Rendiconti
Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL
Memorie di Matematica
101° (1983), Vol. VII, fasc. 6, pagg. 51-88

EZIO STAGNARO (*) (**) (***) (****)

Sulle curve razionali non singolari di ordine 4 di $\mathbf{P}^3_k$

On rational non-singular curves of degree 4 in $\mathbf{P}^3_k$

Summary. — The purpose of this paper is to prove the following theorem: let C_4 be a rational non-singular quartic in $\mathbf{P}^3_k$, k algebraically closed field of characteristic $p \neq 2, 3$; then it is not possible to find two surfaces F_3, F_4 in $\mathbf{P}^3_k$, of degree 3, 4 respectively, such that the complete intersection $F_3 \cdot F_4$ of F_3 and F_4 is $3C_4$.

Moreover, in characteristic $p = 3$, we show that there exist C_4, F_3, F_4 such that $F_3 \cdot F_4 = 3C_4$ determining a family $\mathcal{F}$ of C_4 satisfying the above property, and we prove that, under a certain hypothesis, if C_4 is a rational non-singular quartic in $\mathbf{P}^3_k$ such that there exist F_3 and F_4 with $F_3 \cdot F_4 = 3C_4$, then the characteristic of k is $p = 3$ and C_4 belongs to $\mathcal{F}$.

Introduzione

Lo scopo principale di questo lavoro è quello di dimostrare il seguente teorema (cfr. Teor. 3, n. 7).

Teorema: *Sia C_4 una quartica razionale non singolare (ridotta e irriducibile) di $\mathbf{P}^3_k$, k campo algebricamente chiuso di caratteristica $p \neq 2, 3$. Allora non esistono due superficie F_3, F_4 di $\mathbf{P}^3_k$, di ordini 3, 4 rispettivamente, che si osculino lungo C_4* (cioè tali che l'intersezione completa $F_3 \cdot F_4$ di F_3 e F_4 sia $3C_4$).

Dimostriamo inoltre che se la caratteristica di k è $p = 3$, allora esistono C_4, F_3 e F_4 tali che $F_3 \cdot F_4 = 3C_4$ determinando una famiglia $\mathcal{F}$ di C_4 che godono di tale proprietà (cfr. Prop. del n. 9) e sotto una certa ipotesi (cfr. nota del n. 9) proviamo che se C_4 è una quartica razionale non singolare di $\mathbf{P}^3_k$ per la quale esistono F_3 e F_4 con $F_3 \cdot F_4 = 3C_4$, allora la caratteristica di k è $p = 3$ e C_4 appartiene a $\mathcal{F}$.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del G.N.S.A.G.A. del C.N.R.
(**) Indirizzo dell'Autore: Istituto di Matematica Applicata, Via Belzoni 7, 35100 Padova.
(***) Un sunto di questa nota è stato pubblicato negli Atti del Convegno di Geometria Algebrica: *Curve algebriche*, tenuto a Firenze nell'ottobre '81, Istituto di Analisi Globale e Applicata, C.N.R.
(****) Memoria presentata il 18 novembre 1982 da Iacopo Barsotti, uno dei XL.

ISSN-0392-4106

Risultati precedenti erano stati trovati da L. Godeaux (cfr. [1], n. 6, pag. 53) e successivamente da D. Gallarati (cfr. [2], Cap. IV, n. 23, pag. 56 e segg.) i quali, nel caso $k = \mathbf{C}$ = campo complesso, ma con ragionamenti che si estendono subito ad un campo algebricamente chiuso e di caratteristica zero (e forse in caratteristica arbitraria), dimostrano che date due superficie F_3 e F_4 di $\mathbf{P}^3_{\mathbf{C}}$ di ordini 3 e 4 rispettivamente che possiedono su una quartica non singolare C solamente punti doppi biplanari ordinari (cioè punti doppi il cui cono tangente è spezzato in due piani la cui retta comune non giace sulla superficie) con F_3 priva di singolarità in codimensione 1 (cioè priva di rette singolari), allora se F_3 e F_4 si osculano lungo la quartica C si ha che C è una quartica ellittica (cioè non razionale).

In questa nota dimostriamo il risultato precedente senza alcuna ipotesi su F_3 o su F_4.

In [9], n. 5, è dimostrato che le quartiche non singolari C_4 date parametricamente da $\left(\lambda^4, \sum_{i=0}^{4} a_i \lambda^i \mu^{4-i}, \lambda\mu^3, \lambda^3\mu\right)$, $a_i \in k$, in caratteristica $p = 3$, sono curve di osculazione di due superficie F_3 e F_4, con F_3 di equazione $X_0^2 X_2 - X_3^3 = 0$, e tale risultato viene qui riottenuto (cfr. n. 9).

Aggiungiamo che la C_4: $(\lambda^4, \mu^4, \lambda\mu^3, \lambda^3\mu)$ è sottoinsieme intersezione completa di $\mathbf{P}^3_k$ per ogni valore positivo della caratteristica p di k, cfr. [5], exercise 5.6, pag. 125; cfr. anche [10], dove si vede che le due superficie che definiscono tale C_4 sono di ordine elevato dipendente da p e per nessun valore di p sono di ordine 3 e 4.

Recentemente P. C. Craighero (cfr. [11]) ha dimostrato il nostro teorema relativamente alla quartica $(\lambda^4, \mu^4, \lambda\mu^3, \lambda^3\mu)$.

L'ipotesi caratteristica di $k \neq 2$ nel presente lavoro serve solamente per dimostrare l'ultima parte del Lemma 2 del n. 5 e penso che tale ipotesi sia superflua. Per motivi analoghi penso che $\mathcal{F}$ sia, senza alcuna ipotesi, la famiglia di tutte e sole le C_4 tali che $F_3 \cdot F_4 = 3C_4$.

1. Dati P, π, $\mathfrak{C}$ rispettivamente punto, piano, curva algebrica, di $\mathbf{P}^3_k$, k campo algebricamente chiuso, $P \notin \pi$, vogliamo precisare che cosa intendiamo per proiezione della curva $\mathfrak{C}$ dal punto P sul piano π e per cono proiettante $\mathfrak{C}$ da P. Supponiamo dapprima che $\mathfrak{C}$ sia irriducibile e ridotta e che non sia una retta passante per P. In questo caso per proiezione di $\mathfrak{C}$ da P su π intenderemo la curva (= divisore) $\mathfrak{C}' = \mu \mathfrak{C}'_0$ di π, dove $\mathfrak{C}'_0$ è la curva intersezione di π col cono Γ lungo delle rette che escono da P e incontrano $\mathfrak{C}$ (Γ è una superficie ridotta) e μ è il numero (costante) di punti in cui la retta generica di Γ incontra la curva $\mathfrak{C}$ fuori dal vertice di Γ. [Con la frase «retta generica di Γ» intendiamo, come d'uso, una qualunque retta di Γ escluso un numero finito di esse che sono definite di volta in volta dal contesto; con la frase «punto generico», «curva generica», ecc. intenderemo un punto di un aperto di Zariski della varietà algebrica dei punti, delle curve, ecc. che stiamo considerando]. Il cono Γ si chiamerà cono che da P proietta $\mathfrak{C}$. In altre parole la curva $\mathfrak{C}'$ si ottiene così: si considera l'applicazione p: $\mathfrak{C} - \{P\} \to \pi$ definita da $p(A) = A'$

con A' intersezione della retta PA con π; si pone $\mathfrak{C}'_0 = \overline{p(\mathfrak{C} - \{P\})}$ = chiusura di $p(\mathfrak{C} - \{P\})$ (nella topologia di Zariski) e infine $\mathfrak{C}' = \mu\mathfrak{C}'_0$, dove μ = = numero (costante) dei punti della fibra $p^{-1}(A')$, $A' \in p(\mathfrak{C} - \{P\})$. Si noti che il cono Γ è irriducibile.

Se ora $\mathfrak{C} = \sum_i \lambda_i \mathfrak{C}_i$ è il divisore di Weil di una superficie algebrica di $\mathbf{P}^3_k$, $\lambda_i > 0$, con $\mathfrak{C}_i$ curva irriducibile e ridotta che non sia una retta passante per P, allora per proiezione di $\mathfrak{C}$ da P su π intendiamo la curva di π data da $\mathfrak{C}' = \sum_i \lambda_i \mathfrak{C}'_i$ dove $\mathfrak{C}'_i = \mu_i \mathfrak{C}'_{0i}$ è la proiezione di $\mathfrak{C}_i$ definita prima.

$\mathfrak{C} = \sum_i \lambda_i \mathfrak{C}_i$ di ordine m $\left(m = \sum_i \lambda_i \text{ (ordine } \mathfrak{C}_i)\right)$ con un punto s-plo in P, $s > 0$, si proietta da P su π nella curva $\mathfrak{C}' = \sum_i \lambda_i \mu_i \mathfrak{C}'_{0i}$ di ordine $\sum_i \lambda_i \mu_i$ (ordine $\mathfrak{C}'_{0i}) = m - s$ (infatti un piano generico per P incontra $\mathfrak{C}$ in $m - s$ punti (contati con le dovute molteplicità) fuori di P, quindi la generica retta di π incontra $\mathfrak{C}'$ in $m - s$ punti).

2. Per un monoide M di ordine n di $\mathbf{P}^3_k$ intenderemo una superficie algebrica di ordine n di $\mathbf{P}^3_k$ con un punto $(n-1)$-plo. Con un cambiamento di coordinate possiamo assumere che il punto $(n-1)$-plo di M sia $A_0 = (1, 0, 0, 0)$, così l'equazione di M è del tipo

$$M: \alpha(X_1, X_2, X_3)X_0 - \beta(X_1, X_2, X_3) = 0\,,$$
$$M: \alpha X_0 - \beta = 0\,,$$

con α, β polinomi omogenei di $k[X_1, X_2, X_3]$ di gradi rispettivi $n-1, n$; α diverso dal polinomio nullo.

Su M giacciono $n(n-1)$ rette, distinte o variamente coincidenti, passanti per A_0 e definite dall'intersezione completa dei due coni α e β, di equazione $\alpha = 0$ e $\beta = 0$. Nel seguito indicheremo tali rette come rette r_i: $r_1, r_2, \ldots$. Se $\alpha \cdot \beta$ indica l'intersezione completa di α e β avremo allora

$$\alpha \cdot \beta = \nu_1 r_1 + \nu_2 r_2 + \ldots = \sum_i \nu_i r_i\,, \qquad \sum_i \nu_i = n(n-1)\,.$$

Se M è irriducibile allora M è non singolare in codimensione 1 (cioè è privo di curve singolari) se e solo se nessuna retta r_i è singolare per M (infatti se M avesse una curva singolare $\mathfrak{D}$ non formata da rette r_i, ogni retta uscente da A_0 e passante per un punto di $\mathfrak{D}$ incontrerebbe M in più di n punti e quindi giacerebbe su M; così M sarebbe spezzato nel cono che da A_0 proietta $\mathfrak{D}$).

3. D'ora innanzi supporremo che il monoide M sia irriducibile (e quindi ridotto). Sia $\mathfrak{C} = \lambda_0 \mathfrak{C}_0$ una curva su M, con $\mathfrak{C}_0$ irriducibile, ridotta e distinta da una retta uscente da A_0, intersezione completa di M con una superficie G_m, di ordine m, di $\mathbf{P}^3_k$, in simboli

$$M \cdot G_m = \mathfrak{C} = \lambda_0 \mathfrak{C}_0\,, \qquad nm = \lambda_0 (\text{ordine } \mathfrak{C}_0)\,.$$

Se Γ_0 indica il cono che da A_0 proietta $\mathcal{C}_0$, indicheremo con Γ il cono $\Gamma=\lambda_0\Gamma_0$. Denotiamo con

$$k[M]=k[X_0,X_1,X_2,X_3]/(\alpha X_0-\beta)=k[x_0,x_1,x_2,x_3]$$

l'anello delle coordinate omogenee di M e siano g, $\gamma_0\in k[M]$ le proiezioni canoniche dei polinomi che definiscono G_m e Γ_0 rispettivamente. Sia infine $\alpha_1^{n_1}\dots\alpha_t^{n_t}$ la decomposizione di α in fattori irriducibili.

Con le notazioni precedenti si ha

Lemma 1: *Esistono degli interi $a_1,\dots,a_t$, positivi o nulli, tali che, pensando $k[M]$ immerso nel suo campo dei quozienti, si abbia (a meno di costanti)*

$$g=\gamma_0^{\lambda_0}\frac{\alpha_1^{a_1}\dots\alpha_d^{a_d}}{\alpha_{d+1}^{a_{d+1}}\dots\alpha_t^{a_t}}\in k[M],$$

$0<d<t$, *con* $0<a_j<n_j(m-s)$ *per* $j=d+1,\dots,t$; s *molteplicità di* A_0 *per* G_m.

Dimostrazione: Se A_0 è s-plo per G_m, $s>0$, si ha che G_m è definito da un polinomio del tipo

$$G=\Phi_s X_0^{m-s}+\dots+\Phi_{m-1}X_0+\Phi_m,$$

Φ_j forma di grado j di $k[X_1,X_2,X_3]$. La proiezione canonica di G in $k[M]$ sarà allora del tipo

$$g=\varphi_s x_0^{m-s}+\dots+\varphi_{m-1}x_0+\varphi_m.$$

Ora in $k[M]$ abbiamo

$$\alpha^{m-s}g=\varphi_s\beta^{m-s}+\dots+\alpha^{m-s+1}\varphi_{m-1}\beta+\alpha^{m-s}\varphi_m, \tag{1}$$

dove si sono indicate ancora con α e β le proiezioni canoniche dei polinomi α e β in $k[M]$.

Nell'anello di polinomi $k[X_1,X_2,X_3]$ scriviamo la seguente uguaglianza

$$\begin{aligned}\Phi_s\beta^{m-s}+\dots+\alpha^{m-s+1}\Phi_{m-1}\beta+\alpha^{m-s}\Phi_m=\\ =\alpha_1^{b_1}\dots\alpha_t^{b_t}(\Psi_s\beta^{m-s}+\dots+\alpha_1^{c_1}\dots\alpha_t^{c_t}\Psi_m),\end{aligned} \tag{2}$$

$b_j, c_j>0$, dove il polinomio $H=\Psi_s\beta^{m-s}+\dots+\alpha_1^{c_1}\dots\alpha_t^{c_t}\Psi_m$ è privo di fattori α_j. Il lemma è allora dimostrato se dimostriamo che H è il polinomio che definisce il cono $\Gamma=\lambda_0\gamma_0$, infatti ciò equivale a dimostrare che, detta h la proiezione canonica di H in $k[M]$, si ha (a meno di costanti)

$$h=\gamma_0^{\lambda_0};$$

dalla (1) e (2) si ha allora $\alpha^{m-s}g=\alpha_1^{b_1}\dots\alpha_t^{b_t}\gamma_0^{\lambda_0}$, da cui segue subito la tesi.

Osserviamo che gli interi a_j sono così definiti: se $n_j(m-s)-b_j>0$, $j=d+1, \dots, t$, allora $a_j = n_j(m-s)-b_j$; se $n_j(m-s)-b_j<0$, $j=1, \dots, d$, allora $a_j = b_j - n_j(m-s)$. In particolare si ha $0<a_j<n_j(m-s)$ per $j=d+1, \dots, t$.

