definito dalle ipotesi $(\beta)_n$.

Dimostriamo anzitutto il risultato indicato in *a*).

Dato che l'unità di tempo è il *passo* (di ampiezza $1/n$) dell'equipartizione D_n del semiasse reale positivo del tempo (di guisa che il tempo vien sostanzialmente contato a tratti parziali di uguale ampiezza di D_n), intenderemo con ξ_n (tempo di attesa dell' r -mo cliente) quel particolare tratto parziale di D_n durante

il quale arriva l' r -mo cliente. Allora fissato, comunque, un particolare $T_{i,n}$, calcoliamo la probabilità $P(\xi_n = T_{i,n})$ con la quale, nel corso del particolare tratto parziale fissato, si può totalizzare il numero r di clienti arrivati. Sono evidenti le uguaglianze

$$P(\xi_n = T_{1,n}) = P(\xi_n = T_{2,n}) = \dots = P(\xi_n = T_{r-1,n}) = 0.$$

perché, non potendo arrivare più di un cliente in ogni singolo tratto parziale, è impossibile totalizzare il numero r di clienti arrivati nel corso del primo, secondo, ..., $(r-1)$ -mo tratto parziale.

Resta da calcolare

$$P(\xi_n = T_{i,n}); \quad \text{con } i = r, r+1, \dots$$

A tale scopo osserviamo che si verificherà l'evento $(\xi_n = T_{i,n})$, con $i > r$ soltanto se si verificheranno entrambi i seguenti altri due eventi:

- 1) $(r-1)$ arrivi, complessivamente, in tutto l'intervallo di tempo

$$\left] 0, \sum_{k=1}^{i-1} T_{k,n} = \frac{i-1}{n} \right],$$

formato dai primi $(i-1)$ tratti parziali precedenti il tratto $T_{i,n}$. Tale evento può verificarsi con la probabilità

$$\binom{i-1}{r-1} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^{r-1} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{i-r}$$

con la quale sono attendibili $(r-1)$ successi in un campione bernoulliano di taglia $(i-1)$, estratto dall'urna U_n (associata all'equipartizione D_n di \mathbb{R}^*) e dalla quale, in ogni singola estrazione, il successo è, appunto attendibile con la probabilità costante λ/n ;

2) un arrivo nel tratto parziale $T_{i,n}$; attendibile, come in ogni altro singolo tratto parziale della equipartizione D_n , con la probabilità λ/n .

Attesa l'indipendenza di questi due eventi, si conclude che

$$P(\xi_n = T_{i,n}) = \binom{i-1}{r-1} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^{r-1} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{i-r} \frac{\lambda}{n}.$$

È il caso di rilevare che la corrispondenza biunivoca

$$T_{i,n} \approx \frac{i}{n},$$

fra i tratti parziali dell'equipartizione D_n , ed i loro estremi destri, consente di

ritenere ξ_n una variabile casuale discreta cui sono possibili i valori

$$(1) \quad \frac{r}{n}, \frac{r+1}{n}, \dots, \frac{i}{n}, \dots$$

rispettivamente, con le probabilità

$$(2) \quad \binom{i}{r} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^r \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{i-r}, \dots, \binom{i-1}{r-1} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^{r-1} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{i-r}, \dots$$

La ξ_n appare così una *variabile casuale di Pascal*, nella quale i tradizionali valori interi che le sono consentiti, attesa l'unità di misura da noi assunta per il tempo, sono moltiplicati per il *passo* $1/n$ dell'equipartizione D_n .

Passiamo ora a provare la tesi indicata in β).

