Rendiconti
Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL
Memorie di Matematica
101° (1983), Vol. VII, fasc. 5, pagg. 37-50

GIANNI DECIMA (*)

Su una stima a priori in L^p per un sistema differenziale lineare (**)

On an a priori L^p-estimate for a linear differential system

SUMMARY. — We consider a matricial differential operator $\mathcal{A}$ of order $2m$ with complex valued coefficients defined in a bounded open set. We prove that, if a generalized version of Gårding's inequality in L^p holds, then $\mathcal{A}$ is properly elliptic and the Dirichlet's boundary conditions are complementing. Further, we prove the converse under additional regularity assumptions on the coefficients.

INTRODUZIONE

Si considera un operatore differenziale matriciale $\mathcal{A}$ di ordine $2m$ a coefficienti variabili. Nel caso particolare che l'operatore $\mathcal{A}$ sia scalare è stato provato da Simader (v. [1] e [2]) che la condizione di ellitticità propria equivale al sussistere di una disuguaglianza in L^p generalizzante in un certo senso quella di Gårding. In questo lavoro si dimostra che il sussistere della disuguaglianza (3), del tipo di quella di Simader, per l'operatore matriciale $\mathcal{A}$ implica che l'operatore $\mathcal{A}$ è propriamente ellittico e che le condizioni al contorno di Dirichlet per l'operatore $\mathcal{A}$ sono «complementanti» (nel senso di Agmon-Douglis-Nirenberg [3]). Successivamente viene provata l'implicazione inversa con quelle ipotesi di regolarità sui coefficienti che consentano di considerare l'aggiunto di $\mathcal{A}$. La dimostrazione di questa seconda parte si ispira, con alcune semplificazioni, a una svolta di Schechter in [5] e [6] nel caso di un operatore scalare.

La stima in questione è evidentemente legata al problema di Dirichlet per l'operatore $\mathcal{A}$. La tecnica usata nelle dimostrazioni appare, tuttavia, applicabile

(*) Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico, Via Belzoni 7, 35100 Padova.
(**) Memoria presentata il 27 Ottobre 1982 da Giuseppe Scorza Dragoni, uno dei XL.

ISSN-0392-4106

a problemi al contorno di tipo più generale. Si osservi inoltre che gli operatori scalari sono supposti tutti dello stesso ordine, soltanto per rendere meno pesante la trattazione.

1. - Notazioni

Ω sarà sempre un aperto limitato di $\mathbf{R}^r$ $(r \geq 2)$ e $\partial\Omega$ la sua frontiera. Useremo le notazioni consuete. Con $\mathfrak{D}(\Omega)$ denoteremo l'insieme delle funzioni di Ω in $\mathbf{C}$ che sono di classe C^∞ e a supporto compatto in Ω. Se $m \in \mathbf{Z}^+$ e $p \in \mathbf{R}$, $p>1$, con $W^{m,p}(\Omega)$ si indicherà lo spazio di Banach delle funzioni u: $\Omega \to \mathbf{C}$ tali che tutte le derivate di ordine $\leq m$ appartengano a $L^p(\Omega)$ con la norma definita da $\|u\|_{m,p} = \Big(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{0,p}^p\Big)^{1/p}$ dove $\|u\|_{0,p}$ indica la norma usuale di $L^p(\Omega)$. $W_0^{m,p}(\Omega)$ sarà la chiusura di $\mathfrak{D}(\Omega)$ in $W^{m,p}(\Omega)$. Il duale forte di $W_0^{m,p}(\Omega)$ sarà denotato con $W^{-m,p'}(\Omega)$, ove p' è legato a p da $1/p + 1/p' = 1$. Come è noto $W^{-m,p'}(\Omega)$ è l'insieme delle (estensioni continue a $W_0^{m,p}(\Omega)$ delle) distribuzioni in Ω che sono uguali ad una somma di derivate di ordine $\leq m$ di elementi di $L^{p'}(\Omega)$. $W^{-m,p'}(\Omega)$ risulta quindi normato ponendo

$$\|u\|_{-m,p'} = \sup_{0 \neq v \in W_0^{m,p}(\Omega)} \frac{|(u,v)_0|}{\|v\|_{m,p}},$$

ove $(\cdot,\cdot)_0$ è il prodotto scalare di $L^2(\Omega)$. Se $(E, \|\cdot\|)$ è uno spazio normato, su E^n considereremo la norma $\|\cdot\|_n$, definita, $\forall u = (u_i)_{i=1,\dots,n} \in E^n$, da $\|u\|_n = \sum_{i=1}^{n} \|u_i\|$. Su $(W^{-m,p'}(\Omega))^n$ la norma ora considerata è, evidentemente, equivalente a quella, che indichiamo ancora con $\|\cdot\|_{-m,p',n}$ definita da

$$\|u\|_{-m,p',n} = \sup_{0 \neq v \in (W_0^{m,p}(\Omega))^n} \frac{|(u,v)_{0,n}|}{\|v\|_{m,p,n}},$$

ove $(\cdot,\cdot)_{0,n}$ è il prodotto scalare usuale di $(L^2(\Omega))^n$.