Proviamo allora che H definisce Γ. Indicando ancora con H il cono definito dal polinomio H, proviamo che $H=\Gamma$. Intanto si ha che H e Γ coincidono come luoghi di zeri, cioè coincidono i coni ridotti H_{red} e $\Gamma_{red}=\Gamma_{0\,red}$ associati ad H e a Γ. Infatti proviamo che $H_{red} \subset \Gamma_{red}$. Per fare questo basta far vedere che per un aperto (di Zariski) denso U di H_{red}, si ha $U \subset \Gamma_{red}$: Poichè H non contiene alcun α_j a fattore, si ha che $U = H_{red} - (H_{red} \cap \alpha_{red})$ è un aperto denso in H_{red}. Ora se $P \in U$ si ha che la retta A_0P incontra M in un punto $P_1 \neq A_0$ (perchè $\alpha(P) \neq 0$). Così $P_1 \in H_{red} \cap M$ e $\alpha(P_1) \neq 0$. Dalle (1) e (2) in $k[M]$ si ha $\alpha^{m-s} g = \alpha_1^{h_1} \dots \alpha_t^{h_t} h$ che equivale a $\alpha^{m-s} G = \alpha_1^{h_1} \dots \alpha_t^{h_t} H + A(\alpha X_0 - \beta)$ in $k[X_0, X_1, X_2, X_3]$; da cui si ha $G(P_1)=0$, cioè $P_1 \in \mathfrak{C}_0$ e la retta A_0P è contenuta in Γ_{red}, così $P \in \Gamma_{red}$, cioè $U \subset \Gamma_{red}$. Viceversa, detto

$$V = \Gamma_{red} - \left\{ \Gamma_{red} \cap \left(\bigcup_i r_i \right) \right\},$$

si prova analogamente che $V \subset H_{red}$, cioè $\Gamma_{red} \subset H_{red}$ e quindi $H_{red} = \Gamma_{red}$.

Dimostriamo ora che H e $\Gamma = \lambda_0 \Gamma_0$ coincidono come divisori di $\mathbf{P}_k^3$. Poichè H e Γ coincidono come luoghi di zeri e poichè sono coni con vertice in A_0, basta dimostrare che se intersechiamo H e Γ con un piano π non passante per A_0 (ad es. come π si può prendere il piano $X_0=0$) e se $\mathfrak{D}$ è una curva irriducibile e ridotta su π comune ad H e a Γ, allora la molteplicità di intersezione di H e π lungo $\mathfrak{D}$ coincide con la molteplicità di intersezione di Γ e π lungo $\mathfrak{D}$, in simboli

$$I(\mathfrak{D}, \Gamma \cap \pi) = I(\mathfrak{D}, H \cap \pi). \tag{3}$$

Premettiamo il seguente risultato: la molteplicità di intersezione di una varietà V algebrica proiettiva ridotta e irriducibile di $\mathbf{P}_k^n$ con un'ipersuperficie G', definita dal polinomio G', lungo una sottovarietà irriducibile $\mathbb{W}$ di V, $\mathbb{W}$ non singolare per V, si può calcolare in un aperto (di Zariski) non vuoto U_0 di $\mathbb{W}$. Infatti basta dimostrare l'affermazione nel caso in cui $U_0 = \mathbb{W} \cap U$ con $U = \mathbf{P}_k^n - \{F=0\}$. Consideriamo in questo caso l'anello a valutazione discreta (brevemente DVR) $A = (k[V]_f)_{\mathfrak{J}(\mathbb{W})^*}$, con $\mathfrak{J}(\mathbb{W})$ ideale primo di $k[V]$ definito da $\mathbb{W}$, $\mathfrak{J}(\mathbb{W})^* = \mathfrak{J}(\mathbb{W}) k[V]_f$ e f proiezione canonica del polinomio F, dire che $I(U_0, (V \cap U) \cap (G' \cap U)) = \mu$ significa che se τ è un parametro uniformizzante di A, si ha $g' = u\tau^{\mu}$, con u unità in A, g' immagine canonica del polinomio G'. Usando l'isomorfismo $A \cong (k[V]_{\mathfrak{J}(\mathbb{W})})_f = B_f$, oppure togliendo i denominatori del tipo f^n nell'ultima uguaglianza, si ottiene nel DVR B $g_1' = u_1 \tau_1^{\mu}$, con u_1 unità, τ_1 parametro uniformizzante di B e g_1' proiezione canonica di G' in B. E questo significa $I(\mathbb{W}, V \cap G') = \mu$. Come affermato.

Ciò premesso scegliamo, nel nostro caso, $V = \pi$, $\mathbb{W} = \mathfrak{D}$ e $G' = \Gamma$ in $\mathbf{P}_k^3$.

Come F prendiamo il polinomio α, che definisce il cono α, cioè scegliamo $U = \mathrm{P}_3^n - \alpha$. Osserviamo ora che $M - \alpha$ è isomorfo a $\pi - \alpha$ mediante la restrizione della proiezione da A_0 su π a $M - \alpha$. Dall'isomorfismo precedente segue che la proiezione della curva $\mathfrak{C} = \lambda_0 \mathfrak{C}_0$ da A_0 su π è la curva $\mathfrak{C}' = \lambda_0 \mathfrak{C}_0'$, con $\mathfrak{C}_0'$ proiezione di $\mathfrak{C}_0$ da A_0 su π, cioè la retta generica del cono Γ_0 incontra $\mathfrak{C}_0$ in un solo punto fuori di A_0 (cfr. n. 1). In particolare abbiamo che, nella proiezione precedente, $\mathfrak{C}_0 \cap U$ è isomorfa a $\mathfrak{C}_0' \cap U$. Pertanto, essendo $\Gamma = \lambda_0 \Gamma_0$ con Γ_0 cono che da A_0 proietta $\mathfrak{C}_0$ su π, si ha

$$(4) \qquad I(\mathfrak{C}_0 \cap U, (\Gamma_0 \cap U) \cap (M \cap U)) = I(\mathfrak{C}_0' \cap U, (\Gamma_0 \cap U) \cap (\pi \cap U)).$$

Ora Γ_0 è per definizione un cono ridotto, quindi il primo e secondo membro della (4) valgono 1 e quindi per il risultato premesso, essendo 1 la molteplicità di intersezione in un aperto, vale 1 su tutto $\mathfrak{C}_0'$, cioè il primo membro della (3), per $\mathfrak{D} = \mathfrak{C}_0'$, vale λ_0. Dobbiamo provare che anche il secondo membro della (3) vale λ_0 per $\mathfrak{D} = \mathfrak{C}_0'$. Poichè abbiamo già provato che $\Gamma_0 = \Gamma_{\mathrm{rid}} = H_{\mathrm{rid}}$, sostituendo nella (4) abbiamo

$$(5) \qquad I(\mathfrak{C}_0 \cap U, (H_{\mathrm{rid}} \cap U) \cap (M \cap U)) =$$
$$= I(\mathfrak{C}_0' \cap U, (H_{\mathrm{rid}} \cap U) \cap (\pi \cap U)) = 1 .$$

Poniamo $H = \mu_0 H_{\mathrm{rid}}$ (si noti che $H_{\mathrm{rid}} = \Gamma_0$ è irriducibile). Dalla (5) abbiamo

$$(6) \qquad I(\mathfrak{C}_0 \cap U, (H \cap U) \cap (M \cap U)) = \mu_0 .$$

Ora essendo M irriducibile $\mathfrak{C}_0$ è non singolare per M (cfr. n. 2) pertanto, dal risultato premesso, la (6) equivale a

$$(6') \qquad I(\mathfrak{C}_0, H \cap M) = \mu_0 .$$

Ma in $k[M]_{\mathfrak{J}(\mathfrak{C}_0)}$ abbiamo $\alpha^{m-s} g = \alpha_1^{\lambda_1} \dots \alpha_t^{\lambda_t} b$ e per ipotesi $I(\mathfrak{C}_0, G \cap M) = \lambda_0$, quindi, non passando α_i per $\mathfrak{C}_0$, equivalentemente essendo gli α_i invertibili in $k[M]_{\mathfrak{J}(\mathfrak{C}_0)}$, si ha $I(\mathfrak{C}_0, H \cap M) = \lambda_0$. Così $\mu_0 = \lambda_0$, cioè il primo membro della (3) per $\mathfrak{D} = \mathfrak{C}_0$ vale λ_0.

Poichè Γ_0 è irriducibile la (3) va verificata per la sola curva $\mathfrak{C}_0$. Così il lemma è provato completamente.

Nel corso della dimostrazione del Lemma 1 abbiamo dimostrato (cfr. (4) e le tre righe seguenti la (4)) il

Corollario: La molteplicità di intersezione di Γ_0 e M lungo $\mathfrak{C}_0$ è 1, in simboli $I(\mathfrak{C}_0, \Gamma_0 \cap M) = 1$.

Osservazione 1: Se M è privo di rette singolari, allora il Lemma 1 ammette un inverso nel modo seguente: se $a_1, \dots, a_t$ sono interi positivi o nulli tali che il divisore di Weil associato all'elemento del campo dei quozienti di $k[M]$

$$g' = \gamma_0^{\lambda_0} \frac{\alpha_1^{\lambda_1} \dots \alpha_s^{\lambda_s}}{\alpha_{s+1}^{\lambda_{s+1}} \dots \alpha_t^{\lambda_t}}$$

sia la curva $\mathfrak{C} = \lambda_0 \mathfrak{C}_0$, allora $\mathfrak{C}$ è l'intersezione completa di M con una superficie G di $\mathbf{P}_k^3$. Infatti, poichè M è privo di rette singolari, M è non singolare in codimensione 1 (cfr. n. 2), quindi $k[M]$ è integralmente chiuso (cfr. [3], Prop. 2, pag. 391). Per il teorema di struttura dei domini noetheriani integralmente chiusi e per le ipotesi si ha allora $g' \in k[M]$ e la superficie G è definita da un polinomio rappresentante di g'.

4. In tutto il seguito C_4 denoterà una quartica razionale non singolare di $\mathbf{P}_k^3$ (ridotta e irriducibile).

Supponiamo che esistano due superficie F_3 e F_4, di ordini 3 e 4 rispettivamente, in $\mathbf{P}_k^3$ la cui intersezione completa è $3C_4$; diremo brevemente che F_3 e F_4 si osculano lungo C_4. Si ha intanto che F_3 è irriducibile (altrimenti C_4 sarebbe riducibile o piana).

Dimostriamo che *F_3 possiede dei punti singolari su C_4*. Se F_3 è non singolare in codimensione 1, allora F_3 è normale (cfr. [3], Prop. 2, pag. 391) e se F_3 non avesse punti singolari su C_4, allora C_4 sarebbe intersezione completa di F_3 con un'altra superficie di $\mathbf{P}_k^3$ (cfr. [7] nel caso caratteristica di $k = 0$ e [8] nel caso caratteristica di $k > 0$) e ciò per il teorema di Bézout è assurdo. Supponiamo ora che F_3 sia singolare in codimensione 1. Poichè F_3 è irriducibile essa possiede una retta doppia (perchè ogni corda della curva singolare di F_3 giace su F_3). Intersecando allora F_3 con un piano π passante per la retta doppia, chiamiamola r, di F_3, abbiamo che π incontra F_3 in $2r$ e in un'ulteriore retta r', in simboli $\pi \cdot F_3 = 2r + r'$. D'altra parte π incontra C_4 in quattro punti P_1, P_2, P_3, P_4 che non possono giacere tutti sulla retta r' (altrimenti il piano del fascio di piani di asse r' passante per un punto P di C_4, $P \neq P_i$, $\forall i$, conterrebbe C_4). Così r e C_4 hanno qualche punto in comune e anche in questo caso F_3 possiede dei punti singolari su C_4.

Poichè F_3 possiede dei punti singolari su C_4 possono darsi due casi: F_3 ha un punto doppio su C_4 e allora F_3 è un monoide irriducibile, oppure F_3 ha un punto triplo su C_4 e allora F_3 è un cono irriducibile che proietta C_4 da un punto di C_4.

Osserviamo che se Γ_0 è un cono che proietta C_4 da un punto di C_4, allora Γ_0 è di ordine 3 (cfr. n. 1) e Γ_0 ha una generatrice doppia (infatti se così non fosse, C_4 sarebbe birazionalmente equivalente (e quindi isomorfa) ad una cubica piana non singolare, così C_4 sarebbe genere 1). In particolare, nel caso considerato sopra in cui F_3 è un cono, si ha che F_3 ha una retta doppia, e quindi può anch'esso essere considerato come un monoide, assumendo come punto doppio di F_3 un punto della retta doppia che non sia triplo per F_3. Ora se la C_4 incontra la retta doppia di F_3 in un punto P che non è triplo per F_3, possiamo pensare F_3 come un monoide con punto doppio in P e cadiamo nel primo dei due casi considerati sopra, ma può darsi che C_4 incontri la generatrice doppia di F_3 nel solo punto triplo (vedremo che ciò capita effettivamente). Pertanto i due casi che possono darsi sono i seguenti: F_3 è un monoide irriducibile con punto doppio su C_4, oppure F_3 è un monoide irriducibile con punto doppio non giacente su C_4 ed inoltre F_3 è un cono con una generatrice doppia e con vertice su C_4 e C_4 incontra la generatrice doppia di F_3 solamente nel vertice di F_3.

5. Cominciamo ad esaminare il caso in cui F_3 è un monoide irriducibile con un punto doppio su C_4. A meno di un cambiamento di coordinate, possiamo assumere che tale punto doppio sia $A_0 = (1, 0, 0, 0)$ e che quindi F_3, che per uniformità di notazioni con i numeri precedenti, indicheremo con M, abbia equazione

$$F_3 = M \colon \alpha X_0 - \beta = 0 .$$

Se Γ_0 è il cono che da A_0 proietta C_4 allora Γ_0 ha una generatrice doppia (n. 4) e si ha

Lemma 2: *Supponiamo che la caratteristica di k sia $p \neq 2, 3$. Allora la generatrice doppia di Γ_0 è una retta r_i di M* (r_i retta comune ad α e a β).

Dimostrazione: Intanto si ha che la generatrice doppia di Γ_0 coincide con la retta r trisecante C_4 e uscente da A_0 (ciò si vede, ad esempio, considerando un fascio di piani di asse r). Siano A_0, B_1, B_2 i tre punti, distinti o variamente coincidenti in cui r incontra C_4. Distinguiamo dapprima due casi: $B_i \neq A_0$, $\forall i$, oppure, ad es., $B_1 = A_0$. Nel primo caso la retta r incontra M fuori di A_0 in due punti, distinti o coincidenti, e poichè $\alpha X_0 - \beta$ è lineare in X_0 ciò significa che r giace su M, cioè r coincide con una delle rette r_i. Se $B_1 = A_0$ allora r è la retta tangente in A_0 a C_4. È noto allora che r è una retta del cono α tangente in A_0 a M (cfr., ad es., [6], Cap. VII, § 49, pag. 241) e d'altra parte si dimostra immediatamente nel seguente modo, valido per ogni valore della caratteristica del campo k. Possiamo metterci nella carta affine $\mathbf{A}_k^3 = \mathbf{P}_k^3 - \{X_0 = 0\}$ e quindi possiamo supporre A_0 uguale all'origine $O = (0, 0, 0)$ di $\mathbf{A}_k^3$. Poichè $C_4^a = C_4 \cap \mathbf{A}_k^3$ giace su $M^a = M \cap \mathbf{A}_k^3$, M^a definita dal polinomio $\alpha - \beta$, si ha che l'ideale I di C_4^a contiene il polinomio $\alpha - \beta$ e poichè la tangente r^a a C_4^a in O è definita dall'ideale $I^* = \{f^*, f \in I\}$, dove se $f = \sum_{i=s}^{N} f_i$, con f_i forme di grado i, allora $f^* = f_s$ (cfr. ad es., [3], pag. 303), si ha $\alpha \in I^*$ e quindi r appartiene al cono α. Ora le rette del cono α sono caratterizzate dall'avere molteplicità di intersezione con M in $A_0 > 3$, pertanto se $B_2 \neq A_0$ si ha ancora $r \in M$.

