Rendiconti
Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL
Memorie di Matematica
101° (1983), Vol. VII, fasc. 1, pagg. 1-6

ANDREA FORT (*)

I gruppi finiti nei quali tutti i sottogruppi massimi sono duali di Dedekind (**).

Finite groups in which all the maximal subgroups are dual-Dedekind

SUMMARY. — We give a proof of the following theorem: A finite group G is modular if and only if all the maximal subgroups of G are dual-Dedekind elements in the lattice of the subgroups of G.

Un elemento d di un reticolo L è duale di Dedekind in L se sono soddisfatte le condizioni seguenti:

$$\text{(i)}\quad x, y \in L, \qquad x > y \Rightarrow (y \vee d) \wedge x = y \vee (d \wedge x),$$

$$\text{(ii)}\quad x, y \in L, \qquad d > y \Rightarrow (y \vee x) \wedge d = y \vee (x \wedge d),$$

nel qual caso scriviamo $d \,\hat{\mathfrak{D}}\, L$.

F. Menegazzo in [1] studia gli elementi duali di Dedekind di un reticolo gruppale mostrando che la presenza di tali elementi nel reticolo $L(G)$ di un gruppo finito G ha notevoli influenze sulla struttura algebrica di G stesso. In particolare egli descrive la struttura dei gruppi finiti nel cui reticolo sono duali di Dedekind tutti i sottogruppi normali.

Nella presente nota viene proseguita l'indagine sviluppata in [1] e si perviene alla dimostrazione del seguente teorema, che può apparire una generalizzazione di un risultato di Menegazzo:

TEOREMA. Un gruppo finito G è modulare se tutti gli elementi massimali di $L(G)$ sono in questo duali di Dedekind.

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto di Algebra e Geometria, via Belzoni 7, Padova.
(**) Memoria presentata il 5 luglio 1982 da Giuseppe Scorza Dragoni, uno dei XL.

ISSN-0392-4106

Rinviamo ad [1] per un elenco di proprietà elementari degli elementi duali di Dedekind nei reticoli in generale e nei reticoli gruppali in particolare. La nomenclatura riguardante i gruppi che useremo è quella standard [2]; inoltre diremo che un sottogruppo H di un gruppo G è duale di Dedekind in G per indicare che H è elemento duale di Dedekind in $L(G)$.

Cominciamo con un risultato riguardante i reticoli in generale.

Lemma 1. Sia L un reticolo con massimo 1 e minimo 0, atomico e soddisfacente alla condizione della catena ascendente. Se ogni atomo di L è elemento di Dedekind ed 1 è unione di atomi, allora L è modulare e complementato.

Dim. Mostriamo dapprima che risultano complementati in L gli elementi che sono unione di atomi. Sia dunque b unione di atomi; se $b=1$, certamente esso è complementato. Se $b \neq 1$ ed M denota l'insieme degli elementi $c \in L$ tali che $0 \neq c$ e $b \wedge c = 0$ allora M è non vuoto e per un suo elemento massimale m risulta $b \wedge m = 0$ e $b \vee m = 1$: infatti se risulta $b \vee m \neq 1$ allora esiste un atomo a tale che $a \leqslant b \vee m$ ed allora $((m \vee a) \wedge b) \vee m = (m \vee a) \wedge (b \vee m) = m$, giacché $m \vee a > m$ e $m \vee a \leqslant m \vee b$; per la massimalità di m risulta allora $(m \vee a) \wedge b \neq 0$ e quindi esiste un atomo $d \leqslant m$, $d < (m \vee a) \wedge b$: cosicché $m < m \vee \vee d < ((m \vee a) \wedge b) \vee m = m$: assurdo.

Se ora $m \in L$ e t è l'unione di tutti gli atomi di L contenuti in m, per quanto si è visto, esiste $c \in L$ tale che $c \vee t = 1$ e $c \wedge t = 0$. Pertanto risulta $m = m \wedge (c \vee t) = (m \wedge c) \vee t = t$ giacché $m \wedge c = 0$ altrimenti esisterebbe un atomo contenuto in $m \wedge c$ e quindi in $t \wedge c = 0$. Concludiamo che ogni elemento di L è elemento di Dedekind in quanto unione di atomi e, come già si è visto, tali elementi sono complementati.

Proposizione 2. Se G è un gruppo finito in cui ogni sottogruppo massimale è duale di Dedekind, allora G è supersolubile.