Fissiamo comunque un x reale positivo ed indichiamo con $T_{i(n,x)}$ il particolare tratto parziale dell'equipartizione D_n contenente l' x fissato. Allora, il numero aleatorio η_n di clienti che, complessivamente, nelle ipotesi β), possono arrivare nel periodo di tempo $]0, x]$, (o meglio, dato il modo con cui abbiamo convenuto di contare i tempi, nel periodo di tempo $]0, i(n, x)/n]$) può assumere soltanto uno dei seguenti valori interi

$$(3) \quad 0, 1, 2, \dots, k, \dots, i(n, x).$$

Assumerà il generico valore intero k se nel complesso delle $i(n, x)$ estrazioni bernoulliane dall'urna U_n (previste dalle ipotesi β), ed in ciascuna delle quali è λ/n , costante, la probabilità di successo) si saranno verificati k successi. Quindi la probabilità con cui potrà verificarsi l'evento ($\eta_n = k$) è

$$(4) \quad P(\eta_n = k) = \binom{i}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{i-k},$$

ove, per semplicità, si è scritto solo i al posto di $i(n, x)$. La variabile discreta η_n è pertanto una bernoulliana, precisamente una $B(i(n, x), \lambda/n)$.

La figura 1 porge una immagine del processo discreto $B(\lambda/n)$ quando nel processo medesimo interessa considerare il numero aleatorio η_n di clienti che possono arrivare complessivamente nell'intervallo di tempo $]0, x]$ o meglio, nell'intervallo $]0, i(n, x)/n]$, essendo (al solito) $T_{i(n,x)}$ il particolare tratto parziale dell'equipartizione D_n contenente l' x fissato. In ascissa è riportato il tempo contato in tratti $T_{1/n}$ di ampiezza $1/n$; in ordinata sono riportati i valori (detti, anche, *stati*) possibili per la variabile η_n ; e, in quota, la probabilità con cui ogni singolo stato è attendibile, di guisa che sul piano parallelo al piano (S, P) e secante l'asse i in corrispondenza di $i(n, x)/n$ è riportato lo spettro della binomiale $B(i(n, x), \lambda/n)$. È appena il caso di segnalare che il valor medio e la varianza della binomiale η_n sono, rispettivamente

$$(5) \quad \bar{\eta}_n = \frac{i(n, x)}{n} \lambda; \quad \sigma_{\eta_n}^2 = \frac{i(n, x)}{n} \lambda \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right);$$

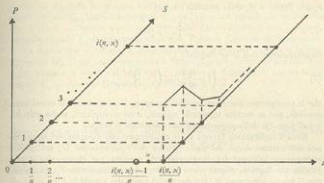


Fig. 1

di guisa che λ/n appare allora il numero medio di clienti arrivabili nell'unità di tempo che si è assunta.

Anche la tesi indicata in *b)* è così provata.

Attesi questi due primi risultati, viene spontanea la seguente

DEFINIZIONE 1: *Gli arrivi aleatori di clienti ad uno sportello, nel rispetto delle ipotesi $(b)_n$, configurano un processo stocastico a tempi discreti (da chiamarsi) di Bernoulli-Pascal (o semplicemente, un processo stocastico bernoulliano) e da rappresentarsi col simbolo $\mathcal{B}(\lambda/n)$ che evidenzia i due parametri:*

$1/n$ = passo dell'equipartizione che discretizza il tempo;

λ/n = numero medio dei clienti arrivabili nella unità di tempo $1/n$.

Passiamo infine a dimostrare il risultato indicato in *c)*; ossia che le due proposizioni

e_1) un processo di arrivi aleatori è un processo bernoulliano $\mathcal{B}(\lambda/n)$;

e_2) il tempo separatore di due arrivi successivi è una variabile casuale geometrica avente il valor medio 1: $\lambda/n = n/\lambda$,

sono equivalenti. Proviamo dapprima l'implicazione $e_1 \Rightarrow e_2$. Il tempo separatore (diciamo, \mathcal{T}_n) di due arrivi successivi, in un processo che per definizione è retto dalle ipotesi $(b)_n$, è una variabile aleatoria. Fissando l'origine dei tempi (d'altronde, arbitraria) nell'estremo destro del tratto parziale della equipartizione D_n nel quale è arrivato uno qualsiasi dei clienti, la variabile \mathcal{T}_n si identifica con la variabile di Pascal, già studiata in *a)*, qualora si ponga ivi