Resta infine da esaminare il caso $A_0 = B_1 = B_2$. Per dimostrare il lemma in questo caso abbiamo bisogno, per la dimostrazione che daremo, del fatto che la caratteristica del campo k sia $p \neq 2, 3$. Scartando questi due valori della caratteristica, si vede dai calcoli che faremo, che possiamo adoperare le derivate e le formule usuali della geometria in caratteristica zero; pertanto non richiameremo di volta in volta dove adopereremo l'ipotesi $p \neq 2, 3$, anzi, lavoreremo come se fossimo in caratteristica zero.

Il caso $A_0 = B_1 = B_2$ significa che il piano osculatore in A_0 a C_4 è indeterminato. Possiamo limitarci a considerare il caso affine $A_k^3 = P_k^3 - \{X_0 = 0\}$, $A_0 = (0, 0, 0)$, M: $\alpha - \beta = 0$, C_4 di equazioni parametriche $(x(t), y(t), z(t))$, t parametro. (Per semplicità abbiamo chiamato ancora con M e C_4 le loro rispettive parti affini e abbiamo chiamato ancora con A_0 l'origine di A_k^3). Poichè l'equazione del piano osculatore di C_4 nell'origine è

$$\pi_0 \colon \begin{vmatrix} x & y & z \\ x'(0) & y'(0) & z'(0) \\ x''(0) & y''(0) & z''(0) \end{vmatrix} = 0$$

dove l'apice $(\;)'$ indica la derivata rispetto a t. Ora π_0 indeterminato significa

(7) $\qquad x''(0) = \varrho x'(0)\,, \; y''(0) = \varrho y'(0)\,, \; z''(0) = \varrho z'(0)\,, \qquad \varrho \in k\,.$

Poniamo $f(x, y, z) = \alpha(x, y, z) - \beta(x, y, z)$. Poichè C_4 giace su M si ha

(8) $\qquad f(x(t), y(t), z(t)) = 0 \qquad$ (identicamente rispetto a t).

Deriviamo tre volte la (8) rispetto a t. Indicando, come d'uso, con $(\;)_x$, $(\;)_y$, $(\;)_z$ le derivate parziali rispetto a x, y, z, si ottiene

$$\begin{aligned} f''' = \{&f_{xxx}x'^3 + 3f_{xxy}x'^2y' + 3f_{xyy}x'y'^2 + 6f_{xyz}x'y'z' + \\ &+ 3f_{xxz}x'^2z' + f_{yyy}y'^3 + 3f_{yyz}y'^2z' + 3f_{yzz}y'z'^2 + 3f_{zzz}z'^3\} + \\ &+ 2[f_{xx}x'x'' + f_{xy}(x''y' + x'y'') + f_{yy}y'y'' + \\ &+ f_{xz}(x''z' + x'z'') + f_{yz}(y''z' + y'z'') + f_{zz}z'z''] + \\ &+ ((f_x)'x'' + f_x x''' + (f_y)'y'' + f_y y''' + (f_z)'z'' + f_z z''') = 0\,. \end{aligned}$$

Ora le derivate parziali terze di α sono tutte nulle, pertanto le derivate parziali terze di f coincidono con le derivate parziali terze di β. Così nelle parentesi graffe $\{...\}$ dell'espressione di f''' possiamo sostituire f con β e abbiamo

$$f''' = \{\beta_{xxx}x'^3 + ...\} + 2[f_{xx}x'x'' + ...] + (f_x x''' + ...) = 0\,.$$

Calcoliamo ora f''' in $t = 0$. Poichè $f_x(0) = f_y(0) = f_z(0) = 0$, tenendo conto delle (7) il termine fra le parentesi rotonde $(...)$ nell'espressione di $f'''(0)$ diventa

$$\varrho((f_x)'(0)x'(0) + (f_y)'(0)y'(0) + (f_z)'(0)z'(0)) = \varrho f''(0) = 0\,.$$

Tenendo ancora conto delle (7) il termine fra le parentesi quadre $[...]$ nella espressione di $f''(0)$ diventa

$$(9) \qquad f_{xx}(0)x'^2(0) + 2f_{xy}(0)x'(0)y'(0) + \ldots + f_{zz}(0)z'^2(0)\,.$$

Ora la retta r trisecante C_4 e uscente da A_0, nel casi che stiamo esaminando $A_0 = B_1 = B_2$, è in particolare la retta tangente in A_0 a C_4, cioè r ha equazioni parametriche $(x'(0)u, y'(0)u, z'(0)u)$, u parametro. Sappiamo inoltre, dal caso $A_0 = B_1$, che la retta r giace sul cono α (si può dimostrare ciò anche col procedimento che stiamo seguendo deducendolo dal fatto che $f' = 0$); abbiamo allora

$$\alpha(x'(0)u, y'(0)u, z'(0)u) = u^2\alpha(x'(0), y'(0), z'(0)) = 0\,,$$

cioè

$$\alpha(x'(0), y'(0), z'(0)) = 0\,.$$

Per il teorema di Eulero sulle funzioni omogenee abbiamo

$$(10) \qquad 2\alpha = \alpha_{xx}(0,0,0)x^2 + 2\alpha_{xy}(0,0,0)xy + \ldots + \alpha_{zz}(0,0,0)z^2\,.$$

Poichè le derivate seconde di β calcolate in $(0,0,0)$ sono tutte nulle, nelle (10) possiamo sostituire α con f. La (9) è pertanto uguale a

$$2\alpha(x'(0), y'(0), z'(0)) = 0\,.$$

Abbiamo così

$$(11) \qquad f'''(0) = \{\beta_{xxx}(0)x'^3(0) + \ldots + \beta_{zzz}(0)z'^3(0)\} = 0\,.$$

Ancora per Eulero abbiamo

$$6\beta = \beta_{xxx}(0,0,0)x^3 + \ldots + \beta_{zzz}(0,0,0)z^3\,.$$

La (11) dice allora che la retta r giace su β, cioè r è una retta r_i. C.V.D.

Nota: Penso che il Lemma 2 valga senza l'ipotesi: caratteristica di k diversa da 2 e da 3.

6. In questo numero iniziamo la dimostrazione del teorema dell'Introduzione. Precisamente

Teorema 1: *Supponiamo che la caratteristica di k sia $p \neq 2, 3$. Sia F_3 un monoide irriducibile del terzo ordine F_3: $\alpha X_0 - \beta = 0$ di $\mathbf{P}_k^3$ con punto doppio in A_0 e C_4 una curva razionale non singolare di $\mathbf{P}_k^3$ giacente su F_3 e passante per A_0. Allora non esiste alcuna superficie F_4 del quarto ordine che osculi F_3 lungo C_4.*

Dimostrazione: Supponiamo per assurdo che tale F_4 esista. Indichiamo al solito F_3 con M e consideriamo l'anello delle coordinate omogenee di $M = F_3$:

$$k[M] = k[X_0, X_1, X_2, X_3]/(\alpha X_0 - \beta) = k[x_0, x_1, x_2, x_3] .$$

Siano g e γ_0 le proiezioni canoniche in $k[M]$ dei polinomi che definiscono rispettivamente F_4 e il cono Γ_0 che da A_0 proietta C_4. Dal Lemma 1 del n. 3, tenendo conto che $k[M]$ è un anello graduato, che g e γ_0 hanno gradi 4 e 3 rispettivamente, che F_4 passa per A_0 e che $0 < a_j < n_j 3$, per $j = d+1, \ldots, t$, si hanno solamente i due casi

I Caso. $g = \gamma_0^3/\alpha_1^5$ se $\alpha_1 = \alpha_2$ (a meno di costanti), cioè $n_1 = 2$; A_0 è punto doppio uniplanare per M.

II Caso. $g = \gamma_0^3/\alpha_1^3 \alpha_2^2$ se $\alpha_1 \neq \alpha_2$ (a meno di costanti), cioè $n_1 = n_2 = 1$; A_0 è punto doppio biplanare per M.

In particolare abbiamo che α è riducibile.

Esaminiamo il I Caso. Il divisore di Weil di M definito da g è per ipotesi $3C_4$, in particolare g non definisce alcuna retta r_i di M; pertanto il divisore di Weil definito da

$$\frac{\gamma_0^3}{\alpha_1^5}$$

non deve contenere alcuna retta r_i, cioè si deve avere

$$I(r_i, M \cap \Gamma_0^3) = I(r_i, M \cap \alpha_1^5) = I(r_i, \alpha_1^5 \cap \beta) , \qquad \forall r_i ;$$

che si può scrivere

$$3I(r_i, M \cap \Gamma_0) = 5I(r_i, \alpha_1 \cap \beta) , \qquad \forall r_i . \tag{12}$$

Dalla (12) si ha che le 6 rette r_i di M coincidono tutte e, chiamando r_1 questa unica retta, abbiamo

$$\begin{cases} I(r_1, \alpha_1 \cap \beta) = 3 , \\ I(r_1, M \cap \Gamma_0) = 5 . \end{cases} \tag{13}$$

Vediamo ora di semplificare l'equazione di M mediante opportuni cambiamenti di coordinate.

Intanto, a meno di un cambiamento di coordinate, possiamo assumere che l'equazione di α_1 sia $X_1 = 0$ e che le equazioni di r_1 siano $\begin{cases} X_1 = 0 \\ X_2 = 0 \end{cases}$. Poichè dalla prima uguaglianza delle (13) l'intersezione completa $\alpha_1 \cdot \beta$ di α_1 e β è $3r_1$, si vede che β è del tipo

$$\beta = X_1 \varphi_2 + X_2^3 \qquad \text{con } \varphi_2 \text{ forma di grado } 2 .$$

Il polinomio che definisce M è allora del tipo

$$M\colon \alpha X_0 - \beta = X_1^2 X_0 - X_1 \varphi_2 - X_2^5 .$$

Raccogliendo parzialmente la X_1 da φ_2, si ottiene

$$\alpha X_0 - \beta = X_1^2 X_0 + X_1^2 \varphi_1 + X_1(aX_2^2 + bX_2X_3 + cX_3^2) - X_2^5 ,$$

con φ_1 forma di grado 1, $a, b, c \in k$.

Operando il cambiamento di coordinate $X_0' = X_0 + \varphi_1$, $X_j' = X_j$, $j \neq 0$, togliendo gli apici, possiamo scrivere

$$M\colon \alpha X_0 - \beta = X_1^2 X_0 + X_1(aX_2^2 + bX_2X_3 + cX_3^2) - X_2^5 .$$

Ciò premesso consideriamo il cono Γ_0 che da A_0 proietta C_4; dal Lemma 2 del n. 5 sappiamo che Γ_0 ha una generatrice doppia nella retta r_1. Pertanto l'equazione di Γ_0 sarà del tipo

$$\Gamma_0\colon (a_1X_1^2 + a_2X_1X_2 + a_3X_2^2)X_3 + b_1X_1^3 + b_2X_1^2X_2 + b_3X_1X_2^2 + b_4X_2^3 = 0 ,$$
$$a_i, b_i \in k .$$

Ora si ha $I(C_4, M \cap \Gamma_0) = 1$ (cfr. corollario al Lemma 1, n. 3); per il teorema di Bézout, abbiamo allora

$$M \cdot \Gamma_0 = C_4 + 5r_1 .$$

Se intersechiamo la curva $C_4 + 5r_1$ con un piano π non passante per r_1, nè per i punti comuni a C_4 e a r_1, si ha che π interseca C_4 in 4 punti P_1, P_2, P_3, P_4 (distinti o variamente coincidenti) e π interseca $5r_1$ in $5P$, con $P = \pi \cap r_1$ e $P \neq P_i$. Questo significa che, dette C_M e C_0 le curve sezioni di π con M e Γ_0 rispettivamente, nel piano π, si deve avere

$$C_M \cdot C_0 = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + 5P .$$

Poichè abbiamo detto $P \neq P_i$, in particolare abbiamo

$$I(r_1, M \cap \Gamma_0) = I(P, C_M \cap C_0) .$$

Dalla seconda uguaglianza delle (13) abbiamo allora

$$I(r_1, M \cap \Gamma_0) = I(P, C_M \cap C_0) = 5 . \tag{14}$$

Per calcolare la molteplicità di intersezione possiamo passare alle coordinate non omogenee $X_0 = 1$, $X_1 = X$, $X_2 = Y$, $X_3 = Z$; abbiamo

$$M^a:\ X^2 + X(aY^2 + bYZ + cZ^2) - Y^3 = 0\,,$$

$$\Gamma_0^a:\ (a_1X^2 + a_2XY + a_3Y^2)Z + b_1X^3 + b_2X^2Y + b_3XY^2 + b_4Y^3 = 0\,.$$

Intersechiamo ora col piano

$$\pi:\ Z - \lambda = 0\,, \qquad \lambda \text{ parametro}\,.$$

Esistono dei valori del parametro λ per cui π soddisfa alle condizioni dette sopra.

$$C_M^a:\ c\lambda^2X + X^2 + b\lambda XY + aXY^2 - Y^3 = 0\,,$$

$$C_0^a:\ (a_1X^2 + a_2XY + a_3Y^2)\lambda + b_1X^3 + b_2X^2y + b_3XY^2 + b_4Y^3 = 0\,.$$

L'uguaglianza (14) si mantiene passando all'affine, cioè si ha (con ovvio significato dei simboli)

$$(14^a) \qquad I(r_1^a, M^a \cap \Gamma_0^a) = I(P^a, C_M^a \cap C_0^a) = 5\,.$$

Ora le curve C_M^a e C_0^a anzichè leggerle sul piano $Z - \lambda = 0$ si possono leggere sul piano $Z = 0$, così $P^a = O = (0, 0, 0)$. Per calcolare $I(O, C_M^a \cap C_0^a)$ è comodo usare il metodo assiomatico come esposto in [4], Ch. 3, § 3, pp. 74-75. Affinchè $I(O, C_M^a \cap C_0^a) > 2$ le due curve devono avere in O qualche tangente singolare comune. Supponiamo $c \neq 0$, allora $a_3 = 0$. Poichè $I(O, C_M^a \cap C_0^a) = I(O, C_M^a \cap C_0^a - b_4 C_M^a)$ o più semplicemente ricavando dalla prima $Y^3 = c\lambda^2X + X^2 + b\lambda XY + aXY^2$ e sostituendolo nella seconda, si ottiene

$$X[cb_4\lambda^2 + (a_1\lambda + b_4)X + (a_2 + bb_4)\lambda Y + b_1X^2 + b_2XY + (b_3 + ab_4)Y^2] = 0\,.$$

Così $C_M^a \cdot C_0^a = 3(0, 0, 0) + C_M^a \cdot D_0^a$ con D_0^a: $cb_4\lambda^2 + \dots + (b_3 + ab_4)Y^2 = 0$. Ora affinchè $I(O, C_M^a \cap D_0^a) = 2$ deve essere $cb_4 = 0$, $a_2 + bb_4 \neq 0$. Poichè $b_4 \neq 0$ (altrimenti C^a e Γ_0 sarebbero riducibili) le condizioni sono $c = 0$, $a_2 + bb_4 \neq 0$ e ciò contraddice $c \neq 0$. Perciò abbiamo $c = 0$. Ancora usando $I(O, C_M^a \cap C_0^a) = 5$, da $c = 0$ segue $a_3 = 0$ e $a_2 + bb_4 \neq 0$.