Dim. Per il risultato duale del lemma 1, $G/\Phi(G)$ ha reticolo modulare e quindi è supersolubile; ma allora G stesso è supersolubile.

Teorema 3. Se G è un gruppo finito non nilpotente in cui ogni sottogruppo massimale è duale di Dedekind, allora G è modulare.

Dim. Sia G un controesempio di ordine minimo: allora G è reticolarmente indecomponibile e pertanto anche $G/\Phi(G)$ è reticolarmente indecomponibile (cfr. Suzuki [3], pag. 5); siccome G non è nilpotente, l'ordine di $G/\Phi(G)$ non è potenza di un primo: pertanto $G/\Phi(G)$ è un P-gruppo non abeliano di cui denotiamo l'ordine con $p^\alpha q$, p e q primi, $p > q$, α intero positivo.

Sia ora $\langle 1 \rangle < N \lhd G$, $N < \Phi(G)$: siccome G è controesempio minimo, G/N è modulare e $(G/N)/\Phi(G/N)$ è P-gruppo non abeliano: dunque (Suzuki [3], pag. 13) G/N è un P_0^*-gruppo e $G = [S_p]S_q$ è prodotto semidiretto dei suoi due sottogruppi di Sylow. Distinguiamo ora due casi:

1) N ha ordine q. Siccome il q-sottogruppo di Sylow di G/N è ciclico e $N<\Phi(G)$, risulta che S_q stesso è ciclico: ne consegue che G è isomorfo a $[S_p]C_{q^\alpha}$ con S_p abeliano elementare ed il gruppo ciclico C_{q^α} inducente un automorfismo-potenza di ordine primo su S_p: ma allora G è modulare in contrasto con la scelta fatta.

2) N ha ordine p. In questo caso S_q è ciclico ed S_p/N risulta abeliano elementare. I sottogruppi massimali di G sono pure elementi di Dedekind di $L(G)$ e pertanto (Schmidt [4]) i gruppi di automorfismi indotti da G sui suoi fattori principali hanno ordine primo oppure 1. Siccome G è reticolarmente indecomponibile risulta $\mathrm{C}_G(N)=S_p\mho^1(S_q)$ e quindi $\mho^1(S_q)\lhd G$ giacché $N\times\mho^1(S_q)\lhd G$ per la modularità di G/N. Se fosse $\mho^1(S_q)\neq\langle 1\rangle$ allora dalla minimalità di G consegue che $G/\mho^1(S_q)$ è modulare e quindi che S_p è abeliano elementare: ma allora $S_q>\Phi(G)$ in contrasto con la scelta fatta. Pertanto $G=[S_p]C_q$ (C_q gruppo ciclico di ordine q) ed S_p risulta sottogruppo massimale e quindi duale di Dedekind in G. Per ogni sottogruppo $H<S_p$ si ha: $H=H\vee(S_p\wedge C_q)=(H\vee C_q)\wedge S_p\lhd H\vee C_q$: dunque ogni sottogruppo di S_p è normalizzato da C_q cosicché S_p è abeliano e C_q induce su di esso un gruppo di automorfismi-potenza (cfr. Huppert [5]). Inoltre S_p ha esponente p altrimenti esso conterrebbe un sottogruppo $M\lhd G$ tale che S_p/M sia ciclico di ordine p^β con $2<\beta<\alpha$ ed allora G/M sarebbe abeliano, giacché i suoi sottogruppi massimali sono duali di Dedekind, ed isomorfo ad un sottogruppo di G: ciò comporterebbe che C_q è nel centro di G: assurdo. Dobbiamo concludere che G è prodotto semidiretto di un p-gruppo abeliano elementare con un gruppo di ordine q che induce su esso un automorfismo-potenza e dunque che G è modulare; con questa ultima contraddizione il teorema è dimostrato.

Trattiamo ora il caso dei gruppi finiti nilpotenti: ci basterà studiare i p-gruppi.

Teorema 4. Un p-gruppo finito in cui tutti i sottogruppi massimali sono duali di Dedekind è modulare.

Dim. Sia G un controesempio di ordine minimo; allora per ogni sottogruppo N, $N\neq\langle 1\rangle$, $N\lhd G$, $L(G/N)$ è reticolo modulare. Siccome G contiene un sottogruppo minimale non modulare, una sua sezione A/B è isomorfa al gruppo non abeliano di ordine p^3 ed esponente p se $p\neq 2$ o al gruppo diedrale di ordine 8 nel caso $p=2$, e per ogni sottogruppo $R\lhd G$, $|R|=p$ risulta $R<A$ ed $R\leqslant B$: cosicché G ha un solo sottogruppo normale di ordine p che indichiamo con D.