$r = 1$. Perciò a \mathfrak{B}_n sono possibili i valori

$$(6) \quad \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{j}{n}, \dots$$

rispettivamente, con le probabilità

$$(7) \quad \frac{\lambda}{n}, \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right) \frac{\lambda}{n}, \dots, \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{j-1} \frac{\lambda}{n}, \dots$$

che la configurano come una *variabile geometrica* i cui tradizionali valori interi possibili, per la metrica temporale assunta, sono moltiplicati, anche stavolta, per il passo $1/n$ dell'equipartizione che discretizza il tempo.

Resta l'implicazione inversa ($\epsilon_2 \Rightarrow \epsilon_1$). Sempre con l'origine dei tempi fissata nell'estremo destro del tratto parziale dell'equipartizione D_n nel quale è arrivato uno qualsiasi dei clienti, sappiamo stavolta, per ipotesi, che la probabilità che il primo cliente possa arrivare nel generico tratto $T_{i,n}$ (e quindi, che il tempo separatore \mathfrak{B}_n fra due arrivi successivi sia i/n) è

$$\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{i-1} \frac{\lambda}{n}.$$

Ma questa è anche la probabilità che in un campione di taglia j estratto da una urna come la U_n si sia verificato un solo successo ed $(j-1)$ insuccessi. Quindi in ciascuno dei tratti parziali $T_{i,n}$ può arrivare un solo cliente con la probabilità λ/n , come, appunto, è richiesto nelle ipotesi (H)_n. Il processo di arrivi è pertanto un processo stocastico a tempi discreti bernoulliano $\mathfrak{B}(\lambda/n)$.

4. - RICHIAMO DI UN CRITERIO DI ESISTENZA ED UNICITÀ DI UNA DISTRIBUZIONE ASSOLUTAMENTE CONTINUA COMPATIBILE CON UNA SUCCESSIONE DI ISTOGRAMMI STATISTICI A COLONNE

È il criterio, accennato nel n. 2, col quale noi proveremo la convergenza

$$(8) \quad \mathfrak{B}\left(\frac{\lambda}{n}\right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathcal{P}(\lambda).$$

Ecco di che si tratta. Con (D_n) , $n > 1$, indichiamo una successione di partizioni, addirittura, di tutto l'asse reale \mathbb{R} in tratti parziali disgiunti $T_{i,n}$, non degeneri, tale che, detta σ_n la massima ampiezza dei tratti dell' n -esima partizione si abbia:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = 0 \quad (9).$$

Fissato su un piano un riferimento cartesiano ortogonale, si riporti la generica

(9) L'equipartizione D_n , di passo $1/n$, del semiasse reale positivo (da noi finora considerata) rientra nella classe più ampia delle partizioni previste nel criterio, non appena la si estenda a tutto \mathbb{R} , e quindi, si consenta all'indice i del generico tratto parziale $T_{i,n}$ di assumere tutti i valori interi relativi.

partizione D_n della successione sull'asse delle ascisse. Si sovrappone ogni singolo tratto parziale $T_{i,n}$ con un rettangolo di area opportuna uguale alla probabilità che al tratto medesimo viene assegnata dalla distribuzione di una assegnata variabile casuale ξ_n di cui denoteremo con $F_n(x)$ la funzione di ripartizione.