In definitiva le uguaglianze (13) sono soddisfatte se e solo se le equazioni di M e di Γ_0 sono, a meno di un cambiamento di coordinate, del tipo

$$M:\ X_1^2X_0 + X_1(aX_2^2 + bX_2X_3) - X_2^3 = 0\,,$$

$$\Gamma_0:\ (a_1X_1^2 + a_2X_1X_2)X_3 + b_1X_1^3 + b_2X_1^2X_2 + b_3X_1X_2^2 + b_4X_2^3 = 0\,,$$

con $a_2 + bb_4 \neq 0$.

Premesso ciò ricordiamo che, detto $k[M] = k[x_0, x_1, x_2, x_3]$, dobbiamo avere

$$g = \frac{\gamma_0^3}{\alpha_1^3} = \frac{[(a_1 x_1^2 + a_2 x_1 x_2)x_3 + b_1 x_1^3 + b_2 x_1^2 x_2 + b_3 x_1 x_2^2 + b_4 x_2^3]^3}{x_1^3} \in k[M].$$

Svolgendo il cubo di γ_0 fra gli addendi abbiamo il termine dato da $b_4^3(x_2^9/x_1^3)$. Sostituendo in esso più volte $x_2^3 = x_1^2 x_0 + x_1(a x_2^2 + b x_2 x_3)$ otteniamo

$$b_4^3 \frac{(x_1 x_0 + a x_2^2 + b x_2 x_3)^3}{x_1^2} = b_4^3 \Big[x_1 x_0^3 + a^3 (x_1 x_0 + a x_2^2 + b x_2 x_3)^2 +$$

$$+ b^3 \frac{x_3^3}{x_1}(x_1 x_0 + a x_2^2 + b x_2 x_3) + 3a x_0^2 x_2^2 + 3b x_0^2 x_2 x_3 + 3a^2 x_0 x_2 (x_1 x_0 + a x_2^2 + b x_2 x_3) +$$

$$+ 3b^2 \frac{x_0 x_2^2 x_3^2}{x_1} + 3a^2 b x_0 x_2^2 x_3 + 3a^2 b x_3 (a x_2 + b x_3)(x_1 x_0 + a x_2^2 + b x_2 x_3) +$$

$$+ 3ab^2 x_0 x_2 x_3^2 + 3a^2 b^2 x_3^2 (x_1 x_0 + a x_2^2 + b x_2 x_3) + 3ab^2 \frac{x_2^2 x_3^2}{x_1} \Big] =$$

$$= h_0 + \frac{b_4^3}{x_1}[b^3 x_3^3 (a x_2^2 + b x_2 x_3) + 3b^2 x_0 x_2^2 x_3^2 + 3ab^2 x_2^2 x_3^2] = h_0 + h_1 ,$$

$$\text{con } h_0 \in k[M] .$$

Ora essendo $b_4 \neq 0$ (altrimenti Γ_0 sarebbe riducibile) si ha $h_1 \in k[M]$ se e solo $b = 0$; infatti se $h_1 \in k[M]$, nell'anello di polinomi $k[X_0, X_1, X_2, X_3]$ avremmo

$$b^3 X_3^3 (a X_2^2 + b X_2 X_3) + 3b^2 X_0 X_2^2 X_3^2 + 3ab^2 X_2^2 X_3^2 = X_1 F(X_0, X_1, X_2, X_3) +$$

$$+ [X_1^2 X_0 + X_1(a X_2^2 + b X_2 X_3) - X_2^3] A(X_0, X_1, X_2, X_3),$$

con $F(X_0, X_1, X_2, X_3)$, $A(X_0, X_1, X_2, X_3) \in k[X_0, X_1, X_2, X_3]$, e ponendo $X_1 = 0$ avremmo che il primo membro dell'uguaglianza precedente è divisibile per X_2^3 e ciò è vero se e solo se $b = 0$. D'altra parte se $h_1 \notin k[M]$, poichè $g \in k[M]$ deve esistere un addendo nel cubo di γ_0 che si elide con h_1. Poichè

$$\frac{(b_1 x_1^3 + b_2 x_1^2 x_2 + b_3 x_1 x_2^2)^3}{x_1^3} \in k[M]$$

l'addendo che deve elidere h_1 ha a fattore $a_1 x_1^2 x_3$, oppure $a_2 x_1 x_2 x_3$, oppure $b_4 x_2^3$. Facendo i conti, modulo M (cioè considerando $x_1^2 x_0 + a x_1 x_2^2 + b x_1 x_2 x_3 - x_2^3 = 0$) si vede che h_1 non si può elidere. Dunque deve essere $h_1 \in k[M]$, cioè $b = 0$. Considerando ora

$$\frac{a_2^3 x_1^3 x_2^3 x_3^3}{x_1^3} = a_2^3 \left(x_0 x_3^3 + a \frac{x_2^2 x_3^3}{x_1} \right)$$

si vede che esso appartiene a $k[M]$ se e solo se $a = 0$ (si noti che $a_2 \neq 0$ da $a_2 + b b_4 \neq 0$), inoltre tale addendo non può elidersi. Dunque $a = b = 0$. Così l'equazione di M è

$$M\colon X_1^2 X_0 - X_2^3 = 0\,.$$

Ora svolgendo il cubo di γ_0 si vede che tra gli addendi c'è il termine

$$b_2 = 3a_2^2 b_4 \frac{x_2^3 x_2^2 x_3^2}{x_1^3} = 3a_2^2 b_4 \frac{x_0 x_2^2 x_3^2}{x_1}\,.$$

Poichè $a_2 b_4 \neq 0$ e caratteristica di $k \neq 3$, si ha $b_2 \notin k[M]$ e tale termine non può elidersi con altri addendi: assurdo.

E questo prova il Teorema 1 *nel I Caso*: $\alpha_1 = \alpha_2$.

Prima di passare ad esaminare il II Caso facciamo la seguente osservazione che utilizzeremo in seguito.

Osservazione 2: Se $M\colon X_1^2 X_0 - X_2^3 = 0$ e caratteristica di $k = 3$, con le notazioni precedenti, si ha

$$g = \frac{\gamma_0^3}{x_1^3} = a_1^3 x_1 x_3^3 + a_2^3 x_0 x_3^3 + b_1^3 x_1^4 + b_2^3 x_0 x_1^3 + b_3^3 x_0^2 x_1^2 + b_4^3 x_0^3 x_1 \in k[M]\,.$$

Così abbiamo dimostrato che nel I Caso e in caratteristica 3, se la generatrice doppia di Γ_0 è una retta r_i, allora una quartica razionale non singolare C_4 giacente su un monoide M del terzo ordine e passante per un punto doppio di M è curva di osculazione di M con una superficie F_4 se e solo se M, a meno di un cambiamento di coordinate, è del tipo $X_1^2 X_0 - X_2^3 = 0$ e F_4 è definita da un polinomio rappresentante dell'elemento g considerato sopra.

Esaminiamo il II Caso: $(\alpha_1 \neq \alpha_2)$ $g = \gamma_0^3 / \alpha_1^2 \alpha_2^2$.

Poichè il divisore di Weil definito da g è $3C_4$ si ha

$$I(r_i, M \cap \Gamma_0^3) = I(r_i, \alpha_1^2 \alpha_2^2 \cap \beta)\,, \qquad \forall r_i\,,$$

cioè

$$3I(r_i, M \cap \Gamma_0) = 2I(r_i, \alpha_1 \cap \beta) + 3I(r_i, \alpha_2 \cap \beta)\,, \qquad \forall r_i\,. \tag{15}$$

Cominciamo a dimostrare che il piano α_1 incontra M (ossia β) in tre rette coincidenti,

cioè si ha $I(r_1, \alpha_1 \cap \beta) = 3$. Infatti se α_1 incontrasse M in tre rette r_1, r_2, r_3 di cui almeno due distinte, sia $r_1 \neq r_2$, per una delle due rette r_1, r_2, sia r_1, si deve avere $I(r_1, \alpha_1 \cap \beta) = 1$. Dalla (15), per $i = 1$, si ha allora

$$3I(r_1, M \cap \Gamma_0) = 2 + 3I(r_1, \alpha_2 \cap \beta)\,.$$

Così α_2 deve passare per r_1 e quindi α_2 non può passare per r_2 (altrimenti essendo

$r_1 \neq r_2$ si avrebbe $\alpha_1 = \alpha_2$). Per $i = 2$ la (15) dà allora

$$3I(r_2, M \cap \Gamma_0') = 2I(r_2, \alpha_1 \cap \beta).$$

Il che è impossibile perchè $I(r_2, \alpha_1 \cap \beta) < 2$. E ciò prova quanto affermato.

Indichiamo con r_1, r_2, r_3 le rette intersezione di α_1 con M, $r_1 = r_2 = r_3$, e con r_4, r_5, r_6 le rette intersezione di α_2 con M, r_4, r_5, r_6 possono variamente coincidere tra loro e con r_1.

Distinguiamo due sottocasi

Sottocaso A: α_2 non passa per r_1;

Sottocaso B: α_2 passa per r_1.

Nel Sottocaso A, a meno di un cambiamento di coordinate, possiamo assumere

$$\alpha_1 = X_1, \qquad \alpha_2 = X_2 \qquad \text{e} \qquad r_1: \begin{cases} X_1 = 0, \\ X_3 = 0. \end{cases}$$

L'equazione di M sarà allora del tipo

$$M: X_1X_2X_0 + X_1\varphi - X_3^3 = 0 \qquad \text{con } \varphi \text{ forma quadratica}.$$

Scrivendo $\varphi = X_2(d_1X_1 + d_2X_2 + d_3X_3) + aX_1^2 + bX_1X_3 + cX_3^2$ e cambiando X_0 in $X_0' = X_0 + d_1X_1 + d_2X_2 + d_3X_3$ l'equazione di M diventa (togliendo l'apice)

$$\text{Sottocaso A} \qquad M: X_1X_2X_0 + X_1(aX_1^2 + bX_1X_3 + cX_3^2) - X_3^3 = 0.$$

Analogamente considerando

$$\alpha_1 = X_1, \qquad \alpha_2 = X_2 \qquad \text{ed} \qquad r_1: \begin{cases} X_1 = 0 \\ X_2 = 0 \end{cases}$$

si ottiene

$$\text{Sottocaso B} \qquad M: X_1X_2X_0 + X_1(aX_1^2 + bX_1X_3 + cX_3^2) - X_2^3 = 0.$$

Consideriamo il cono Γ_0. Dal Lemma 2 del n. 5 la generatrice doppia di Γ_0 cade tra le rette r_i.

Esaminiamo dapprima il caso in cui tale generatrice doppia sia la retta r_1 $(= r_2 = r_3)$.

L'equazione di Γ_0 è del tipo

Sottocaso A

$$\Gamma_0: (a_1X_1^2 + a_2X_1X_3 + a_3X_3^2)X_2 + b_1X_1^3 + b_2X_1^2X_3 + b_3X_1X_3^2 + b_4X_3^3 = 0.$$

Sottocaso B

$$\Gamma_0 \colon (a_1 X_1^2 + a_2 X_1 X_2 + a_3 X_2^2) X_3 + b_1 X_1^3 + b_2 X_1^2 X_2 + b_3 X_1 X_2^2 + b_4 X_2^3 = 0 .$$

Per il teorema di Bézout, essendo $I(C_4, M \cap \Gamma_0) = 1$ (cfr. corollario al Lemma 1, n. 3), dalla (15), tenendo presente che $I(r_1, \alpha_1 \cap \beta) = 3$, si ha

$$M \cdot \Gamma_0 = C_4 + 2r_1 + m_4 r_4 + m_5 r_5 + m_6 r_6 , \qquad \text{con } m_4 + m_5 + m_6 = 3 , \; m_i > 0 .$$

Se siamo nel Sottocaso A nessuna delle rette r_4, r_5, r_6 può coincidere con r_1, mentre nel Sottocaso B almeno una di esse coincide con r_1.

Intersechiamo la curva $C_4 + 2r_1 + m_4 r_4 + m_5 r_5 + m_6 r_6$ con un piano π non passante per alcuna retta r_i e non passante per i punti comuni a C_4 e ad r_i, $\forall i$; il piano π interseca C_4 in 4 punti P_1, P_2, P_3, P_4 (distinti o variamente coincidenti) e se π interseca r_i in R_i, $i = 1, 4, 5, 6$, si ha $R_i \neq P_j$, $\forall i, j$. Dette allora C_M e C_0 le curve sezione di π con M e Γ_0 rispettivamente, nel piano π, si ha

$$C_M \cdot C_0 = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + 2R_1 + m_4 R_4 + m_5 R_5 + m_6 R_6 .$$

Da cui in particolare abbiamo

$$I(r_i, M \cap \Gamma_0) = I(R_i, C_M \cap C_0) , \qquad i = 1, 4, 5, 6 .$$

Consideriamo il Sottocaso A (nessuna delle rette r_4, r_5, r_6 può coincidere con r_1). Come piano π scegliamo

$$\pi \colon X_0 - \lambda(X_1 + X_2) = 0 ,$$

λ parametro (esistono dei valori di λ per cui π soddisfa alle condizioni richieste perchè i punti R_i dipendono da λ).

$$C_M \colon \lambda X_1 X_2 (X_1 + X_2) + X_3 (a X_1^2 + b X_1 X_2 + c X_2^2) - X_3^3 = 0 ,$$

$$C_0 \colon (a_1 X_1^2 + a_2 X_1 X_2 + a_3 X_2^2) X_3 + b_1 X_1^3 + b_2 X_1^2 X_2 + b_3 X_1 X_2^2 + b_4 X_2^3 = 0 .$$

Il punto $R_1 \in \pi$ è dato da $(\lambda, 0, 1, 0)$. Possiamo pensare C_M e C_0 come curve del piano $X_0 = 0$, in tal caso $R_1 = (0, 1, 0)$. Dobbiamo imporre che su $X_0 = 0$ si abbia

$$I(R_1, C_M \cap C_0) = 2$$

e si vede subito che ciò accade se e solo se $a_3 \neq 0$.