Sia ora $\langle a\rangle$ un sottogruppo di ordine p di G.

Supponiamo che $\langle a\rangle\leqslant\Phi(G)$: allora esiste un sottogruppo massimale $M<G$ tale che $M\vee\langle a\rangle=G$, $M\wedge\langle a\rangle=\langle 1\rangle$, cosicché $L(M)=[M/M\wedge\langle a\rangle]=[G/\langle a\rangle]$ ha tutti gli elementi massimali duali di Dedekind e per la minimalità di G risulta che M è modulare. Inoltre per ogni sottogruppo H di M risulta $M\wedge(\langle a\rangle\vee H)=(M\wedge\langle a\rangle)\vee H=H$ giacché $M\,\hat{\mathfrak{D}}\,G$; quindi $\langle a\rangle<\mathrm{N}_G(H)$. Pertanto a induce su M un automorfismo-potenza e dovendo essere il centro di G ciclico, M risulta modulare con al più due generatori.

Allora per il lemma 1.3. di Napolitani [6] risulta che $p = 2$ e che l'esponente di M è maggiore di 2. Se M fosse hamiltoniano, $G = M\langle a\rangle$ sarebbe un gruppo di ordine 16 non modulare, estensione del gruppo dei quaternioni di ordine 8, giacché M ha due generatori, mediante un automorfismo-potenza di ordine 2: ma un tale gruppo non ha tutti i sottogruppi massimi duali di Dedekind: assurdo. Dunque M non è hamiltoniano ed ancora per il lemma citato di Napolitani dobbiamo concludere che nessun elemento di periodo 4 di M commuta con a.

Sia ora b un elemento di periodo massimo in M; siccome $\langle b\rangle \triangleleft \langle a, b\rangle$, per quanto si è visto, $\langle a, b\rangle$ è diedrale o semidiedrale ed allora G/D contiene la sezione $\langle a, b\rangle D/D$ che è diedrale e modulare per la scelta di G. Pertanto $\langle a, b\rangle D/D$ è gruppo di ordine 4 non ciclico e l'esponente di M è 4. Allora M è abeliano in quanto modulare non hamiltoniano di esponente 4 e quindi $\Omega_1(M) < \mathfrak{Z}(G)$. G ha un solo sottogruppo normale minimo cosicché M è ciclico di ordine 4: ne consegue che G è diedrale di ordine 8 e ciò è assurdo perché i sottogruppi massimi di G sono duali di Dedekind. Abbiamo così dimostrato che $\Omega_1(G) < \Phi(G)$.

Consideriamo ora il gruppo modulare G/D: risulta $G/D = A/D \cdot \langle tD\rangle$ con A/D abeliano e tD inducente su A/D l'automorfismo individuato dalla posizione $(aD)^{tD} = a^{1+p^s}D$ con $s > 2$ se $p = 2$, per ogni $aD \in A/D$ (cfr. Iwasawa [7], Napolitani [8]); possiamo scrivere $A/D = \langle a_1D\rangle \times \ldots \times \langle a_rD\rangle$. Pertanto $G = \langle a_1, \ldots, a_r, t, D\rangle = \langle a_1, \ldots, a_r, t\rangle$ giacché $D < \Phi(G)$.

Estraiamo ora da $\{a_1, \ldots, a_r, t\}$ un insieme minimale di generatori di G che denotiamo con $\mathfrak{G} = \{b_1, \ldots, b_s, t\}$ e supponiamo $|b_1| < |b_2| < \ldots < |b_s|$. Per quanto si è già visto b_i ha ordine almeno p^2 e risulta $\langle b_i\rangle > D$ per $i = 1, 2, \ldots, s$: altrimenti, essendo $\langle b_i, D\rangle \triangleleft G$ per la struttura di G/D, risulta che $\mho^1(\langle b_i, D\rangle)$ è sottogruppo normale di G non contenente l'unico sottogruppo normale minimo D.