La figura che si ottiene, è notoriamente un *istogramma statistico a colonne*, diciamolo H_n , il cui profilo superiore è l'immagine geometrica di una funzione $f_n(x)$, costante a tratti, che può essere assunta come densità di una variabile casuale ξ_n , avente per funzione di ripartizione la

$$F_n(x) \triangleq \int_{-\infty}^x f_n(t) dt.$$

Fissato x quasi ovunque in \mathbb{R} , e, detto, come al solito, $T_{i(n),n}$ il particolare tratto di D_n che lo contiene, noi poniamo la seguente

DEFINIZIONE 2: *La successione $\{H_n\}$ di istogrammi è compatibile con una variabile casuale ξ assolutamente continua avente $F(x)$ come funzione di ripartizione (e, viceversa) quando la differenza fra l'area del rettangolo che sovrasta $T_{i(n),n}$ e la probabilità $\Delta F(T_{i(n),n}, n)$ che al tratto medesimo assegna la ξ , è un infinitesimo, col divergere di n , di ordine superiore rispetto alla mis. $T_{i(n),n}$.*

In simboli

$$(9) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(f_n(x) - \frac{\Delta F(T_{i(n),n}, n)}{\text{mis. } T_{i(n),n}} \right) = 0, \quad \text{per quasi ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Ebbene, sussiste il seguente criterio.

Se esiste il

$$(10) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \triangleq f(x), \quad \text{per quasi ogni } x \in \mathbb{R}$$

e se risulta

$$(11) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1,$$

allora esiste una ed una sola variabile casuale, assolutamente continua, avente $f(x)$ come funzione di densità, compatibile con la successione $\{H_n\}$ di istogrammi.

Inoltre, sussiste la convergenza in legge

$$(12) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{F}_n(x) = F(x) \triangleq \int_{-\infty}^x f(t) dt \quad (*)$$

uniformemente rispetto ad x .

(*) Nel loc. cit. in (*) la convergenza uniforme in legge risulta come implicita conseguenza. Poiché, sostanzialmente, si tratta della validità del seguente passaggio al limite sotto il segno di integrale

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^x f_n(t) dt = \int_{-\infty}^x \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) dt.$$

si confronti per una sua giustificazione G. VOLPATO MARTINELLI, *Sulla caratterizzazione della convergenza in L^1* , Atti dello Iat. Ven. Sc. Lett. ed Arti, classe di Sc. Fis., Mat. Nat., Tomo CXXXIX (1960-61), pp. 183-194.

È, appunto, applicando questo criterio (leggermente più generale di quello stabilito in (1), e di dimostrazione sostanzialmente identica) che noi ora proveremo la convergenza del processo stocastico a tempi discreti bernoulliano al processo stocastico a tempo continuo di Poisson.

5. - CONVERGENZA DI $\mathfrak{B}(\lambda/n)$ A $\mathfrak{P}(\lambda)$

Giustificiamo dapprima il risultato espresso in $\alpha)$.

Prolunghiamo la nostra equipartizione D_n , di passo $1/n$, a tutto l'asse reale e costruiamo un istogramma statistico a colonne come quello della figura 2 nel quale ogni singolo tratto $T_{i,n}$ è sormontato da un rettangolo che lo ammette come base e la cui area è uguale alla probabilità, eventualmente nulla, che la nostra variabile casuale ξ_n di Pascal, indicata in (1) e (2), assegna all'estremo destro i/n del tratto parziale $T_{i,n}$.

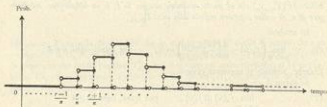


Fig. 2.

L'istogramma suggerisce allora la possibilità di considerare accanto alla variabile discreta ξ_n una variabile casuale continua ξ_n , la quale sui numeri reali positivi distribuisce la probabilità con una legge di densità $f_n(x)$ costante a tratti (precisamente, costante in ogni singolo tratto della equipartizione D_n), la cui immagine è il profilo superiore dell'istogramma medesimo. Per ogni numero reale x comunque fissato, l'espressione analitica della densità è la seguente

$$(13) \quad f_n(x) \triangleq \frac{P(\xi_n = T_{i,n}, n, n)}{1/n} = \begin{cases} 0, & \text{per } x < \frac{i-1}{n}, \\ n \left(\frac{i-1}{n} \right) \left(\frac{\lambda}{n} \right)^i \left(1 - \frac{\lambda}{n} \right)^{n-i}, & \text{per } \frac{i}{n} < x < +\infty, \end{cases}$$