Troviamo ora $R_4 + R_5 + R_6 = C_M \cdot (X_2 = 0)$; R_4, R_5, R_6 possono variamente coincidere.

$$\begin{cases} C_M\colon \lambda X_1 X_2 (X_1 + X_2) + X_1 (a X_1^2 + b X_1 X_3 + c X_3^2) - X_3^3 = 0\,, \\ X_2 = 0\,, \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_1 (a X_1^2 + b X_1 X_3 + c X_3^2) - X_3^3 = 0\,, \\ X_2 = 0\,. \end{cases}$$

Scriviamo per comodità

$$X_1 (a X_1^2 + b X_1 X_3 + c X_3^2) - X_3^3 = (d_4 X_1 - X_3)(d_5 X_1 - X_3)(d_6 X_1 - X_3)\,.$$

Le soluzioni del sistema sono allora

$$R_4 = (\lambda, 1, 0, d_4)\,, \qquad R_5 = (\lambda, 1, 0, d_5)\,, \qquad R_6 = (\lambda, 1, 0, d_6)\,.$$

Possiamo al solito pensare C_M e C_0 sul piano $X_0 = 0$, così, prescindendo da X_0, possiamo scrivere

$$R_4 = (1, 0, d_4)\,, \qquad R_5 = (1, 0, d_5)\,, \qquad R_6 = (1, 0, d_6)\,.$$

Dobbiamo calcolare $I(R_i, C_M \cap C_0)$, $i = 4, 5, 6$. Per fare questo passiamo a coordinate non omogenee $X_1 = 1$, $X_2 = Y$, $X_3 = Z$.

$$C_M^a\colon \lambda Y(1 + Y) + (d_4 - Z)(d_5 - Z)(d_6 - Z) = 0\,,$$

$$C_0^a\colon (a_1 + a_2 Z + a_3 Z^2) Y + b_1 + b_2 Z + b_3 Z^2 + b_4 Z^3 = 0\,,$$

$$R_4^a = (0, d_4)\,, \qquad R_5^a = (0, d_5)\,, \qquad R_6^a = (0, d_6)\,.$$

Per comodità scriviamo

$$C_0^a\colon (a_1 + a_2 Z + a_3 Z^2) Y + (b_4' - b_4'' Z)(b_5' - b_5'' Z)(b_6' - b_6'' Z) = 0\,.$$

Inoltre scriviamo

$$C_M^a \cdot C_0^a = P_1^a + P_2^a + P_3^a + P_4^a + 2 R_1^a + m_4 R_4^a + m_5 R_5^a + m_6 R_6^a\,,$$

$$m_4 + m_5 + m_6 = 3\,, \ m_i > 0\,,$$

e facciamo la *convenzione* che nell'uguaglianza precedente compaiano solamente i punti R_i distinti tra loro.

Con la convenzione precedente, a meno di una permutazione tra R_4, R_5, R_6, abbiamo allora le sole possibilità:

I P. $m_4 = 1$, $m_5 = 1$, $m_6 = 1$ (in questa possibilità (con la convenzione fatta) si ha $R_i^a \neq R_j^a$ per $i \neq j$);

II P. $m_4 = 2$, $m_5 = 1$, $m_6 = 0$ (si ha $R_4^a \neq R_5^a$; inoltre, dalla (15) per $i = 6$, si ha che R_6^a coincide con uno dei punti R_4^a, R_5^a);

III P. $m_4 = 3$, $m_5 = 0$, $m_6 = 0$ (R_4^a, R_5^a, R_6^a sono tutti coincidenti dalla (15)).

Esaminiamo la I P. Poichè C_0^a deve passare per i punti distinti R_4^a, R_5^a, R_6^a, si vede facilmente che si ha

$$C_0^a\colon\ (a_1 + a_2 Z + a_3 Z^2)Y + d(d_4 - Z)(d_5 - Z)(d_6 - Z) = 0\,,$$

dove possiamo supporre $d = 1$ (cambiando a_i in $a_i d$, per ogni i).

Esaminiamo la II P. Poichè C_0^a deve passare per R_4^a e R_5^a, $R_4^a \neq R_5^a$, possiamo scrivere

$$C_0^a\colon\ (a_1 + a_2 Z + a_3 Z^2)Y + (d_4 - Z)(d_5 - Z)(b'_6 - b''_6 Z) = 0\,.$$

Abbiamo detto che R_6^a coincide con uno dei punti R_4^a, R_5^a; non è restrittivo supporre $R_6^a = R_4^a$. Operiamo allora la traslazione

$$t_4\colon \begin{cases} d_4 - Z = z\,, \\ Y \qquad = y\,. \end{cases}$$

Abbiamo $t_4(R_4^a) = 0 = (0, 0)$,

$$t_4(C_M^a)\colon\ \lambda y(1 + y) + z^2(d_5 - d_4 + z) = 0\,,$$

$$t_4(C_0^a)\colon\ (a_1 + a_2(d_4 - z) + a_3(d_4 - z)^2)y + z(d_5 - d_4 + z)(b'_6 - b''_6(d_4 - z)) = 0\,.$$

Affinchè $m_4 = I(R_4^a, C_M^a \cap C_0^a) = 2$ le tangenti in O alle due curve suddette devono coincidere, quindi, essendo $d_5 - d_4 \neq 0$, deve essere $b'_6 - b''_6 d_4 = 0$. C_0^a ha allora equazione

$$C_0^a\colon\ (a_1 + a_2 Z + a_3 Z^2)Y + (d_4 - Z)^2(d_5 - Z) = 0$$

(avendo supposto, com'è lecito $b''_6 = 1$).

Esaminiamo la III P. Si ha

$$C_0^a\colon\ (a_1 + a_2 Z + a_3 Z^2)Y + (d_4 - Z)(b'_5 - b''_5 Z)(b'_6 - b''_6 Z) = 0\,.$$

Operando la traslazione t_4, considerata nella II P., e imponendo che la tangente in O a $t_4(C_M^a)$ e la tangente in O a $t_4(C_0^a)$ coincidano, si ha $(b'_5 - b''_5 d_4)\cdot$ $\cdot(b'_6 - b''_6 d_4) = 0$. Imponiamo ora la condizione $m_4 = I(R_4^a, t_4(C_M^a) \cap t_4(C_0^a)) = 3$.

Dall'equazione di $t_4(C_M^3)$: $\lambda y + \lambda y^2 + z^3 = 0$, ricavando y e sostituendolo nella equazione di $t_4(C_0^3)$, si ottiene:

$$(a_1 + a_2(d_4 - z) + a_3(d_4 - z)^2)(\lambda y^2 + z^3) -$$
$$- \lambda z\{[(b_5' - b_5''d_4)b_6''z + (b_6' - b_6''d_4)b_5''z] + b_5''b_6''z^2\} = 0 .$$

Questa è l'equazione di una curva D che ha un punto doppio in O. Affinché $m_4 = 3$ una delle tangenti in O a D deve coincidere con la tangente in O a $t_4(C_M^3)$ che è $y = 0$. Pertanto si deve avere $(b_5' - b_5''d_4)b_6'' + (b_6' - b_6''d_4)b_5'' = 0$. Essendo b_5'' e b_6'' entrambi diversi da zero (altrimenti C_0^3 sarebbe riducibile), dalle due condizioni trovate si ottiene $b_5' - b_5''d_4 = b_6' - b_6''d_4 = 0$. Così

$$C_0^3\colon (a_1 + a_2Z + a_3Z^2)Y + (d_4 - Z)^3 = 0 , \qquad \text{avendo supposto } b_5''b_6'' = 1 .$$

Possiamo allora riunire le tre possibilità I P., II P., III P. nell'unica scrittura

$$C_M^3\colon \lambda Y(1 + Y) + (d_4 - Z)^{m_4}(d_5 - Z)^{m_5}(d_6 - Z)^{m_6} = 0 ,$$
$$C_0^3\colon (a_1 + a_2Z + a_3Z^2)Y + (d_4 - Z)^{m_4}(d_5 - Z)^{m_5}(d_6 - Z)^{m_6} = 0 ,$$
$$I(R_i^2, C_M^3 \cap C_0^3) = m_i , \qquad i = 4, 5, 6 , \text{ con } m_4 + m_5 + m_6 = 3 .$$

Così le quazioni di M e di Γ_0 sono date da

$$M\colon X_1X_2X_0 + (d_4X_1 - X_3)^{m_4}(d_5X_1 - X_3)^{m_5}(d_6X_1 - X_3)^{m_6} = 0 ,$$
$$\Gamma_0\colon (a_1X_1^2 + a_2X_1X_3 + a_3X_3^2)X_2 +$$
$$+ (d_4X_1 - X_3)^{m_4}(d_5X_1 - X_3)^{m_5}(d_6X_1 - X_3)^{m_6} = 0 .$$

Consideriamo ora l'intersezione completa $M \cdot \Gamma_0$ di M e Γ_0. Facciamo la differenza tra le due equazioni e risolviamo il sistema

$$\begin{cases} X_1X_2X_0 + (d_4X_1 - X_3)^{m_4}(d_5X_1 - X_3)^{m_5}(d_6X_1 - X_3)^{m_6} = 0 \\ X_2(a_1X_1^2 + a_2X_1X_3 + a_3X_3^2 - X_0X_1) = 0 \end{cases} =$$
$$= \begin{cases} (d_4X_1 - X_3)^{m_4}(d_5X_1 -)^{m_5}(d_6X_1 - X_3)^{m_6} = 0 \\ X_2 = 0 \end{cases} +$$
$$+ \begin{cases} X_1X_2X_0 + (d_4X_1 - X_3)^{m_4}(d_5X_1 - X_3)^{m_5}(d_6X_1 - X_3)^{m_6} = 0 , \\ a_1X_1^2 + a_2X_1X_3 + a_3X_3^2 - X_0X_1 = 0 . \end{cases}$$

Scriviamo ora l'ultimo sistema nel seguente modo (ricordando che $a_3 \neq 0$)

$$\begin{cases} X_1X_2X_0 + X_1\psi - X_3^3 = 0 \\ X_3^2 = \dfrac{a_1X_1 + a_2X_3 - X_0}{a_3}X_1 . \end{cases}$$

Sostituendo nella prima equazione si ottiene

$$\begin{cases} X_1\left(X_2X_0+v-\dfrac{a_1X_1+a_2X_2-X_0}{a_3}X_3\right)=0 \\ a_1X_1^2+a_2X_1X_2+a_3X_2^2-X_0X_1=0 \end{cases} = \begin{cases} X_1=0 \\ X_2^2=0 \end{cases} + \begin{cases} Q_1=0 \\ Q_2=0\,. \end{cases}$$

Così C_4 è l'intersezione completa delle due quadriche Q_1 e Q_2. Ora il punto $A_3=(0,0,1,0)$ annulla sia Q_1 che Q_2, quindi giace su C_4; ma Q_2 è un cono con vertice in A_3, così C_4 ha un punto doppio in A_3: contraddizione.

Si conclude che nel II Caso ($\alpha_1 \neq \alpha_2$), *Sottocaso* A, *se* Γ_6 *ha la generatrice doppia nella retta* $r_1=\alpha_1 \cap M$, *allora non esiste alcuna superficie di ordine 4 che osculi* M *lungo* C_4.

Consideriamo il Sottocaso B.

$$M\colon\ X_1X_2X_0+X_1(aX_1^2+bX_1X_2+cX_2^2)-X_2^2=0\,,$$

$$\Gamma_6\colon\ (a_1X_1^2+a_2X_1X_2+a_3X_2^2)X_3+b_1X_1^3+b_2X_1^2X_2+b_3X_1X_2^2+b_4X_2^3=0\,,$$

dove abbiamo supposto

$$r_1\colon \begin{cases} X_1=0 \\ X_2=0 \end{cases} \qquad \text{generatrice doppia per } \Gamma_6\,.$$

Poichè almeno una delle rette r_4, r_5, r_6 coincide con $r_1=r_2=r_3$, possiamo supporre $r_4=r_1$; allora r_5 e r_6 sono definite dal sistema

$$\begin{cases} aX_1^2+bX_1X_2+cX_2^2=0\,, \\ X_2=0\,. \end{cases}$$

Dalle (15) tenuto conto che $I(r_1, \alpha_1 \cap \beta) > 3$ e $I(C_4, M \cap \Gamma_6)=1$ (cfr. corollario al Lemma 1, n. 3) si ha

$$M\cdot\Gamma_6=C_4+m_1r_1+m_5r_5+m_6r_6\,, \qquad m_1+m_5+m_6=5\,,\ m_1>3\,,\ m_5, m_6>0\,.$$

Conveniamo di scrivere nell'uguaglianza precedente solamente le rette r_i distinte tra loro. Con tale convenzione, a meno di una permutazione tra r_5 e r_6, abbiamo le sole possibilità:

1) $m_1=3$, $m_5=1$, $m_6=1$ (r_1, r_5, r_6 tutte distinte);

2) $m_1=3$, $m_5=2$, $m_6=0$ (dalla (15) si ha che r_6 coincide con r_1 o con r_5);

3) $m_1=4$, $m_5=1$, $m_6=0$ (r_6 coincide con r_1 o con r_5);

4) $m_1=5$, $m_5=0$, $m_6=0$ ($r_1=r_5=r_6$).

Intersecando Γ_0 con $X_2=0$ si ottiene

$$\begin{cases} X_1^2(a_1X_3+b_1X_1)=0\,, \\ X_2=0\,. \end{cases}$$

Questo sistema dice che Γ_0 passa al più per una retta r_i distinta da r_1. Così la possibilità 1) non può presentarsi.

Per esaminare le possibilità successive scriviamo l'equazione di M così

$$M:\; X_1X_2X_0+X_3(d_5'X_1-d_5X_3)(d_6'X_1-d_6X_3)-X_2^3=0$$

con

$$r_5:\begin{cases} d_5'X_1-d_5X_3=0\,, \\ X_2=0\,, \end{cases} \qquad r_6:\begin{cases} d_6'X_1-d_6X_3=0 \\ X_2=0\,. \end{cases}$$

Riduciamoci al solito ad un problema piano. Intersechiamo col piano

$$\pi:\; X_0-\lambda(X_1+X_3)=0\,, \qquad \lambda \text{ parametro}\,.$$

Indichiamo al solito $R_i=\pi\cdot r_i$, $P_1+P_2+P_3+P_4=\pi\cdot C_4$, $C_M=\pi\cdot M$, $C_0=$ $=\pi\cdot\Gamma_0$.

$$C_M:\; \lambda X_1X_2(X_1+X_3)+X_3(d_5'X_1-d_5X_3)(d_6'X_1-d_6X_3)-X_2^3=0\,,$$

$$C_0:\; (a_1X_1^2+a_2X_1X_2+a_3X_2^2)X_3+b_1X_1^3+b_2X_1^2X_2+b_3X_1X_2^2+b_4X_2^3=0\,.$$

Sul piano π si ha

$$C_M\cdot C_0=P_1+P_2+P_3+P_4+m_1R_1+m_5R_5+m_6R_6\,.$$

Possiamo scegliere λ in modo tale che $P_j\neq R_i$, $\forall i,j$; infatti i punti R_i hanno coordinate

$$R_1=(\lambda,0,0,1)\,,\;\; R_5=(\lambda(d_5+d_5'),d_5,0,d_5')\,,\;\; R_6=(\lambda(d_6+d_6'),d_6,0,d_6')\,;$$

dipendendo tali coordinate da λ, per ogni valore di d_i, d_i', possiamo scegliere valori di λ in modo che sia soddisfatta la condizione richiesta.