2. - Enunciati dei risultati principali

Siano $m, n \in \mathbf{N}$, $m \geq 1$, $n \geq 2$; $p, p' \in \mathbf{R}$ con $p>1$, $p'>1$ e $1/p + 1/p' = 1$. Per ogni coppia di multiindici $\alpha, \beta \in (\mathbf{Z}^+)^r$, con $|\alpha| \leq m$, $|\beta| \leq m$, sia data la matrice $(a_{\alpha\beta}^{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ con $a_{\alpha\beta}^{ij}$: $\Omega \to \mathbf{C}$. Consideriamo l'operatore differenziale matriciale

$$A(x, D) = \sum_{|\alpha|,|\beta| \leq m} a_{\alpha\beta}(x) D^\alpha D^\beta. \tag{1}$$

Per ogni $x \in \bar{\Omega}$ e per ogni $\xi \in \mathbf{R}^r$ poniamo $l_{ij}(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}^{ij}(x)\xi^{\alpha+\beta}$, e indichiamo con $(l_{ij}^*(x,\xi))_{i,j=1,\dots,n}$ l'aggiunta della matrice $(l_{ij}(x,\xi))_{i,j=1,\dots,n}$. Poniamo inoltre, per $x\in\Omega$ e $\xi\in\mathbf{R}^r-\{0\}$,

$$L(x,\xi)=\det\Big(\sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(x)\,\xi^{\alpha+\beta}\Big).$$

Considereremo le seguenti tre condizioni:

(A) L'operatore $A(x,D)$ è uniformemente ellittico, nel senso che, per ogni $x\in\Omega$ e ogni $\xi\in\mathbf{R}^r-\{0\}$ risulta $L(x,\xi)>E|\xi|^{2mn}$, con E costante indipendente da ξ e da x.

(B) Per ogni $x\in\Omega$ e per ogni coppia (ξ',ξ'') di elementi linearmente indipendenti di $\mathbf{R}^r$, il polinomio $L(x,\xi'+\tau\xi'')$ nella variabile $\tau\in\mathbf{C}$ ha esattamente mn zeri con parte immaginaria positiva.

Si noti che la condizione (B) equivale ad affermare (v. Simader [2]) che per ogni $x\in\Omega$ e ogni $\xi'\in\mathbf{R}^{r-1}-\{0\}$ il polinomio $L(x;(\xi',\tau))$ nella variabile $\tau\in\mathbf{C}$ ha esattamente mn zeri con parte immaginaria positiva. Come è noto, la condizione è sempre soddisfatta nel caso $r>3$.

Supposto Ω sufficientemente regolare, se $x\in\partial\Omega$, ν è il versore della normale esterna a $\partial\Omega$ in x e $\xi\in\mathbf{R}^r-\{0\}$ è tangente a $\partial\Omega$ in x, indichiamo con $\tau_k^+(x,\xi)$, $k=1,\dots,mn$, gli zeri con parte immaginaria positiva del polinomio $L(x,\xi+\tau\nu)$ nella variabile $\tau\in\mathbf{C}$ e poniamo

$$M^+(x;\xi,\tau)=\prod_{k=1}^{mn}(\tau-\tau_k^+(x,\xi)). \tag{2}$$

(C) Per ogni $x\in\partial\Omega$ e ogni $\xi\in\mathbf{R}^r-\{0\}$ tangente a $\partial\Omega$ in x, il polinomio in τ

$$\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{i=1}^{n} c_{kn+i}\sum_{j=1}^{n}\tau^k l_{ij}^*(x,\xi+\tau\nu)$$

con $c_{kn+i}\in\mathbf{C}$, è nullo modulo il polinomio (2) solo se le costanti c_{kn+i} sono tutte nulle.

La coppia di condizioni ((A), (B)) esprime il fatto che l'operatore matriciale $A(x,D)$ è uniformemente propriamente ellittico. La condizione (C) traduce il fatto che le condizioni al contorno di Dirichlet per l'operatore A sono «complementanti» (nel senso di Agmon-Douglis-Nirenberg [3]). Come è noto (v. [3], p. 63) le condizioni (B) e (C) sono verificate se l'operatore (1) è uniformemente fortemente ellittico. È noto anche che, per $n=1$, la proprietà (C) è una conseguenza di (A) e (B) (v., ad esempio, Agmon-Douglis-Nirenberg [4]). Invece, nel caso $n>1$, (A) e (B) non implicano in generale (C) e la uniforme forte ellitticità di A è una condizione sufficiente ma non necessaria perchè valgano (B) e (C); si può infatti verificare (v. Thompson [8]) che per l'operatore

$$Au = \left(\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \lambda \sum_{h=1}^{3} \frac{\partial^2 u_h}{\partial x_i \partial x_h} \right)_{i=1,2,3}, \qquad \lambda \in \mathbf{R}$$

la coppia di condizioni $((A), (B))$ è soddisfatta per ogni $\lambda \neq -1$, la terna di condizioni $((A), (B), (C))$ è soddisfatta per ogni $\lambda \in \mathbf{R}$ tale che $\lambda \neq -1$ e $\lambda \neq -2$, mentre la condizione di forte ellitticità è soddisfatta per ogni $\lambda > -1$.

TEOREMA 1: *Sia* $a_{\alpha\beta} \in (C_0(\bar{\Omega}))^{n^2}$ *per* $|\alpha| = |\beta| = m$ *e* $a_{\alpha\beta} \in (L^\infty(\Omega))^{n^2}$ *per* $|\alpha| + |\beta| < 2m$. *Se esistono due numeri positivi* C_1 *e* C_2 *tali che*

$$\|Au\|_{-m,p,n} > C_1 \|u\|_{m,p,n} - C_2 \|u\|_{0,p,n} \qquad \forall u \in (\overset{\circ}{W}{}^{m,p}(\Omega))^n \tag{3}$$

allora è soddisfatta la condizione (A) *e, se* Ω *è di classe* C^m, *sono soddisfatte le condizioni* (B) *e* (C).

TEOREMA 2: *Le funzioni* $a^{ij}_{\alpha\beta}$ *abbiano le derivate parziali di ordine* $< |\alpha| + |\beta|$ *continue e limitate in* Ω *e* Ω *sia di classe* C^{2m}. *Se sussistono le condizioni* (A), (B) *e* (C), *allora esistono due costanti* C_1 *e* C_2 *tali che valga* (3).

3. - DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 1

1) Dimostriamo che da (3) segue la condizione (A): per le ipotesi fatte sulle funzioni $a^{ij}_{\alpha\beta}$ risulta $\sup\limits_{\Omega} \sum\limits_{\substack{|\alpha|,|\beta| \leq m \\ |\alpha|+|\beta|<2m}} \sum\limits_{i,j=1}^{n} |a^{ij}_{\alpha\beta}(x)| < K_1$, con K_1 costante. Posto $A'(x, D) = \sum\limits_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(x) D^\alpha D^\beta$, si ha

$$|(Au, v)_{0,n}| < |(A'u, v)_{0,n}| + K_1 \sum_{|\alpha|+|\beta|<2m} \sum_{i,j=1}^{n} |(D^\alpha D^\beta u_j, v_i)_0| .$$

Nel secondo termine della parte destra spostiamo le derivate di ordine $|\beta|$ sulla funzione v; successivamente, nei termini in cui compaiono derivazioni di ordine $|\alpha| = m$, spostiamo un'ulteriore derivata sulla funzione v, in modo che compaiano derivate di u di ordine $< m-1$, ottenendo, in definitiva

$$\|Au\|_{-m,p,n} < \|A'u\|_{-m,p,n} + K_2 \|u\|_{m-1,p,n}$$

con K_2 costante. Applicando il Lemma di Ehrling-Nirenberg (v. Simader [1]) dall'ultima disuguaglianza si ricava

$$\|A'u\|_{-m,p,n} > C_1/4 \|u\|_{m,p,n} - C_2' \|u\|_{0,p,n} \tag{4}$$

con C_2' costante. Sia ora $x_0 \in \bar{\Omega}$ fissato arbitrariamente. Dato che le funzioni $a_{\alpha\beta}^{ij}$ sono (uniformemente) continue in $\bar{\Omega}$ per $|\alpha| = |\beta| = m$, esiste un $\delta > 0$ tale che per $x \in \bar{\Omega}$, $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |a_{\alpha\beta}^{ij}(x_0) - a_{\alpha\beta}^{ij}(x)| < C_1/8N^2$ per ogni $i, j = 1, \ldots, n$ e per ogni coppia di multiindici α, β con $|\alpha| = |\beta| = m$, dove N indica il numero di multiindici α con $|\alpha| = m$. Modificando opportunamente δ possiamo supporre che, posto $K_\delta = \{x \in \bar{\Omega} \mid |x - x_0| < \delta\}$, si abbia, per ogni $x \in K_\delta$

$$\sum_{i,j=1}^{n} |a_{\alpha\beta}^{ij}(x_0) - a_{\alpha\beta}^{ij}(x)| < C_1/8N^2 . \tag{5}$$

Posto $A_0(x, D) = \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(x_0) D^\alpha D^\beta$, risulta, per ogni u in $(C_0^\infty(K_\delta))^n$ e per ogni v in $(C_0^\infty(\Omega))^n$,

$$|(A'u, v)_{0,n}| < |(A_0 u, v)_{0,n}| + \left| \Big(\sum_{|\alpha|=|\beta|=m} (a_{\alpha\beta}(x) - a_{\alpha\beta}(x_0)) D^\alpha D^\beta u, v \Big)_{0,n} \right| .$$

Da quest'ultima, in base a (5) ed a (4), si deduce facilmente

$$\| A_0 u \|_{-m,p,n} > C_1/8 \| u \|_{m,p,n} - C_2' \| u \|_{0,p,n} \qquad \forall u \in (C_0^\infty(K_\delta))^n . \tag{6}$$

Considerando ora un multiindice σ con $|\sigma| = m$ e due funzioni u, φ, $u \in (C_0^\infty(K_\delta))^n$, $\varphi \in (C_0^\infty(\Omega))^n$, risulta chiaramente $(A_0 D^\sigma u, \varphi)_{0,n} = (-1)^m (A_0 u, D^\sigma \varphi)_{0,n}$ e quindi $\| A_0 D^\sigma u \|_{-m,p,n} < N \| A_0 u \|_{0,p,n}$. Sostituendo $D^\sigma u$ ad u in(6) e sommando su tutti i multiindici σ con $|\sigma| = m$, otteniamo

$$N^2 \| A_0 u \|_{0,p,n} > C_1/8 \sum_{|\sigma|=m} \| D^\sigma u \|_{m,p,n} - C_2' \sum_{|\sigma|=m} \| D^\sigma u \|_{0,p,n} . \tag{7}$$

Valendo inoltre la disuguaglianza $\sum_{|\sigma|=m} \| D^\sigma u \|_{m,p,n} > \gamma \| u \|_{2m,p,n}$ per ogni u in $(C_0^\infty(K_\delta))^n$ (con γ costante), da (7) segue

$$\| A_0 u \|_{0,p,n} > C_1' \| u \|_{2m,p,n} - C_2'' \sum_{|\sigma|=m} \| D^\sigma u \|_{0,p,n} \qquad \forall u \in (C_0^\infty(K_\delta))^n \tag{8}$$

con C_1' e C_2'' costanti. Consideriamo ora $v \in C_0^\infty(K_\delta)$ arbitraria ma non nulla. Siano inoltre $\xi \in \mathbf{R}^r - \{0\}$, $\lambda \in \mathbf{R}$, $\lambda > 1$ e $c = (c_i)_{i=1,\ldots,n}$ in $\mathbf{R}^n - \{0\}$. Poniamo

$$u_0(x) = v(x) \exp [i\lambda(\xi, x)] c .$$

Ovviamente $u_0 \in (C_0^\infty(K_\delta))^n$. Per u_0 vale quindi (8) e perciò anche

$$\left\| \frac{1}{\lambda^{2m}} A_0 u_0 \right\|_{0,p,n} > C_1' \left\| \frac{1}{\lambda^{2m}} u_0 \right\|_{2m,p,n} - C_2'' \sum_{|\sigma|=m} \left\| \frac{1}{\lambda^{2m}} D^\sigma u_0 \right\|_{0,p,n} .$$