ove, per semplicità, si è scritto i al posto di quel particolare valore $i(n, x)$, dell'indice i , che individua il tratto parziale $T_{i,n}, n, n$ contenente x fissato. La funzione $f_n(x)$ è definita su tutto l'asse reale, ed il suo valore (costante) nei

tratti $T_{i,n}$ per i quali $i < (r-1)/n$ è nullo. Come per ogni densità, l'integrale esteso ad \mathbb{R} della $f_n(x)$ vale uno. Infatti

$$(14) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) dx = \sum_{i=0}^{+\infty} \binom{i-1}{r-1} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^r \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{i-r} = 1 \quad (*)$$

Possiamo allora concludere che nel processo a tempi discreti bernoulliano definito dalle ipotesi $(b)_n$, il tempo (aleatorio) d'attesa dell' r -mo cliente può assumere i valori discreti indicati in (1) con le rispettive probabilità indicate in (2), (che, come si è detto, configurano ξ_n come una variabile di Pascal con i valori possibili moltiplicati per il passo $1/n$ della equipartizione D_n); oppure, qualora si convenga di rappresentarlo con la variabile casuale continua ξ_n , può assumere tutti i valori reali con la densità indicata in (13). Osserviamo ora che per $r/n < x < +\infty$ si può ottenere per $f_n(x)$ l'espressione che segue

$$(15) \quad f_n(x) = \lambda \frac{(i-1)(i-2) \dots (i-r+1)}{(r-1)!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^{r-1} \frac{(1-\lambda/n)^i}{(1-\lambda/n)^r} = \\ = \frac{\lambda^r}{(r-1)!} \left[\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{i-r} \right] \frac{1}{(1-\lambda/n)^r} \left(\frac{i-1}{n}\right) \left(\frac{i-2}{n}\right) \dots \left(\frac{i-r+1}{n}\right),$$

ove, come al solito, si è scritto solo i al posto di $i(n, x)$. Osservato che l'appartenenza $x \in T_{i(n, x)}$ implica le disuguaglianze

$$(16) \quad -\frac{1}{\lambda} < x - \frac{i(n, x)}{n} < 0,$$

e quindi le relazioni

$$(17) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{i(n, x)}{n} = x \neq 0; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} i(n, x) = +\infty \quad (**)$$

(*) Basta porre $r+i=i$, ($i=0, 1, 2, \dots$) ed osservare che le uguaglianze

$$\binom{i-1}{r-1} = \binom{i-1}{i-r} = \binom{r+i-1}{i} = (-1)^i \binom{-r}{i}$$

portano

$$\left(\frac{\lambda}{n}\right)^r \sum_{i=0}^{+\infty} \binom{i-1}{r-1} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{i-r} = \left(\frac{\lambda}{n}\right)^r \sum_{i=0}^{+\infty} (-1)^i \binom{-r}{i} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^i = \left(\frac{\lambda}{n}\right)^r \left[1 - \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)\right]^r = 1.$$

(**) È appena il caso di segnalare che la convergenza di $i(n, x)/n$ verso x può essere oscillatoria (non monotona) come evidenzia l'esempio che segue.

Si ponga: $x \triangleq p/q$, con $p < q$ interi positivi, ed $n \triangleq q^k$, con k intero positivo qualsivoglia. È immediato verificare che

$$T_{i(n, x), n} = \left] \frac{p^k - 1}{q^k}, \frac{p^k}{q^k} \right]; \quad T_{i(n+1, x), n+1} = \left] \frac{p^k}{q^k + 1}, \frac{p^k + 1}{q^k + 1} \right],$$

con

$$\frac{p^k - 1}{q^k} < \frac{p^k}{q^k + 1} < \frac{p^k}{q^k} < \frac{p^k + 1}{q^k + 1}.$$