Possiamo interpretare curve e punti sul piano $X_0=0$ prescindendo da X_0, cioè possiamo interpretare curve e punti sul piano (X_1, X_2, X_3), così possiamo scrivere

$$R_1=(0,0,1)\,, \qquad R_5=(d_5,0,d_5')\,, \qquad R_6=(d_6,0,d_6')\,.$$

Esaminiamo la 2). Osserviamo intanto che si ha $R_6\neq R_1$, cioè $d_6\neq 0$, altrimenti R_1 sarebbe doppio per C_M e $m_1=I(R_1, C_M\cap C_0)>4$. Così abbiamo $R_6=R_5$.

Possiamo scrivere allora

$$C_M\colon\ \lambda X_1X_2(X_1+X_3)+X_1(d'_5X_1-d_5X_3)^2-X_2^3=0\,.$$

Imponiamo ora che $m_5=I(R_5, C_M\cap C_0)=2$. Si vede subito che R_5 è semplice per C_M (purchè $\lambda\neq 0$) e che la tangente in R_5 a C_M è $X_2=0$. Pertanto affinchè $m_5=2$, la curva C_0 deve avere come tangente in R_5 la stessa $X_2=0$. Ma l'intersezione di $X_2=0$ con C_0 è

$$\begin{cases} X_1^2(b_1X_1+a_1X_3)=0\,,\\ X_2=0\,.\end{cases}$$

Quindi la condizione precedente è impossibile. Così la 2) non si presenta.

Esaminiamo la 3). Distinguiamo due sottopossibilità:

3) *a*) $R_6\neq R_1$, cioè $d_5=\varrho d'_5$, $d_6=\varrho d'_6$, $\varrho\in k$;

3) *b*) $R_6=R_1$, cioè $d_6=0$.

Esaminiamo la 3) *a*). Si ha che C_M ha in R_1 un punto semplice con tangente $X_1=0$; pertanto, affinchè $m_1=4$, la retta $X_1=0$ deve coincidere con una delle tangenti in R_1 a C_0, ciò implica $a_2=0$. Per valutare meglio $m_1=$ $=I(R_1, C_M\cap C_0)$ passiamo alle coordinate affini $X_1=X$, $X_2=Y$, $X_3=1$.

$$C_M^a\colon\ \lambda XY(X+1)+X(d'_5X-d_5)^2-Y^3=0 \text{ (avendo supposto } \varrho=1)\,,$$

$$C_0^a\colon\ a_1X^2+a_2XY+b_1X^3+b_2X^2Y+b_3XY^2+b_4Y^3=0\,.$$

Ricavando Y^3 dalla prima e sostituendo nella seconda, si ottiene

$$X\{a_1X+a_2Y+b_1X^2+b_2XY+b_3Y^2+b_4[\lambda Y(X+1)+(d'_5X-d_5)^2]\}=0\,.$$

Ora la curva definita dal polinomio in parentesi graffe $\{\ldots\}$ non passa per R_1 perchè $d_5\neq 0$ (essendo $R_5\neq R_1$ secondo la nostra convenzione). Così $m_1=3$; contraddizione.

La 3) *a*) non si presenta.

Esaminiamo la 3) *b*). C_0 passa per R_5 e quindi (essendo $d_5\neq 0$) si ha $a_1d'_5+$ $+b_1d_5=0$, che possiamo scrivere $a_1=-\varrho d_5$, $b_1=\varrho d'_5$. Pertanto abbiamo

$$M\colon\ X_1X_2X_0+X_1^2(d'_5X_1-d_5X_3)-X_2^3=0 \text{ (avendo supposto } d'_6=1)\,,$$

$$\Gamma_0\colon\ X_2[(a_2X_1+a_3X_2)X_3+b_2X_1^2+b_3X_1X_2+b_4X_2^2]+\varrho X_1^2(d'_5X_1-d_5X_3)=0.$$

Consideriamo l'intersezione completa di M e Γ_0. Ricaviamo $X_1^2(d'_5X_1-d_5X_3)=$ $=X_2^3-X_1X_2X_0$ dall'equazione di M, la sostituiamo nell'equazione di Γ_0 e otteniamo

$$M \cdot \Gamma_0 = \begin{cases} X_1^2(d_5' X_1 - d_5 X_3) = 0 \\ X_2 = 0 \end{cases} +$$
$$+ \begin{cases} X_1 X_2 X_0 + X_1^2(d_5' X_1 - d_5 X_3) - X_2^2 = 0\,, \\ (a_2 X_1 + a_3 X_2) X_3 + b_2 X_1^2 + b_3 X_1 X_2 - \varrho X_1 X_0 + (b_4 + \varrho) X_2^2 = 0\,. \end{cases}$$

Ora si deve avere

$$g = \frac{\gamma_0^3}{x_1^2 x_2^3} \in k[M] = k[x_0, x_1, x_2, x_3]\,,$$

cioè

$$\frac{[(a_2 x_1 + a_3 x_2) x_3 + b_2 x_1^2 + b_3 x_1 x_2 - \varrho x_1 x_0 + (b_4 + \varrho) x_2^2]^3}{x_1^2} \in k[M]\,,$$

e questo accade se e solo se

$$a_3^3 \frac{x_2^3 x_3^3}{x_1^2} \in k[M]$$

(infatti tutti gli altri addendi nello sviluppo del cubo $\in k[M]$). Ma

$$a_3^3 \frac{x_2^3 x_3^3}{x_1^2} = a_3^3 \frac{[x_2 x_0 + x_1(d_5' x_1 + d_5 x_3)] x_3^3}{x_1}$$

quindi

$$a_3^3 \frac{x_0 x_2 x_3^3}{x_1} \in k[M]$$

e ciò implica $a_3 = 0$ (perchè $(x_0 x_2 x_3^3)/x_1 \notin k[M]$ in quanto il divisore di Weil da esso definito non è effettivo).

Allora l'ultimo sistema considerato diventa

$$\begin{cases} X_1 X_2 X_0 + X_1^2(d_5' X_1 - d_5 X_3) - X_2^2 = 0 \\ a_2 X_1 X_3 + b_2 X_1^2 + b_3 X_1 X_2 - \varrho X_1 X_0 + (b_4 + \varrho) X_2^2 = 0 \end{cases}$$

che equivale a

$$\begin{cases} X_1\{(b_4+\varrho)[X_2 X_0 + X_1(d_5' X_1 - d_5 X_3)] + X_2(a_2 X_3 + b_2 X_1 + b_3 X_2 - \varrho X_0)\} = 0 \\ (a_2 X_3 + b_2 X_1 + b_3 X_2 - \varrho X_0) X_1 + (b_4 + \varrho) X_1^2 = 0 \end{cases} =$$
$$= \begin{cases} X_1 = 0 \\ Q_2 = 0 \end{cases} + \begin{cases} Q_1 = 0 \\ Q_2 = 0\,. \end{cases}$$

Così C_4 è l'intersezione completa delle due quadriche Q_1 e Q_2. Ora Q_2 è un cono con un punto doppio nel punto V individuato dal sistema $X_1 = X_2 =$

$= a_2X_3 - \varrho X_0 = 0$ e poiché V giace su Q_1 (anzi tutta la retta $X_1 = X_2 = 0$ giace su Q_1), si ha che C_4 passa per V e quindi ha un punto doppio in V: assurdo.

Dunque anche la 3) *b*) non si presenta.

Esaminiamo la 4). Si ha C_M: $\lambda X_1X_2(X_1 + X_2) + dX_1^3 - X_2^3 = 0$. Poichè $m_1 = 5$ una delle tangenti in R_1 a C_M deve coincidere con una delle tangenti in R_1 a C_0. Si ottiene allora $a_1 = 0$ oppure $a_2 = 0$. Inoltre se $a_1 = 0$ si ha $a_2 \neq 0$, altrimenti, come si verifica facilmente, si avrebbe $m_1 = 6$, e se $a_2 = 0$ allora $a_1 \neq 0$.

Supponiamo dapprima $a_2 = 0$ e $a_1 \neq 0$. Consideriamo $k[M] = k[x_0, x_1, x_2, x_3]$ e

$$\frac{y_0^3}{x_1^3x_2^3} = \frac{[(a_1x_1 + a_2x_2)x_1x_3 + b_1x_1^3 + b_2x_1^2x_2 + b_3x_1x_2^2 + b_4x_2^3]^3}{x_1^3x_2^3} =$$

$$= \frac{x_1[(a_1x_1 + a_2x_2)x_3 + b_1x_1^2 + b_2x_1x_2 + b_3x_2^2 + b_4(x_2x_0 + dx_1^2)]^3}{x_2^3}.$$

Affinchè questo elemento appartenga a $k[M]$ deve essere

$$\frac{x_1(a_1x_1 + a_2x_2)^3x_3^3}{x_2^3} \in k[M]$$

(perchè questo è l'unico termine che contiene x_3 alla massima potenza e non comparendo X_3 nell'equazione di M, tale termine non può elidersi con altri). Da cui segue

$$\frac{x_1[-x_0(a_1^3x_1 + 3a_1a_2x_2) + 3da_2^2x_1x_2]x_3^3}{x_2^3} \in k[M].$$

Rimontando nell'anello di polinomi $k[X_0, X_1, X_2, X_3]$ abbiamo

$$X_1[-X_0(a_1^3X_1 + 3a_1a_2X_2) + 3a_2X_1X_2]X_3^3 =$$
$$= X_2^3A(X_0, X_1, X_2, X_3) + (X_1X_2X_0 + dX_1^3 - X_2^3)B(X_0, X_1, X_2, X_3).$$

Ponendo $X_2 = 0$ si deve avere

$$a_1^3X_0X_1^2X_3^3 = dX_1^3B(X_0, X_1, 0, X_3)$$

e quindi X_1 deve dividere $a_1^3X_0X_3^3$: assurdo.

In modo analogo si procede supponendo $a_1 = 0$ e $a_2 \neq 0$.

Così anche la 4) non si presenta.

Si conclude che nel II Caso ($\alpha_1 \neq \alpha_2$), Sottocaso B, se Γ_0 ha la generatrice doppia nella retta $r_1 = \alpha_1 \cap M$, allora non esiste alcuna superficie di ordine 4 che osculi M lungo C_4.

Per completare l'esame del II Caso resta da considerare l'ipotesi in cui la generatrice doppia di Γ_0 sia una delle rette r_4, r_5, r_6 definite da $\alpha_2 = \beta = 0$, sia nel Sottocaso A che nel Sottocaso B.

Consideriamo il Sottocaso A. (Nessuna delle rette r_4, r_5, r_6 coincide con r_1).

$$M:\ X_1X_2X_0 + X_1(aX_1^2 + bX_1X_3 + cX_3^2) - X_3^3 = 0\,.$$

Possiamo scrivere questa equazione nel seguente modo:

$$M:\ X_1X_2X_0 + (d_4'X_1 - X_3)(d_5'X_1 - X_3)(d_6'X_1 - X_3) = 0\ ;$$

così

$$r_i = \begin{cases} d_i'X_1 - X_3 = 0 \\ X_2 = 0\,, \end{cases} \qquad i = 4, 5, 6\,.$$

Non è restrittivo supporre che Γ_0 abbia la generatrice doppia lungo r_4. Facciamo allora il cambiamento di coordinate

$$\begin{cases} X_3' = d_4'X_1 - X_3\,, \\ X_i' = X_i\,, \qquad i \neq 3\,. \end{cases}$$

L'equazione di M diventa, togliendo gli apici,

$$M:\ X_1X_2X_0 + X_3(d_5X_1 - X_3)(d_6X_1 - X_3) = 0\,.$$

Poichè Γ_0 ha la generatrice doppia in r_4: $\begin{cases} X_3 = 0 \\ X_2 = 0\,, \end{cases}$ ha equazione

$$\Gamma_0:\ (a_1X_2^2 + a_2X_2X_3 + a_3X_3^2)X_1 + b_1X_2^3 + b_2X_2^2X_3 + b_3X_2X_3^2 + b_4X_3^3 = 0\,.$$

Intersechiamo, al solito, M e Γ_0 con un piano opportuno. Scegliamo

$$\pi:\ X_0 - \lambda(X_1 + X_2) = 0\,, \qquad \lambda \text{ parametro}\,.$$

Abbiamo

$C_M = \pi \cdot M:\ \lambda X_1X_2(X_1 + X_2) + X_3(d_5X_1 - X_3)(d_6X_1 - X_3) = 0\,,$

$C_0 = \pi \cdot \Gamma_0:$

$$(a_1X_2^2 + a_2X_2X_3 + a_3X_3^2)X_1 + b_1X_2^3 + b_2X_2^2X_3 + b_3X_2X_3^2 + b_4X_3^3 = 0\,,$$

$R_1 = R_2 = R_3 = \pi \cdot r_1 = (\lambda, 0, 1, 0)$ (essendo $r_1 = r_2 = r_3$: $X_1 = X_3 = 0$),

$R_4 = \pi \cdot r_4 = (\lambda, 1, 0, 0)$, $R_5 = \pi \cdot r_5 = (\lambda, 1, 0, d_5)$, $R_6 = \pi \cdot r_6 = (\lambda, 1, 0, d_6)$.

Possiamo pensare C_M e C_0 come curve di $X_0=0$, cioè del piano (X_1, X_2, X_3), e prescindendo da X_0, possiamo scrivere

$$R_1=(0,1,0)\,, \qquad R_4=(1,0,0)\,, \qquad R_5=(1,0,d_5)\,, \qquad R_6=(1,0,d_6)\,.$$

Ora dalla (15) per r_1 abbiamo (essendo nel Sottocaso A, α_2 non passa per r_1)

$$3I(r_1, M\cap\Gamma_0)=2I(r_1, \alpha_1\cap\beta)$$

e quindi $I(r_1, M\cap\Gamma_0)=I(R_1, C_M\cap C_0)=2$. Imponendo questa condizione si vede facilmente che nelle equazioni di C_M e C_0 deve essere

$$b_1=b_2=0\,.$$

Abbiamo allora

$$M:\ X_1X_2X_0+X_3(d_5X_1-X_3)(d_6X_1-X_3)=0\,,$$

$$\Gamma_0:\ (a_1X_2^2+a_2X_2X_3+a_3X_3^2)X_1+b_3X_2X_3^2+b_4X_3^3=0\,.$$

Consideriamo ora la (15) per r_4, r_5, r_6, otteniamo

$$I(r_i, M\cap\Gamma_0)=I(r_i, \alpha_2\cap\beta)\,, \qquad i=4,5,6\,. \tag{16}$$