Passando al limite per $\lambda \to +\infty$ si ottiene senza difficoltà

$$\sum_{i=1}^{n}\Big\|\sum_{j=1}^{n}\sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}^{ij}(x_0)\xi^{\alpha+\beta}c_j v(x)\Big\|_{0,p} > C_1' \sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{|\alpha|=2m}\|\xi^{\alpha}c_i v(x)\|_{0,p}^{p}\Big)^{1/p}$$

donde

$$\sum_{i=1}^{n}\Big|\sum_{j=1}^{n}\sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}^{ij}(x_0)\xi^{\alpha+\beta}c_j\Big|\,\|v\|_{0,p} > C_1' \sum_{i=1}^{n}|c_i|\Big(\sum_{|\alpha|=2m}|\xi^{\alpha}|^{p}\Big)^{1/p}\|v\|_{0,p}$$

da cui infine (ricordando che $v \neq 0$)

$$\sum_{i=1}^{n}\Big|\sum_{j=1}^{n}\sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}^{ij}(x_0)\xi^{\alpha+\beta}c_j\Big| > 0 \qquad \forall\xi\neq 0 \text{ e } \forall c\neq 0 .$$

Non è difficile riconoscere che ciò implica

$$\det \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(x_0)\xi^{\alpha+\beta}\neq 0 \qquad \forall\xi\neq 0 .$$

Dunque, data l'arbitrarietà di $x_0\in\bar{\Omega}$, si ha

$$\text{(9)} \qquad \det \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(x)\xi^{\alpha+\beta}\neq 0 \qquad \forall (x,\xi)\in\bar{\Omega}\times(\mathbf{R}^r-\{0\}) .$$

Tenendo presente che $a_{\alpha\beta}\in(C_0(\bar{\Omega}))^{n^2}$ se $|\alpha|=|\beta|=m$, da (9) segue senza difficoltà l'esistenza di una costante $E>0$ tale che

$$\Big|\det \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(x)\xi^{\alpha+\beta}\Big| > E|\xi|^{2mn} \qquad \forall (x,\xi)\in\bar{\Omega}\times(\mathbf{R}^r-\{0\}) .$$

2) Dimostriamo ora che, nel caso $r=2$, da (3) segue la condizione (B). Sia $x_0\in\partial\Omega$ fissato arbitrariamente. Dato che Ω è di classe C^∞ vi è un intorno aperto U di x_0 e un C^∞-diffeomorfismo τ di U sulla sfera unitaria di $\mathbf{R}^2$ tale che

$$\tau(U\cap\Omega)=\{(y,t)\in\mathbf{R}^2 \mid y^2+t^2<1,\, t>0\}=H$$

e

$$\tau(U\cap\partial\Omega)=\{(y,t)\in\mathbf{R}^2 \mid y^2+t^2<1,\, t=0\} ;$$

poniamo

$$H'=\{(y,t)\in\mathbf{R}^2 \mid y^2+t^2<1/2,\, t>0\}, \qquad V'=\tau^{-1}(H'), \qquad V=U\cap\Omega .$$

Sia poi $\zeta\in C_0^\infty(U)$ uguale ad uno in un intorno di V'. Risulta allora per ogni $u\in(W_*^{m,p}(V'))^n$ e per ogni $v\in(C_0^\infty(\Omega))^n$

$$|(Au,v)_{0,n}| < \|Au\|_{-m,p,n}\cdot\|\zeta v\|_{m,p',n} < c(\zeta)\|Au\|_{-m,p,n}\cdot\|v\|_{m,p',n}$$

con $c(\zeta)$ costante dipendente da ζ, r ed m. Quindi vale

$$(10)\qquad \|Au\|_{-m,p,n} > C_1'\|u\|_{m,p,n} - C_2'\|u\|_{0,p,n} \qquad \forall u \in (W_0^{m,p}(V'))^n$$

con C_i', $i = 1, 2$, costanti. Data $f\colon V \to \mathbf{C}^n$ poniamo $Z(f)(z) = f(\tau^{-1}(z))$ per ogni $z = (y, t) \in H$. Dalle proprietà di τ segue che Z è un omeomorfismo di $(W_0^{m,p'}(V))^n$ su $(W_0^{m,p'}(H))^n$ e di $(W_0^{m,p}(V'))^n$ su $(W_0^{m,p}(H'))^n$. « Trasformando » l'operatore A nelle coordinate di H otteniamo un operatore $\bar{A}$ i cui coefficienti $\bar{a}_{\alpha\beta}$ hanno la stessa regolarità delle funzioni $a_{\alpha\beta}$ e verificano la condizione (A) (ciò può essere verificato con una metodologia analoga a quella svolta da Simader in [1], pp. 58-63). Inoltre, in base alle proprietà dell'applicazione Z, da (10) segue

$$(11)\qquad \|\bar{A}v\|_{-m,p,n} > C_1''\|v\|_{m,p,n} - C_2''\|v\|_{0,p,n} \qquad \forall v \in (W_0^{m,p}(H'))^n$$

con C_i'', $i = 1, 2$, costanti dipendenti dalla trasformazione τ. Con passaggi analoghi a quelli svolti nella parte 1), da (11) si ottiene

$$(12)\qquad \|\bar{A}_0 v\|_{-m,p,n} > \gamma_1\|v\|_{m,p,n} - \gamma_2\|v\|_{0,p,n} \qquad \forall v \in (W_0^{m,p}(H'))^n\,,$$

dove $\bar{A}_0 = \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} \bar{a}_{\alpha\beta}(0) D^\alpha D^\beta$ e γ_i, $i = 1, 2$, sono costanti. Per $\xi \in \mathbf{R}$, $\xi \neq 0$ e $z \in \mathbf{C}$ sia

$$\bar{L}_0(\xi, z) = \det\Big(\sum_{|\alpha|=|\beta|=m} \bar{a}_{\alpha\beta}(0)\,\xi^{\alpha_1+\beta_1} z^{\alpha_2+\beta_2}\Big) \qquad \text{dove } \alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \text{ e } \beta = (\beta_1, \beta_2).$$