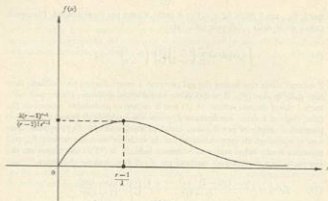


Fig. 3

segue che, per ogni $x \in \mathbb{R}$, sussiste la convergenza

$$(18) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \triangleq f(x) = \begin{cases} 0, & \text{per } x < 0. \\ \lambda \frac{(\lambda x)^{r-1}}{(r-1)!} e^{-\lambda x}, & \text{per } x > 0, \end{cases}$$

La funzione limite $f(x)$ della quale, per comodità di confronto col generico istogramma della successione, riportiamo l'andamento nella figura 3 è una particolare funzione gamma nota col nome di legge di Erlang.

Per applicare il nostro criterio rimane da provare che vale l'integrale della $f(x)$ su tutto l'asse reale, anzi, sul semiasse reale positivo essendo nullo il valore della $f(x)$ per $x < 0$.

Ricordando che per ogni s reale e per r intero sussistono le uguaglianze

$$(19) \quad \Gamma(s) \triangleq \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{s-1} dt, \quad \Gamma(r) = (r-1)!,$$

ponendo

$$\lambda x \triangleq t$$

si ottiene

$$(20) \quad \int_0^{+\infty} f(x) dx = \frac{\lambda^r}{(r-1)!} \int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{\lambda}\right)^{r-1} e^{-t} \frac{dt}{\lambda} = \frac{1}{(r-1)!} \Gamma(r) = 1.$$

A norma del nostro criterio esiste allora una ed una sola variabile casuale ξ ,

assolutamente continua, *compatibile* con la successione $\{H_n\}$ di istogrammi. La sua densità è la $f(x)$ di Erlang e la sua funzione di ripartizione è

$$(21) \quad F(x) \triangleq \frac{\lambda^r}{(r-1)!} \int_0^x t^{r-1} e^{-\lambda t} dt \quad (*)$$

Quindi, la conclusione che la nostra variabile discreta ξ_n di Pascal, così come la variabile continua ξ_n , converge in legge verso la variabile ξ di Erlang che notoriamente descrive l'istante aleatorio nel quale si totalizzano r arrivi nelle note ipotesi, diciamole *ipotesi (B)*, che definiscono un processo stocastico (di arrivi) a tempo continuo di Poisson. Giustificiamo ora il risultato espresso in β).

Si tratta di provare che la bernoulliana $B(i(n, x), \lambda/n)$, i cui valori possibili sono indicati in (3) e le rispettive probabilità in (4), ed il cui spettro è riportato in fig. 1 sul piano ortogonale all'asse t nel punto di ascissa $i(n, x)/n$, converge verso una poissoniana η che assume i valori:

$$(22) \quad 0, 1, \dots, k, \dots$$

rispettivamente, con le probabilità

$$(23) \quad e^{-\lambda x}, (\lambda x) e^{-\lambda x}, \dots, \frac{(\lambda x)^k}{k!} e^{-\lambda x}, \dots$$

avente perciò, media e varianza espresse dalle uguaglianze

$$(24) \quad \bar{\eta} = \lambda x; \quad \sigma_{\eta}^2 = \lambda x.$$

La prova è immediata in grazia delle (17) e del fatto che la probabilità indicata in (4) può essere espressa nel seguente altro modo

$$(25) \quad \frac{\lambda^n}{k! n} \left(\frac{i}{n} - \frac{1}{n}\right) \dots \left(\frac{i}{n} - \frac{k-1}{n}\right) \left[\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k-1}\right].$$

È appena il caso di osservare che la media e la varianza di η_n espressa dalle (25), sempre in grazia delle (17) convergono, col divergere di n , verso la media e