Imponiamo tali condizioni. Poichè Γ_0 ha la generatrice doppia in r_4, abbiamo

$$I(r_4, M\cap\Gamma_0)=I(r_4, \alpha_2\cap\beta)>2\,;$$

cioè il sistema

$$\begin{cases}\alpha_2:\ X_2=0\\ M:\ X_1X_2X_0+X_3(d_5X_1-X_3)(d_6X_1-X_3)=0\end{cases} \quad \text{deve dare } r_4: \begin{cases}X_2=0\\ X_3=0\end{cases}$$

con molteplicità di intersezione >2, e quindi deve essere

$$d_5=0 \qquad (\text{vale a dire } r_5=r_4)\,.$$

Possiamo inoltre supporre $d_6\neq 0$, cioè $I(r_6, M\cap\Gamma_0)=2$, altrimenti se fosse $d_6=0$ M avrebbe equazione del tipo $X_1X_2X_0-X_3^3=0$ e scambiando X_1 con X_2 cadremmo in un caso già esaminato e scartato (cfr. la III P.). Abbiamo allora

$$M:\ X_1X_2X_0+X_3^2(d_6X_1-X_3)=0\,, \qquad d_6\neq 0\,.$$

Dalla (16) per r_6 si ha $I(r_6, M\cap\Gamma_0)=1$. Ora affinchè Γ_0 passi per r_6 (oppure affinchè C_0 passi per R_6) si deve avere (essendo $d_6\neq 0$)

$$a_3+b_4d_6=0\,.$$

Scriviamo allora

$$\Gamma_0\colon\ X_2[(a_1X_2+a_2X_3)X_1+b_3X_2^2]-b_4X_2^2(d_6X_1-X_3)=0\,.$$

Calcoliamo ora l'intersezione completa di M e Γ_0. Moltiplicando l'equazione di M per b_4 e sommando membro a membro con l'equazione di Γ_0, si ottiene

$$X_2[(a_1X_2+a_2X_3)X_1+b_3X_2^2+b_4X_0X_1]=0\,.$$

Pertanto $M\cdot\Gamma_0$ è dato da

$$M\cdot\Gamma_0=\begin{cases}X_2^2(d_6X_1-X_3)=0\\ X_2=0\end{cases}+\begin{cases}X_1X_2X_0+X_2^2(d_6X_1-X_3)=0\\ (a_1X_2+a_2X_3)X_1+b_3X_2^2+b_4X_0X_1=0\,.\end{cases}$$

Poichè $b_3\neq 0$ (dall'ultima equazione) ricavando X_2^2 dalla seconda equazione dell'ultimo sistema e sostituendo nella prima equazione, otteniamo che l'ultimo sistema equivale al seguente

$$\begin{cases}X_1[b_3X_2X_0-(b_4X_0+a_1X_2+a_2X_3)(d_6X_1-X_3)]=0\\ (b_4X_0+a_1X_2+a_2X_3)X_1+b_3X_2^2=0\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}X_1=0\\ X_2^2=0\end{cases}+\begin{cases}Q_1=0\\ Q_2=0\,.\end{cases}$$

Così C_4 è l'intersezione completa delle due quadriche Q_1 e Q_2. Ora il punto $A_1=(0,1,0,0)$ appartiene a Q_1 e a Q_2 e quindi a C_4. Il piano tangente in A_1 a Q_1 e a Q_2 è lo stesso piano $b_4X_0+a_1X_2+a_2X_3=0$. Considerando allora il sistema $\begin{cases}Q_1=0\\ Q_1+d_6Q_2=0\end{cases}$ si ha ancora che esso definisce C_4, ma ora A_1 è doppio per la quadrica di equazione $Q_1+d_6Q_2=0$ e quindi A_1 è doppio per C_4: contraddizione.

Abbiamo così provato che nel Sottocaso A del II Caso, con r_4 generatrice doppia per Γ_0, non esiste alcuna superficie di ordine 4 che osculi M lungo C_4.

Resta da considerare il Sottocaso B. L'equazione di M è

$$M\colon\ X_1X_2X_0+X_1(aX_1^2+bX_1X_3+cX_3^2)-X_2^3=0$$

che per comodità scriviamo

$$M\colon\ X_1X_2X_0+X_1(d_5'X_1-d_5X_3)(d_6'X_1-d_6X_3)-X_2^3=0\,.$$

$$r_1=r_2=r_3=r_4\colon\begin{cases}X_1=0\\ X_2=0\,,\end{cases}\quad r_5\colon\begin{cases}d_5'X_1-d_5X_3=0\\ X_2=0\,,\end{cases}\quad r_6\colon\begin{cases}d_6'X_1-d_6X_3=0\\ X_2=0\,.\end{cases}$$

Supponiamo che Γ_0 abbia la generatrice doppia, ad esempio, in r_5. Nelle ipotesi in cui siamo abbiamo $r_5 \neq r_1$, cioè $d_5 \neq 0$. Poichè Γ_0 ha la generatrice doppia in r_5 e poichè dalla (15) per r_5 si ha

$$I(r_5, M \cap \Gamma_0) = I(r_5, \alpha_2 \cap \beta),$$

dobbiamo avere $I(r_5, \alpha_2 \cap \beta) \geq 2$, cioè $r_5 = r_6$, e quindi $I(r_5, \alpha_2 \cap \beta) = 2$ e $I(r_1, \alpha_2 \cap \beta) = 1$ essendo $r_1 = r_4 \neq r_5$. L'equazione di M diventa allora

$$M\colon X_1 X_2 X_0 + X_1(d_5' X_1 - d_5 X_3)^2 - X_2^3 = 0 .$$

Cambiando $d_5' X_1 - d_5 X_3$ in X_3' (ciò è lecito poichè $d_5 \neq 0$) e togliendo l'apice, si ha

$$M\colon X_1 X_2 X_0 + X_1 X_3^2 - X_2^3 = 0 , \qquad r_1 = r_2 = r_3 = r_4\colon \begin{cases} X_1 = 0 \\ X_2 = 0 , \end{cases}$$

$$r_5 = r_6\colon \begin{cases} X_2 = 0 \\ X_3 = 0 . \end{cases}$$

L'equazione di Γ_0 con generatrice doppia in r_5 è allora

$$\Gamma_0\colon (a_1 X_2^2 + a_2 X_2 X_3 + a_3 X_3^2) X_1 + b_1 X_2^3 + b_2 X_2^2 X_3 + b_3 X_2 X_3^2 + b_4 X_3^3 = 0 .$$

Intersechiamo col piano

$$\pi\colon X_0 - \lambda(X_1 + X_3) = 0 , \qquad \lambda \text{ parametro} .$$

Abbiamo

$$\pi \cdot M = C_0\colon \lambda X_1 X_2 (X_1 + X_3) + X_1 X_3^2 - X_2^3 = 0 ,$$

$$\pi \cdot \Gamma_0 = C_0\colon$$

$$(a_1 X_2^2 + a_2 X_2 X_3 + a_3 X_3^2) X_1 + b_1 X_2^3 + b_2 X_2^2 X_3 + b_3 X_2 X_3^2 + b_4 X_3^3 = 0 ,$$

$$\pi \cdot r_i = R_i = (\lambda, 0, 0, 1) ,\ i = 1, 2, 3, 4 ;\ \pi_j = R_j = (\lambda, 1, 0, 0) ,\ j = 5, 6 .$$

Interpretando tutto sul piano $X_0 = 0$ di coordinate non omogenee $X_1 = X$, $X_2 = Y$, $X_3 = 1$, si ha

$$C_M^a\colon \lambda XY(X + 1) + X - Y^3 = 0 ,$$

$$C_0^a\colon (a_1 Y^2 + a_2 Y + a_3) X + b_1 Y^3 + b_2 Y^2 + b_3 Y + b_4 = 0 ,$$

$$R_1^a = 0 = (0, 0) .$$

Ora dalla (15) si ha

$$3I(r_1, M \cap \Gamma_0) = 2I(r_1, \alpha_1 \cap \beta) + 3I(r_1, \alpha_2 \cap \beta) = 6 + 3 = 9 .$$

Quindi

$$I(r_1, M \cap \Gamma_0) = I(O, C^*_M \cap C^*_0) = 3\,.$$

Affinchè $I(O, C^*_M \cap C^*_0) > 2$ nella equazione della C^*_0 deve essere $b_3 = b_4 = 0$. Inoltre sostituendo $X = Y^3 - \lambda XY(X+1)$ nell'equazione di C^*_0 si ottiene

$$(a_1 Y^2 + a_2 Y + a_3)(Y^3 - \lambda XY(X+1)) + b_1 Y^3 + b_2 Y^2 = 0\,.$$

Questa equazione definisce una curva D con un punto doppio in O e affinchè $I(O, C^*_M \cap C^*_0) = 3$ la tangente in O a C^*_M, che è $X = 0$, deve coincidere con una delle tangenti in O alla curva D; quindi abbiamo $b_2 = 0$.

Così possiamo scrivere

$$M\colon\ X_1X_2X_0 + X_1X_3^2 - X_2^3 = 0\,,$$

$$\Gamma_0\colon\ (a_1X_2^2 + a_2X_2X_3 + a_3X_3^2)X_1 + b_4X_2^3 = 0\,.$$

Calcoliamo $M \cdot \Gamma_0$. Moltiplicando la prima equazione per $b_4 \neq 0$ e sommando membro a membro le due equazioni si ottiene

$$X_1[(a_3 + b_4)X_3^2 + (b_4X_0 + a_1X_2 + a_2X_3)X_2] = 0\,.$$

Poichè $a_3 + b_4 \neq 0$ (altrimenti C_4 sarebbe una curva piana) possiamo ricavare X_3^2 dall'ultima equazione e sostituendo nell'equazione di M, otteniamo

$$X_2[(a_3 + b_4)(X_1X_0 - X_2^2) - (b_4X_0 + a_1X_2 + a_2X_3)X_1] = 0\,.$$

Così C_4 è l'intersezione delle due quadriche

$$\begin{cases} Q_1\colon\ (a_3 + b_4)(X_1X_0 - X_2^2) - (b_4X_0 + a_1X_2 + a_2X_3)X_1 = 0\,,\\ Q_2\colon\ (a_3 + b_4)X_3^2 + (b_4X_0 + a_1X_2 + a_2X_3)X_2 = 0\,. \end{cases}$$

Ora Q_2 è un cono con vertice in $A_1 = (0, 1, 0, 0)$ e Q_1 passa per A_1, pertanto C_4 ha un punto doppio in A_1: contraddizione.

E questo prova completamente il Teorema 1 enunciato all'inizio di questo numero.

7. Per dimostrare ora il teorema enunciato nell'Introduzione, da quanto detto al n. 4, resta da considerare il caso in cui F_3 è un monoide irriducibile con un punto doppio non giacente su C_4 ed inoltre F_3 è un cono con una generatrice doppia e con vertice su C_4 e C_4 incontra la generatrice doppia di F_3 solamente nel vertice di F_3.

Teorema 2: *Supponiamo che la caratteristica di k sia $p \neq 2, 3$. Sia F_3 un cono (irriducibile) del terzo ordine, con vertice in un punto che possiamo supporre sia A_0,* *avente una generatrice doppia r e sia C_4 una quartica razionale non singolare di $\mathbf{P}_k^3$ giacente su F_3, passante per A_0 e avente a comune con r solamente il punto A_0. Allora non esiste alcuna superficie F_4 del quarto ordine che osculi F_3 lungo C_4.*

Dimostrazione: Poichè la retta doppia r di F_3 è una trisecante di C_4 (cfr. inizio del dim. del Lemma 2, n. 5), si ha che r incontra C_4 in tre punti tutti coincidenti in $A_0 = (1, 0, 0, 0)$. Prendiamo ora un punto P di r, $P \neq A_0$. Poichè C_4 non passa per P e r ha un contatto tripunto con C_4 in A_0, si ha che il cono (irriducibile) Λ che da P proietta C_4 ha ordine 4 oppure ordine 2 (cfr. n. 1), ed inoltre Λ ha una generatrice tripla in r e una sola falda (singolare) passante per r; questo significa che intersecando Λ con un piano π non passante per il vertice P, si ha che la curva sezione $\mathfrak{C}$ ha in $R = r \cap \pi$ un punto triplo con un unico ramo (tale affermazione può dimostrarsi così: consideriamo un qualunque piano π' passante per la retta r; esso incontra C_4 in tre punti coincidenti in A_0 ed in un ulteriore punto Q; poichè la retta $r' = \pi' \cap \pi$ è una qualunque retta del piano π passante per R ed essa incontra $\mathfrak{C}$ in tre punti coincidenti in R ed in punto Q' proiezione di Q da P, si ha che R è punto triplo per $\mathfrak{C}$. Inoltre $\mathfrak{C}$ ha un solo ramo in R perchè C_4, che è la sua desingolarizzazione attraverso la proiezione da P, ha il solo punto A_0 che si proietta su R). Osserviamo che per il seguito ci serve solamente sapere che nel punto triplo R di $\mathfrak{C}$ c'è una sola tangente singolare, ed infatti essa è la retta intersezione di π col piano π' che incontra C_4 in quattro punti tutti coincidenti in A_0. In particolare si ha allora che Λ non può avere ordine 2.

Ciò premesso osserviamo che, come si verifica facilmente, a meno di un cambiamento di coordinate, possiamo supporre che il cono F_3, con vertice in A_3, abbia equazione:

I) F_3: $X_2^2 X_3 + a X_1^2 X_2 - X_1^3 = 0$, $a \in k$, se r: $\begin{cases} X_1 = 0 \\ X_2 = 0 \end{cases}$ è generatrice cuspidale;

II) F_3: $X_1 X_2 X_3 - X_1^3 - X_2^3 = 0$ se r: $\begin{cases} X_1 = 0 \\ X_2 = 0 \end{cases}$ è generatrice nodale.

Ora possiamo riguardare F_3 come un monoide M con un punto doppio nel punto $P = A_3 = (0, 0, 0, 1)$.

Il cono Λ, che da A_3 proietta C_4, avendo la retta r: $\begin{cases} X_1 = 0 \\ X_2 = 0 \end{cases}$ come generatrice tripla ed una sola falda passante per r, ha equazione del tipo:

$$\begin{aligned} \Lambda:\ & H(X_0, X_1, X_2) = \\ & = (a_1 X_1 + a_2 X_2)^3 X_0 + b_1 X_1^4 + b_2 X_1^3 X_2 + b_3 X_1^2 X_2^2 + b_4 X_1 X_2^3 + b_5 X_2^4 = 0 . \end{aligned}$$

Sia adesso F_4, di ordine 4 e di equazione $G = 0$, una superficie che osculi $F_3 = M$ lungo C_4 (abbiamo indicato come al solito con M il monoide F_3). Poichè C_4 non passa per $P = A_3$ si ha anche F_4 non passa per A_3.

Dette g e γ_0 le proiezioni in $k[M]$ dei polinomi G e H rispettivamente, dal Lemma 1 del n. 3 (che possiamo applicare perchè possiamo sostituire A_3 con A_0), tenendo conto che F_4 non passa per A_3, si ha

$$g=\frac{\gamma_0^3}{\alpha_1^{d_1}} \quad \text{con } d_1<8 \text{ nel Caso I) } r \text{ generatrice cuspidale;}$$

$$\left.\begin{array}{ll} g=\dfrac{\gamma_0^3}{\alpha_1^{d_1}\cdot\alpha_2^{d_2}} & \text{con } d_1, d_2<4 \\ g=\dfrac{\gamma_0^3\alpha_2^{d_2}}{\alpha_1^{d_1}} & \text{con } d_1<4 \end{array}\right| \text{ nel Caso II) } r \text{ generatrice nodale.}$$

Poichè g ha grado 4 e γ_0 grado 4 le sole possibilità sono

$$g=\frac{\gamma_0^3}{\alpha_1^8} \quad \text{nel Caso I);}$$

$$g=\frac{\gamma_0^3}{\alpha_1^4\alpha_2^4} \quad \text{nel Caso II).}$$

Esaminiamo il Caso I. Poichè F_4 non passa per la retta r si deve avere

$$3I(r, M\cap A)=8I(r, M\cap\alpha_1).$$

Essendo $\alpha_1=X_2$ e $I(r, M\cap(X_2=0))=3$, ne segue

$$I(r, M\cap A)=8.$$

Intersechiamo col piano

$$\pi\colon X_0-\lambda X_3=0, \qquad \lambda \text{ parametro},$$

e indichiamo

$$C_M=M\cdot\pi\colon X_3^2X_2+aX_1^2X_2-X_1^3=0,$$

$$C_A=A\cdot\pi\colon$$

$$\lambda(a_1X_1+a_2X_2)^2X_2+b_1X_1^4+b_2X_1^3X_2+b_3X_1^2X_2^2+b_4X_1X_2^3+b_5X_2^4=0.$$

La condizione precedente diventa allora

$$I(R, C_M\cap C_A)=8, \qquad \text{dove } R=r\cdot\pi=(\lambda, 0, 0, 1).$$

Affinchè ciò accada si vede subito che deve essere $a_1=0$.