Dato che la condizione (A) vale anche per l'operatore $\bar{A}$, possiamo affermare che il polinomio in z $\bar{L}_0(\xi, z)$ non ha zeri reali. Supponiamo ora che la condizione (B) sia non soddisfatta dall'operatore $\bar{A}_0$. Si può quindi affermare, tenuto conto di quanto osservato dopo l'enunciazione di (B) e dell'omogeneità di $\bar{L}_0(\xi, z)$ rispetto a ξ, che esiste $\xi \in \mathbf{R}$, con $|\xi| = 1$, per cui vi sono $\varrho = \varrho(\xi) > mn + 1$ zeri, $z_k^+(\xi)$, con $k = 1, \ldots, \varrho(\xi)$, di $\bar{L}_0(\xi, z)$ con parte immaginaria positiva. Di conseguenza si può provare (v. [3], pp. 60-61) che esiste una soluzione $v = (v_i(y, t))_{i=1,\ldots,n}$ del sistema $\bar{A}_0 v = 0$ su M verificante le condizioni al contorno di Dirichlet su ∂M, tale che le funzioni v_i hanno le derivate fino all'ordine $2m$ limitate, sono decrescenti esponenzialmente al tendere di t a $+\infty$ e, per almeno un indice j, $1 < j < n$, risulta

$$(13)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{+\infty} \left|\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^m v_j(y, t)\right|^p dy\,dt > 0\,.$$

Sia ora, per $\lambda \in \mathbf{R}$, $\lambda > 1$, $v_{\lambda,i}(y, t) = v_i(\lambda y, \lambda t)$. Posto $v_\lambda = (v_{\lambda,i})_{i=1,\ldots,n}$ risulta ancora $\bar{A}_0 v_\lambda = 0$. Sia ora $\eta \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ tale che $\eta(r) = 1$ per $0 < |r| < 1/8$ e $\eta(r) = 0$ per $|r| > 1/4$. Poniamo $\zeta(y, t) = \eta(y)\eta(t)$. Risulta $\zeta v_\lambda \in (W_0^{m,p}(H'))^n$, $\forall \lambda > 1$.

Applicando la regola di Leibnitz possiamo quindi affermare che, per ogni $\varphi \in (C_0^\infty(H))^n$ si ha

$$(-1)^m(\tilde{A}_0\zeta v_\lambda, \varphi)_{0,n} = \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} (\tilde{a}_{\alpha\beta}(0) D^\alpha v_\lambda, D^\beta(\zeta\varphi))_{0,n} +$$

$$+ \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} \Bigg(\sum_{\substack{\sigma\le\alpha\\ |\sigma|>0}} \binom{\alpha}{\sigma} (\tilde{a}_{\alpha\beta}(0) D^{\alpha-\sigma} v_\lambda, D^\sigma\zeta D^\beta\varphi)_{0,n} -$$

$$- \sum_{\substack{\varrho\le\beta\\ |\varrho|>0}} \binom{\beta}{\varrho} (\tilde{a}_{\alpha\beta}(0) D^\alpha v_\lambda, D^{\beta-\varrho}\varphi D^\varrho\zeta)_{0,n} \Bigg).$$

Il primo termine a destra è uguale a $(\tilde{A}_0 v_\lambda, \zeta\varphi)_{0,n} = 0$. Si arriva, con tecniche già usate in 1), ad una maggiorazione del tipo

$$|(\tilde{A}_0\zeta v_\lambda, \varphi)|_{0,n} < K \sum_{|\alpha|\le m-1} \|D^\alpha v_\lambda\|_{(L^p(H'))^n} \cdot \|\varphi\|_{m,p',n}. \tag{14}$$

Si ha inoltre, dopo alcuni calcoli,

$$\|D^\alpha v_\lambda\|^p_{0,p,n} < \left(\sum_{i=1}^n \left(\int_{-1}^{1}\int_0^1 |D^\alpha v_{\lambda,i}|^p \, dy\, dt \right)^{1/p} \right)^p < K'(m, p, v_\lambda)\lambda^{|\alpha|p-2}.$$

Quindi da (14) si ottiene

$$\|\tilde{A}_0\zeta v_\lambda\|_{-m,p,n} < K''\lambda^{m-1-2/p} \tag{15}$$

con K'' indipendente da λ. Risulta anche

$$\int_{H'} \left| \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^m (\zeta v_{\lambda,i}) \right|^p dy\, dt > \int_{-1/8}^{1/8}\int_0^{1/8} \left| \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^m v_i(\lambda y, \lambda t) \right|^p dy\, dt = \tag{16}$$

$$= \lambda^{mp-2} \int_{-\lambda/8}^{\lambda/8}\int_0^{\lambda/8} \left| \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^m v_i(y, t) \right|^p dy\, dt.$$

Inoltre

$$\|\zeta v_\lambda\|_{m,p,n} > \left\| \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^m (\zeta v_{\lambda,i}) \right\|_{0,p}. \tag{17}$$