Supponiamo $s > 1$ e dimostriamo che $\{b_1, \ldots, b_s\}$ non contiene elementi di periodo p^2. Infatti se $p \neq 2$ e b_1 ha ordine p^2, allora $\langle b_1, b_2\rangle = [\langle b_2\rangle] \cdot \langle c\rangle$ con c di periodo p cosicché $c \notin \Phi(G)$ e risulta $G = \langle b_1, b_2, \ldots, b_s, t\rangle = \langle c, b_2, \ldots, b_s, t\rangle = \langle b_2, \ldots, b_s, t\rangle$ in contrasto con la scelta di $\mathfrak{G}$. Se $p = 2$ e b_1 ha periodo 4 allora $\langle b_1, b_i\rangle$ non può essere estensione spezzante di b_i per l'argomentazione vista nel caso $p \neq 2$, e quindi, essendo A/D abeliano, $\langle b_1, b_i\rangle$ è gruppo dei quaternioni di ordine 8 per $i = 2, \ldots, s$. Ne consegue che $\langle b_1, \ldots, b_s\rangle$ è gruppo extraspeciale. Allora se $s > 2$, $\langle b_1, b_2, \ldots, b_s\rangle$ ammette un insieme minimale di generatori contenente elementi di periodo 2; oppure $G = \langle b_1, b_2\rangle \cdot \langle t\rangle$ con t inducente un automorfismo-potenza sul gruppo dei quaternioni di ordine 8 $\langle b_1, b_2\rangle$: allora $t^2 \in \mathfrak{Z}(G)$ e $t^2 \in \langle b_1\rangle$, giacché da $t^2 \notin \langle b_1\rangle$ conseguirebbe $\langle t, b_1\rangle = \langle t, b_1, t^2\rangle = \langle t, t^2, c\rangle = \langle t, c\rangle$ con c di periodo 2, ma ciò come si è già visto porterebbe ad un assurdo, ed allora G è un gruppo di ordine 16 che non ha tutti i sottogruppi massimi duali di Dedekind. In ogni caso otteniamo un assurdo e perciò dobbiamo concludere che il periodo di b_i

è maggiore di p^2 per $i = 1, 2, \dots, r$. Ancora, se $r > 2$, $\langle b_1\rangle\langle b_2\rangle$ è estensione spezzante del tipo $[\langle b_2\rangle]\langle c\rangle$ con c di periodo maggiore di p e risulta $D\langle c\rangle \lhd G$: pertanto $\mho^1(D\langle c\rangle) = \langle c^p\rangle$ è sottogruppo normale di G non contenente l'unico sottogruppo normale minimo D: assurdo.

In conclusione risulta $G = \langle b_1\rangle\langle t\rangle$ con $b_1^t = b_1^r$: siccome G non è modulare risulta $p = 2$ ed $r \equiv -1 \bmod 4$. Se $G/\langle b_1^4\rangle$ fosse estensione spezzante di $\langle b_1\rangle/\langle b_1^4\rangle$ allora $G/\langle b_1^4, t^2\rangle$ sarebbe un quoziente diedrale di ordine 8, che non ha tutti i sottogruppi massimi duali di Dedekind, in contrasto con le ipotesi; allora risulta $\langle b_1^2\rangle/\langle b_1^4\rangle < \langle t\rangle\langle b_1^4\rangle/\langle b_1^4\rangle$ e quindi $b_1^2 = t^i b_1^{4j}$ per convenienti interi i e j, cosicché $\langle t\rangle$ contiene b_1^{2-4j} ed anche b_1^2: ma allora possiamo concludere che $\langle t\rangle$ è sottogruppo massimale di G che, pertanto, non essendo modulare, ha un quoziente diedrale di ordine 8 in contrasto con le ipotesi.

Così abbiamo verificato che un controesempio di ordine minimo non esiste e concludiamo che il teorema è dimostrato.

BIBLIOGRAFIA

[1] F. Menegazzo, *Dual-Dedekind subgroups in finite groups*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 45 (1971).
[2] E. Schenkman, *Group theory*, Van Nostrand (1965).
[3] M. Suzuki, *Structure of a group and the structure of its lattice of subgroups*, Springer-Verlag (1956).
[4] R. Schmidt, *Endliche Gruppen mit vielen modularen Untergruppen*, Abh. Math. Sem. Hamburg, 34 (1970).
[5] B. Huppert, *Zur Sylowstruktur auflösbarer Gruppen*, Arch. Math., 12 (1961).
[6] F. Napolitani, *Gruppi finiti minimali non modulari*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 45 (1971).
[7] K. Iwasawa, *Über die endlichen Gruppen und die Verbände ihrer Untergruppen*, J. Univ. Tokyo, 4 (1941).
[8] F. Napolitani, *Sui p-gruppi modulari finiti*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 39 (1967).