Consideriamo ora

$$g=\frac{\gamma_0^3}{\alpha_1^8}=\frac{[a_2^2x_2^2x_0+b_1x_1^4+b_2x_1^3x_2+b_3x_1^2x_2^2+b_4x_1x_2^3+b_5x_2^4]^3}{x_2^8}$$

(con x_i proiezione canonica in $k[M]$ di X_i). Essendo $b_1 \neq 0$ (altrimenti A sarebbe riducibile) si vede che il termine

$$b_1^3 \frac{x_1^{12}}{x_2^8} = b_1^3 \frac{(x_2^2 x_3 + a x_1^2 x_2)^4}{x_2^8}$$

deve appartenere a $k[M]$ e quindi si deve avere $a = 0$. Ora essendo la caratteristica di $k \neq 3$, ed essendo $a_2 b_1 \neq 0$ (altrimenti A sarebbe riducibile), il prodotto misto

$$3a_2^2 b_1^2 \frac{x_2^2 x_0 x_1^8}{x_2^3} = 3a_2^2 b_1^2 \frac{x_0 x_1^8}{x_2} \notin k[M]$$

e si vede facilmente che tale termine, contenendo x_0 e x_1^8 non può elidersi con altri termini: assurdo.

Così nel Caso I) non esiste alcuna superficie di ordine 4 che osculi $M = F_3$ lungo C_4.

Prima di passare al Caso II facciamo la seguente

Osservazione 3: Se $M = F_3$: $X_2^2 X_3 - X_1^3 = 0$ e se la caratteristica di k è $p = 3$, allora si ha

$$g = \frac{(a_2^2 x_2^2 x_0 + b_1 x_1^4 + b_2 x_1^3 x_2 + b_3 x_1^2 x_2^2 + b_4 x_1 x_2^3 + b_5 x_2^4)^3}{x_2^6} =$$
$$= a_2^3 x_2 x_0^3 + b_1^3 x_1^4 + b_2^3 x_2 x_1^3 + b_3^3 x_2^2 x_1^2 + b_4^3 x_2^3 x_1 + b_5^3 x_2^4 \in k[M] \, .$$

Esaminiamo il Caso II). Poichè F_4 non passa per la retta r si deve avere

$$3I(r, M \cap A) = 4I(r, M \cap \alpha_1) + 4I(r, M \cap \alpha_2) \, .$$

Essendo $\alpha_i = X_i$ e $I(r, M \cap (X_i = 0)) = 3$, $i = 1, 2$, ne segue

$$I(r, M \cap A) = 8 \, .$$

Intersechiamo col piano

$$\pi\colon X_0 - \lambda X_3 = 0 \, , \qquad \lambda \text{ parametro} \, .$$

Consideriamo nel piano π l'intersezione tra le due curve $C_M = M \cdot \pi$ e $C_A = M \cdot \pi$.

$$C_M\colon X_1 X_2 X_3 - X_1^3 - X_2^3 = 0 \, ,$$

$$C_A\colon (a_1 X_1 + a_2 X_2)^3 X_3 + b_1 X_1^4 + b_2 X_1^3 X_2 + b_3 X_1^2 X_2^2 + b_4 X_1 X_2^3 + b_5 X_2^4 = 0 \, .$$

Affinchè $I(R, C_M \cap C_A) = 8$, $R = r \cdot \pi$, deve essere $a_1 = 0$ oppure $a_2 = 0$. Per la simmetria delle equazioni possiamo porre $a_2 = 0$, da cui segue $a_1 \neq 0$. Ricavando $X_2^3 = X_1(X_1^2 - X_2 X_3)$ dalla prima equazione e sostituendola nella seconda, otteniamo

$$X_1[(\lambda a_1^3 X_1^2 - b_4 X_1 X_2 - b_5 X_2^2) X_3 +$$
$$+ (b_1 + b_4) X_1^3 + (b_2 + b_5) X_1^2 X_2 + b_3 X_1 X_2^2] = 0 .$$

Ora tra le rette di equazione complessiva

$$a_1^3 X_1^2 - b_4 X_1 X_2 - b_5 X_2^2 = 0$$

deve cadere una delle rette $X_1 = 0$, $X_2 = 0$. Poichè $\lambda a_1 \neq 0$, deve essere $b_5 = 0$. Così A e quindi C_4 sono riducibili: contraddizione.

E questo prova completamente il Teorema 2.

A questo punto possiamo enunciare il teorema dell'Introduzione:

Teorema 3: *Sia C_4 una quartica razionale non singolare di $\mathbf{P}_3^0$, k campo algebricamente chiuso di caratteristica $p \neq 2, 3$. Allora non esistono due superficie F_3 e F_4 di $\mathbf{P}_3^0$, di ordini 3, 4 rispettivamente, che si osculino lungo C_4.*

Come già detto all'inizio di questo numero, esso è immediata conseguenza del Teor. 1, n. 6, del Teor. 2 di questo numero e delle considerazioni del n. 4.

8. In questo numero e nel successivo ci proponiamo di dimostrare che in caratteristica $p = 3$ esistono C_4, F_3 e F_4 con $F_3 \cdot F_4 = 3C_4$ (fatto già noto cfr. [9]) e di determinare, nell'ipotesi in cui valga il Lemma 2 del n. 5 anche in caratteristica $p = 2, 3$, tutte e sole le C_4, F_3 e F_4 che godono di tale proprietà.

Per fare questo consideriamo l'Osservazione 2 fatta al n. 6 nel corso della dim. del Teor. 1 e l'Osservazione 3 fatta al n. 7 nel corso della dim. del Teor. 2.

Consideriamo dapprima l'osservazione del n. 6.

L'Osservazione 2 dice che in caratteristica 3 se F_3 è un monoide M avente equazione $X_1^2 X_0 - X_2^3 = 0$, le superficie irriducibili F_4 definite da un polinomio (irriducibile) del tipo

$$a_1^3 X_1 X_3^3 + a_2^3 X_0 X_3^3 + b_1^3 X_1^4 + b_2^3 X_0 X_1^3 + b_3^3 X_0^2 X_1^2 + b_4^3 X_0^3 X_1 = 0 , \quad a_i, b_i \in k ,$$

sono candidate ad osculare $F_3 = M$ lungo una quartica C_4 razionale non singolare giacente su M e passante per A_0.

Calcoliamo l'intersezione completa $F_3 \cdot F_4$.

Passiamo alle coordinate non omogenee $X_0 = X$, $X_1 = 1$, $X_2 = Y$, $X_3 = Z$

e consideriamo

$$\begin{cases} F_3^a\colon X - Y^3 = 0 \\ F_4^a\colon a_1^2 Z^2 + a_2^2 XZ^2 + b_1^2 + b_2^2 X + b_3^2 X^2 + b_4^2 X^2 = 0\,, \end{cases}$$

$$\begin{cases} X = Y^3 \\ (a_1 Z + a_2 YZ + b_1 + b_2 Y + b_3 Y^2 + b_4 Y^3)^2 = 0\,, \end{cases}$$

$$3\left| \begin{array}{l} X = Y^3 \\ Y = Y \\ Z = -\dfrac{b_1 + b_2 Y + b_3 Y^2 + b_4 Y^3}{a_1 + a_2 Y} \end{array} \right. = 3C_4^a\,.$$

Osserviamo che è lecito dividere per $a_1 + a_2 Y$ perchè, ad es., $a_2 \neq 0$ altrimenti F_4 sarebbe riducibile.

Ritornando a coordinate omogenee e considerando i parametri omogenei λ, μ con $Y = \lambda/\mu$, si ottiene

$$F_3 \cdot F_4 = 3\left| \begin{array}{l} X_0 = \lambda^3(a_1\mu + a_2\lambda) \\ X_1 = \mu^3(a_1\mu + a_2\lambda) \\ X_2 = \lambda\mu^2(a_1\mu + a_2\lambda) \\ X_3 = -\mu(b_1\mu^3 + b_2\lambda\mu^2 + b_3\lambda^2\mu + b_4\lambda^3) \end{array} \right. = 3C_4\,.$$

Ora queste curve C_4 così definite, con $a_2 \neq 0$ e b_1, b_2, b_3, b_4 non tutti nulli (altrimenti F_4 sarebbe riducibile) sono non singolari. Infatti C_4^a è non singolare perchè è isomorfa ad una retta affine meno un punto; così gli eventuali punti singolari di C_4 sono $A_0 = (1, 0, 0, 0)$ oppure $A_2 = (0, 0, 0, 1)$. Ora i coni che da questi punti proiettano C_4 sono Γ_0 e $X_0 X_1^2 - X_2^3 = 0$ rispettivamente. Poichè sono coni entrambi del terzo ordine i loro vertici sono punti semplici per C_4 (cfr. n. 1).

Così C_4 è una quartica razionale non singolare.

9. In questo numero consideriamo l'Osservazione 3 del n. 7 e determiniamo come al numero precedente le quartiche C_4 razionali non singolari che sono curve di osculazione del cono $F_3 = M\colon X_2^2 X_0 - X_1^3 = 0$, del n. 7, con la superficie irriducibile di ordine 4 F_4 considerata nell'Osservazione 3. F_4 ha equazione del tipo:

$$a_2^2 X_2 X_0^2 + b_1^2 X_3^4 + b_2^2 X_2 X_3^3 + b_3^2 X_2^2 X_3^2 + b_4^2 X_2^3 X_3 + b_5 X_2^4 = 0\,.$$

Procedendo in modo analogo al numero precedente, si trova

$$F_3 \cdot F_4 = 3C_4\,, \text{ con } C_4\colon \left| \begin{array}{l} X_0 = d_1\lambda^4 + d_2\lambda^3\mu + d_3\lambda^2\mu^2 + d_4\lambda\mu^3 + d_5\mu^4\,, \\ X_1 = \lambda\mu^3\,, \\ X_2 = \mu^4\,, \\ X_3 = \lambda^3\mu\,, \end{array} \right.$$

dove λ, μ sono parametri omogenei, $d_i \in k$, $d_2 \neq 0$.

Tali C_4 sono non singolari.

A meno di un cambiamento di coordinate si può supporre $d_2 = d_4 = d_5 = 0$, ma tralasciando.

Ritroviamo così in questo numero il risultato di [9] già citato.

Riunendo i risultati di questo numero e del numero precedente abbiamo

Proposizione: *Se la caratteristica di k è $p = 3$, allora le quartiche razionali che, a meno di un cambiamento di coordinate, hanno equazioni parametriche del tipo*

$$\left|\begin{array}{l} X_0 = \lambda^3(a_1\mu + a_2\lambda) \\ X_1 = \mu^3(a_1\mu + a_2\lambda) \\ X_2 = \lambda\mu^2(a_1\mu + a_2\lambda) \\ X_3 = -\mu(b_1\mu^3 + b_2\lambda\mu^2 + b_3\lambda^2\mu + b_4\lambda^3 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \lambda, \mu \text{ parametri omogenei}, \\ a_i, b_j \in k,\ a_2 \neq 0, \\ b_1, b_2, b_3, b_4 \text{ non tutti nulli}, \end{array}$$

oppure del tipo

$$\left|\begin{array}{l} X_0 = d_1\lambda^4 + d_2\lambda^3\mu + d_3\lambda^2\mu^2 + d_4\lambda\mu^3 + d_5\mu^4 \\ X_1 = \lambda\mu^3 \\ X_2 = \mu^4 \\ X_3 = \lambda^3\mu \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \lambda, \mu \text{ parametri omogenei}, \\ d_i \in k,\ d_1 \neq 0, \end{array}$$

sono non singolari e costituiscono una famiglia $\mathcal{F}$ di curve C_4 tali che $F_3 \cdot F_4 = 3C_4$, con F_3, a meno di un cambiamento di coordinate, di equazione $X_1^3 X_0 - X_2^3 = 0$.

Nota: Supponiamo che il Lemma 2 del n. 5 valga anche in caratteristica $p = 2, 3$. Allora, tenendo conto dell'Osservazione 2 del n. 6, dell'Osservazione 3 del n. 7, dell'analisi fatta nelle dimostrazioni del Teor. 1 del n. 6 e del Teor. 2 del n. 7, si ha che una quartica C_4 razionale non singolare di $\mathbf{P}_k^3$ è tale che esistono due superficie F_3 e F_4, di ordini 3 e 4 rispettivamente, con $F_3 \cdot F_4 = 3C_4$ se e solo se la caratteristica di k è $p = 3$ e C_4 è una curva della famiglia $\mathcal{F}$ della proposizione precedente (in particolare, a meno di un cambiamento di coordinate, F_3 ha equazioni $X_1^3 X_0 - X_2^3 = 0$).

BIBLIOGRAFIA

[1] L. Godeaux, *Sur le contact de surfaces le long de courbes*, Bull. Soc. Roy. des Sc. de Liége, 2 (1944), pp. 46-58.

[2] D. Gallarati, *Ricerche sul contatto di superficie algebriche lungo curve*, Acad. Roy. de Belg., Cl. des Sc. Mem, Coll. in-8, 32, 3 (1960), pp. 1-78.

[3] D. Mumford, *Introduction to Algebraic Geometry*, Lecture Notes, Harvard, 1967.
[4] W. Fulton, *Algebraic Curves*, Benjamin, 1969.
[5] R. Hartshorne, *Ample Subvarieties of Algebraic Varieties*, Lecture Notes in Math., Springer-Verlag, 156 (1970).
[6] B. Segre, *Prodromi di geometria algebrica*, Cremonese, Roma, 1971.
[7] L. Robbiano, *Some properties of complete intersections in « good » projective varieties*, Nagoya Math. J., 61 (1976), pp. 103-111.
[8] R. T. Hoobler, *Frobenius calculations of Picard groups and the Birch-Tate-Swinnerton Dyer conjecture*, Amer. Math. Soc., 222 (1976), pp. 345-352.
[9] E. Stagnaro, *Su quintiche di Veblen e altre curve razionali che sono sottoinsieme intersezione completa di $\mathbf{P}^3_k$ in caratteristica positiva*, Boll. Un. Mat. It. (5), 17-B (1980), pp. 278-285.
[10] R. Hartshorne, *Complete intersections in characteristic $p > 0$*, Amer. J. Math., 101 (1979), pp. 380-383.
[11] P. C. Craighero, *Una osservazione sulla curva di Cremona di $\mathbf{P}^3_k$* $C: \{\lambda\mu^3, \lambda^3\mu, \lambda^4, \mu^4\}$, Rend. Sem. Mat. Padova (in corso di stampa).