Poichè $\|\zeta v_\lambda\|_{0,p,n} < D$, $\forall \lambda > 1$, con D costante, otteniamo da (12), tenuto conto di (15), (16) e (17),

$$\gamma_1 \lambda^{m-2/p} \left(\int_{-\lambda/8}^{\lambda/8}\int_0^{\lambda/8} \left| \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^m v_i(y, t) \right|^p dy\, dt \right)^{1/p} < K''\lambda^{m-1-2/p} + \gamma_2 D.$$

Dividendo per $\lambda^{m-2/p}$ e facendo tendere λ a $+\infty$, si deduce

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{\infty}\left|\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^m v_i(y,t)\right|^p dy\,dt = 0$$

che è in contraddizione con (13). Si può allora concludere che $\overline{L}_0(\xi,\tau)$ ha mn zeri con parte immaginaria positiva. Indicando con M_0 la trasposta della matrice jacobiana in x_0 dell'applicazione τ precedentemente introdotta e con J_0 il modulo del determinante di M_0, si ha, per ogni $\xi=(\xi_1,\xi_2)\in\mathbb{R}^2$,

$$\overline{L}_0(\xi)=\det\Big(\sum_{|\alpha|=|\beta|=m}\tilde{a}_{\alpha\beta}(0)\xi^{\alpha+\beta}\Big)=\det\Big(J_0\sum_{|\alpha|=|\beta|=m}a_{\alpha\beta}(x_0)(M_0\xi)^{\alpha+\beta}\Big)\,.$$

Consideriamo i vettori $\bar{\xi}=(\bar{\xi}_1,0)$ e $\bar{\eta}=(0,1)$ di $\mathbb{R}^2$, con $\bar{\xi}_1\neq 0$; dato che M_0 è non singolare, i vettori $M_0\bar{\xi}$ e $M_0\bar{\eta}$ sono linearmente indipendenti. Poichè $\overline{L}_0(\bar{\xi}_1,\tau_j^+)=\overline{L}_0(\bar{\xi}_1,\tau_j^-)=0$, $j=1,\ldots,mn$, si ha

$$\det\Big(\sum_{|\alpha|=|\beta|=m}a_{\alpha\beta}(x_0)(M_0\bar{\xi}+\tau_j^{(\pm)}M_0\bar{\eta})^{\alpha+\beta}\Big)=0\,.$$

Tenendo conto del fatto che x_0 era un punto generico resta dimostrato che il sussistere di (3) implica la condizione (B).

3) Per quanto riguarda la necessità della condizione (C) per il sussistere di (3), è sufficiente osservare che se (C) fosse non soddisfatta si potrebbero costruire delle funzioni $v_i(y,t)$, $i=1,\ldots,n$, con proprietà analoghe a quelle delle funzioni omonime introdotte nella parte precedente e ragionare come in 2). C'è soltanto da osservare che ora $y=(y_1,\ldots,y_{r-1})\in\mathbb{R}^{r-1}$ con $r>2$ qualsiasi.

4. - Dimostrazione del Teorema 2

Premettiamo alla dimostrazione i seguenti ben noti lemmi.

Lemma 1: Risulta $[L^p(\Omega), W_0^{m,p}(\Omega)\cap W^{2m,p}(\Omega);\,\delta(1/2)]\subseteq W_0^{m,p}(\Omega)$ con iniezione continua (*).

Lemma 2 (v. Schechter [7]): Sia S sottospazio vettoriale di $W_0^{m,p}(\Omega)\cap$ $\cap\, W^{2m,p}(\Omega)$ di dimensione finita. Allora vi è una costante $C_{m,p}$ tale che $\|v\|_{m,p}<C_{m,p}\|v\|_{-m,p}$, $\forall v\in S$.

Passiamo ora alla dimostrazione del Teorema: con le ipotesi fatte valgono le seguenti affermazioni (v. Agmon-Douglis-Nirenberg [3] e Browder [13]):

(*) Per la definizione e le proprietà degli spazi $[X_0, X_1;\,\delta(\theta)]$, con X_0 e X_1 spazi di Banach e $0<\theta<1$, si veda [9] e [10].

(*a*) esiste una costante c_0 tale che

$$\|u\|_{2m,p,n} \leq c_0(\|Au\|_{0,p,n} + \|u\|_{0,p,n}) \qquad \forall u \in (W_0^{m,p}(\Omega) \cap W^{2m,p}(\Omega))^n, \tag{18}$$

$$\|v\|_{2m,p',n} \leq c_0(\|A^*v\|_{0,p',n} + \|v\|_{0,p',n}) \qquad \forall v \in (W_0^{m,p'}(\Omega) \cap W^{2m,p'}(\Omega))^n; \tag{18'}$$

(*b*) $\forall f \in (L^p(\Omega))^n$ $\exists u \in (W_0^{m,p}(\Omega) \cap W^{2m,p}(\Omega))^n$ tale che

$$Au = f \text{ se e solo se } (f, v)_{0,n} = 0 \qquad \forall v \in \operatorname{Ker} A^*,$$

$\forall g \in (L^{p'}(\Omega))^n$ $\exists v \in (W_0^{m,p'}(\Omega) \cap W^{2m,p'}(\Omega))^n$ tale che

$$A^*v = g \text{ se e solo se } (g, u)_{0,n} = 0 \qquad \forall u \in \operatorname{Ker} A,$$

dove $A^* = \sum_{|\alpha|,|\beta| \leq m} (-1)^{|\alpha|+|\beta|} D^\alpha D^\beta \overline{a_{\alpha\beta}}(x) D^\beta$ è l'aggiunto formale di A, $\operatorname{Ker} A$ è il nucleo di A: $(W_0^{m,p}(\Omega) \cap W^{2m,p}(\Omega))^n \to (L^p(\Omega))^n$ e $\operatorname{Ker} A^*$ è il nucleo di A^*: $(W_0^{m,p'}(\Omega) \cap W^{2m,p'}(\Omega))^n \to (L^{p'}(\Omega))^n$.