(*) È appena il caso di osservare che una prova diretta della *compatibilità* della variabile casuale ξ con la successione $\{H_n\}$ di istogrammi è immediata. Per il teorema della media, assiste infatti la uguaglianza

$$f_n(x) - n \frac{\lambda^n}{(r-1)!} \int_{(x-1)/n}^{x/n} t^{r-1} e^{-\lambda t} dt = f_n(x) - \frac{\lambda^r}{(r-1)!} (n^*)^{r-1} e^{-\lambda x^*}$$

ove, come al solito, si è scritto solo i al posto di $i(n, x)$ ed x^* è un conveniente valore appartenente a $T_{(i(n, x), \lambda/n)}$ e che quindi converge ad x col divergere di n . Tuttavia, anche in questa prova diretta è utilizzata la condizione $F(+\infty) = 1$, perché assume $F(x)$ come funzione di ripartizione della variabile ξ .

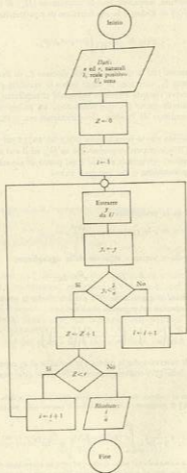


Fig. 4

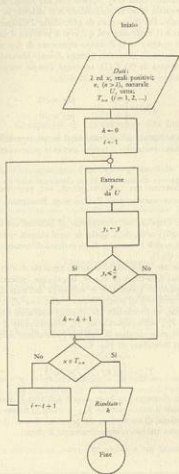


Fig. 5

varianza della η , indicate nella (24). Appare così nel nostro caso, che la convergenza della binomiale verso la poissoniana non richiede la tradizionale costanza del valor medio. Da ultimo resta da giustificare il risultato espresso in γ).

Il ragionamento è il medesimo col quale si è provato il risultato espresso in α) qualora ivi si ponga $r = 1$. Il tempo separatore di due arrivi successivi, che nel caso di un processo stocastico a tempi discreti bernoulliano è la *variabile geometria* \mathcal{G}_n , espressa in (6) e (7), converge dunque verso la variabile \mathcal{G} distribuita con la legge esponenziale

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{per } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{per } x > 0, \end{cases}$$

tale variabile essendo notoriamente *tipica* per il tempo separatore di due arrivi successivi nel processo stocastico a tempo continuo poissoniano $\mathcal{P}(\lambda)$.

6. - UN ALGORITMO PER LA SIMULAZIONE, NEL PROCESSO $\mathcal{B}(\lambda/\alpha)$, DELLA VARIABILE DI PASCAL E DI BERNOULLI

Per semplificare l'esposizione conveniamo di indicare col simbolo U una (possibile, qualsivoglia) urna, dalla quale, in ogni singola estrazione bernoulliana sono equicomparabili i numeri y di un insieme di numeri reali equidistribuiti sull'intervallo $(0, 1)$.

Allora, un algoritmo col quale simulare la variabile di Pascal del processo $\mathcal{B}(\lambda/\alpha)$ è espresso dal flow-chart di Fig. 4, largamente indicativo.

Vi si legge l'ordine di continuare le estrazioni dall'urna U fino a quella i -ma estrazione che prescrive di porre l'intero r nella *scatola* Z , e, una volta raggiunta tale estrazione, di concludere che si sono totalizzati r arrivi nel corso del tratto parziale $T_{i,\alpha}$ dell'equipartizione D_α , discretizzante il tempo.

Un algoritmo col quale simulare la variabile bernoulliana del processo $\mathcal{B}(\lambda/\alpha)$ è espresso dall'altro flow-chart di Fig. 5, ove

$$T_{i,\alpha} = \left\{ t \in \mathbb{R}^+; \frac{i-1}{\alpha} < t < \frac{i}{\alpha} \right\}.$$

Vi si legge l'ordine di continuare le estrazioni dall'urna U fino a quella i -ma estrazione per la quale il tratto parziale $T_{i,\alpha}$ contiene il fissato x , e, una volta raggiunta tale estrazione, di concludere che nel corso di tutto il periodo $]0, x[$, o meglio $]0, i/\alpha[$ sono arrivati complessivamente k clienti.