Nel seguito sarà conveniente usare la seguente notazione (anche se impropria): se S è un sottospazio vettoriale di $(W_0^{m,p}(\Omega) \cap W^{2m,p}(\Omega))^n$ (rispettivamente di $(W_0^{m,p'}(\Omega) \cap W^{2m,p'}(\Omega))^n$) il simbolo $S/\operatorname{Ker} A$ ($S/\operatorname{Ker} A^*$) indicherà l'insieme degli elementi $w \in S$ tali che $(w, u)_{0,n} = 0$, $\forall u \in \operatorname{Ker} A$ ($\forall u \in \operatorname{Ker} A^*$). Con c_i, $i \in \mathrm{N}$, indicheremo sempre delle costanti reali > 0.

Per (18) risulta $\|u\|_{2m,p,n} \leq c_0\|u\|_{0,p,n}$, $\forall u \in \operatorname{Ker} A$. Poichè Ω è di classe C^{2m}, per il Lemma di Rellich (v. Adams [14]) l'immersione di $W^{2m,p}(\Omega)$ in $L^p(\Omega)$ è compatta e quindi ogni insieme chiuso e limitato di $(W^{2m,p}(\Omega))^n$ è compatto in $(L^p(\Omega))^n$; quindi $\operatorname{Ker} A$ ha dimensione finita. Dimostriamo ora che vale la seguente disuguaglianza

$$\|u\|_{2m,p,n} \leq c_1\|Au\|_{0,p,n} \qquad \forall u \in (W_0^{m,p}(\Omega) \cap W^{2m,p}(\Omega))^n/\operatorname{Ker} A. \tag{19}$$

Se (19) non è vera, esiste una successione $(u_k)_{k \in N}$ in $(W_0^{m,p}(\Omega) \cap W^{2m,p}(\Omega))^n/$ $/\operatorname{Ker} A$ tale che

$$\|u_k\|_{2m,p,n} = 1, \qquad \lim_{k \to \infty} \|Au_k\|_{0,p,n} = 0. \tag{20}$$

Per il Lemma di Rellich esiste una sottosuccessione di $(u_k)_{k \in N}$ che converge in $(L^p(\Omega))^n$. Indicando questa sottosuccessione ancora con $(u_k)_{k \in N}$ abbiamo, per (18),

$$\|u_j - u_k\|_{2m,p,n} \leq c_0(\|A(u_j - u_k)\|_{0,p,n} + \|u_j - u_k\|_{0,p,n}).$$

Quindi $(u_k)_{k \in N}$ converge in $(W^{2m,p}(\Omega))^n$ ad un elemento u in $(W_0^{m,p}(\Omega) \cap$ $\cap W^{2m,p}(\Omega))^n/\operatorname{Ker} A$. Per (20) si ha

$$\|u\|_{2m,p,n} = 1. \tag{21}$$

Per (b) ogni $w \in (L^{p'}(\Omega))^n$ può essere scritta nella forma $w = A^* v_1 + v_2$, con $v_1 \in (W_0^{m,p'}(\Omega) \cap W^{2m,p'}(\Omega))^n$ e $v_2 \in \operatorname{Ker} A$. Quindi

$$(u, w)_{0,n} = (u, A^* v_1)_{0,n} + (u, v_2)_{0,n} = \lim_{k \to \infty} (u_k, A^* v_1)_{0,n} = \lim_{k \to \infty} (A u_k, v_1)_{0,n} = 0 .$$

Valendo quest'ultima per ogni $w \in (L^{p'}(\Omega))^n$, si ha $u = 0$, il che contraddice (21); vale quindi (19). In modo analogo si prova che

$$\|v\|_{2m,p',n} < c_2 \|A^* v\|_{0,p',n} \qquad \forall v \in (W_0^{m,p'}(\Omega) \cap W^{2m,p'}(\Omega))^n / \operatorname{Ker} A . \tag{19'}$$

Proviamo che sussiste anche

$$\|u\|_{0,p,n} < c_3 |Au|_{-2m,p,n} \qquad \forall u \in (W_0^{m,p}(\Omega) \cap W^{2m,p}(\Omega))^n / \operatorname{Ker} A , \tag{22}$$

dove

$$|w|_{-2m,p,n} = \sup_{0 \neq v \in (W_0^{m,p'}(\Omega) \cap W^{2m,p'}(\Omega))^n} \frac{|(w, v)_{0,n}|}{\|v\|_{2m,p',n}} .$$

(norma del duale forte). Infatti, evidentemente

$$|Au|_{-2m,p,n} > \sup_{0 \neq v \in (W_0^{m,p'}(\Omega) \cap W^{2m,p'}(\Omega))^n / \operatorname{Ker} A^*} \frac{|(u, A^* v)_{0,n}|}{\|v\|_{2m,p',n}} .$$

Ora, per ogni $w \in (L^{p'}(\Omega))^n / \operatorname{Ker} A$ esiste $v \in (W_0^{m,p'}(\Omega) \cap W^{2m,p'}(\Omega))^n / \operatorname{Ker} A^*$ tale che $A^* v = w$. Per (19)' risulta allora

$$c_2 |Au|_{-2m,p,n} > \sup_{0 \neq w \in (L^{p'}(\Omega))^n / \operatorname{Ker} A} \frac{|(u, w)_{0,n}|}{\|w\|_{0,p',n}} > c_4 \|u\|_{0,p,n} .$$

Per (19), (22) e (b), tenendo conto del fatto che $\mathfrak{D}(\Omega)$ è denso nel duale forte di $W_0^{m,p}(\Omega) \cap W^{2m,p}(\Omega)$, possiamo considerare l'operatore inverso A^{-1} come un'applicazione continua di $(L^p(\Omega))^n / \operatorname{Ker} A^*$ in $(W_0^{m,p}(\Omega) \cap W^{2m,p}(\Omega))^n$ e anche di $\left((W_0^{m,p'}(\Omega) \cap W^{2m,p'}(\Omega))'\right)^n / \operatorname{Ker} A^*$ in $(L^p(\Omega))^n$. Definendo A^{-1} uguale a zero su $\operatorname{Ker} A^*$, possiamo affermare (v. Calderon [9], Lions [11]) che A^{-1} è un'applicazione lineare e continua di

$$X = \left[\left((W_0^{m,p'}(\Omega) \cap W^{2m,p'}(\Omega))'\right)^n, (L^p(\Omega))^n; \delta(1/2)\right]$$

in

$$Z = [(L^p(\Omega))^n, (W_0^{m,p}(\Omega) \cap W^{2m,p}(\Omega))^n; \delta(1/2)] .$$

Quindi

$$\|u\|_Z < c_5 \|Au\|_X . \tag{23}$$

È facile verificare che

$$X = [(W_0^{m,p'}(\Omega) \cap W^{2m,p'}(\Omega))', L^p(\Omega); \delta(1/2)]^n$$

e

$$Z = [L^p(\Omega), W_0^{m,p}(\Omega) \cap W^{2m,p}(\Omega); \delta(1/2)]^n .$$

Quindi, per il Lemma 1, risulta $Z \subseteq (W_0^{m,p}(\Omega))^n$ e

(24) $$\|u\|_{m,p,n} < c_6 \|u\|_Z .$$

È noto (v. Calderon [10]) che X è il duale di

$$[W_0^{m,p'}(\Omega) \cap W^{2m,p'}(\Omega), L^{p'}(\Omega); \delta(1/2)]^n .$$

Per il Lemma 1 si ha

$$[W_0^{m,p'}(\Omega) \cap W^{2m,p'}(\Omega), L^{p'}(\Omega); \delta(1/2)]^n \subseteq (W_0^{m,p'}(\Omega))^n$$

con iniezione continua e pertanto $(W^{-m,p}(\Omega))^n = \big((W_0^{m,p'}(\Omega))_b'\big)^n \subseteq X$ con iniezione continua. Risulta quindi

(25) $$\|v\|_X < c_7 \|v\|_{-m,p,n} .$$

Per (23), (24) e (25) si ha allora

(26) $$\|u\|_{m,p,n} < c_8 \|Au\|_{-m,p,n} \qquad \forall u \in (\mathfrak{D}(\Omega))^n / \mathrm{Ker}\, A .$$

Si osservi che se $u \in (\mathfrak{D}(\Omega))^n$ risulta $u = u' + u''$, con $u' \in (\mathfrak{D}(\Omega))^n / \mathrm{Ker}\, A$ e $u'' \in \mathrm{Ker}\, A$. Pertanto, tenendo conto del fatto che $\mathrm{Ker}\, A$ ha dimensione finita e utilizzando il Lemma 2, si ottiene

$$\|u\|_{m,p,n} < \|u'\|_{m,p,n} + \|u''\|_{m,p,n} < c_8 \|Au\|_{-m,p,n} + c_9 \|u''\|_{-m,p,n} .$$

Inoltre, evidentemente

$$\|u''\|_{-m,p,n} < \|u\|_{-m,p,n} + \|u'\|_{m,p,n} < \|u\|_{-m,p,n} + c_8 \|Au\|_{-m,p,n} .$$

Vale quindi

(27) $$\|u\|_{m,p,n} < c(\|Au\|_{-m,p,n} + \|u\|_{-m,p,n}) \qquad \forall u \in (\mathfrak{D}(\Omega))^n .$$

Dato che $\|u\|_{-m,p,n} < c_{10} \|u\|_{0,p,n}$, da (27) si ottiene subito la disuguaglianza voluta.

BIBLIOGRAFIA

[1] C. G. Simader, *On Dirichlet's boundary value problem*, Lecture Notes in Math., 268, Springer (1972).

[2] C. G. Simader, *Über eine Koerzitivitätsungleichung in $W_0^{m,p}$*, Manu. Math., 9 (1973).

[3] S. Agmon - A. Douglis - L. Nirenberg, *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions* - II, Commun. Pure Appl. Math., 17, pp. 35-92 (1964).

[4] S. Agmon - A. Douglis - L. Nirenberg, *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions* - I, Commun. Pure Appl. Math., 12, pp. 623-727 (1959).

[5] M. Schechter, *On L^p estimates and regularity* - I, Amer. J. Math., 85 (1963).

[6] M. Schechter, *Coerciveness in L^p*, Trans. Amer. Math. Soc., 107, pp. 10-29 (1963).

[7] M. Schechter, *On the theory of differential boundary problems*, Illinois J. Math., 7, pp. 232-245 (1963).

[8] J. L. Thompson, *Some existence theorems for the traction boundary value problem of linearized elastostatics*, Archive for Rat. Mech. and Analysis, 32, pp. 369-399 (1969).

[9] A. P. Calderon, *Intermediate spaces and interpolating*, Studia Math. Special Series, pp. 31-34 (1963).

[10] A. P. Calderon, *Intermediate spaces and interpolation, the complex method*, Studia Math., 24, pp. 113-190 (1964).

[11] J. L. Lions, *Une construction d'espace d'interpolation*, C. R. Acad. Sci. Paris, 250, pp. 1853-1855 (1960).

[12] J. L. Lions - E. Magenes, *Problemi ai limiti non omogenei* - III, IV, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3) 15, pp. 41-103 (1961).

[13] F. E. Browder, *Estimates and existence theorems for elliptic boundary value problems*, P.N.A. Sci. USA, 45 (1959).

[14] R. A. Adams, *Sobolev Spaces*, Academic Press (1975).