Rendiconti
Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL
Memorie di Matematica
101° (1983), Vol. VII, fasc. 13, pagg. 201-226

GABRIELE DARBO - MARIA GRAZIA MAIA (*)

Su certi universi di dispositivi lineari risolubili (**)

On Some Universes of Solvable Linear Networks

SUMMARY. — An abstract notion of universe of « devices » (networks) was given in [1], together with some examples of linear universes. Here we build up other universes of linear devices which are somewhat nearer to « physical » devices, because of being solvable and « passive », according to certain generalized notions of passivity.

We also produce a family of universes of solvable k-monotone devices. In these universes, for $k > 0$, there are also non passive devices. For $k < 0$ all the devices are physically passive.

STRUTTURE PARACOMPLESSE E PASSIVITÀ

1. - Per quanto riguarda le definizioni di base rinviamo a [1]; tuttavia ne riprenderemo alcune per comodità del lettore.

1.1 - Brevemente si può dire che un universo di dispositivi è una totalità di dispositivi chiusa rispetto a certe operazioni di interconnessione ovvero alla « composizione in rete ». Qui consideriamo degli universi lineari, i cui dispositivi vengono caratterizzati dall'insieme dei funzionamenti ammissibili, che risulta un sottospazio N di $\mathfrak{X}^n \times \mathfrak{X}^n$, essendo $\mathfrak{X}$ un conveniente spazio vettoriale ed n il numero di terminali. Se $(x, y) \in N$, allora x e y si diranno rispettivamente vettore « tensione » e vettore « corrente ». Consideriamo solitamente questi come vettori colonna.

Non sempre N è grafico di un morfismo $\mathfrak{X}^n \to \mathfrak{X}^n$; tuttavia se (x, y) è un funzionamento di N, mediante la sostituzione:

$$(1)\qquad \begin{aligned} x &= u + v, \\ y &= u - v, \end{aligned}$$

(*) Istituto Matematico dell'Università di Genova, via L. B. Alberti 4, 16132 Genova.
(**) Memoria presentata il 29 giugno 1983 da Giuseppe Scorza Dragoni, uno dei XL.

ISSN 0392-4106

il sottospazio N si trasforma nei casi fisicamente significativi nel grafico di un morfismo S e la relazione univoca $v = Su$ caratterizza, nelle nuove variabili, il dispositivo.

1.2. - DEFINIZIONE: *Un dispositivo lineare N (a n terminali) si dirà risolubile se esiste un morfismo $S: \mathfrak{X}^n \to \mathfrak{X}^n$ tale che N è descritto dalle coppie (x, y) con*

$$x = u + Su,$$

$$y = u - Su,$$

al variare di u in $\mathfrak{X}^n$. Il morfismo S individuato (1) *da N verrà detto morfismo di scattering di N.*

Un universo si dirà risolubile se tali sono tutti i suoi dispositivi.

Si noti che la condizione di risolubilità non è una proprietà universale, perché la composizione in rete di dispositivi risolubili non sempre rappresenta un dispositivo risolubile.

Poiché sembra che la risolubilità sia una condizione indispensabile affinché un dispositivo sia « fisicamente significativo », ci proponiamo di costruire alcuni universi risolubili. A questo scopo si presta, in situazioni molto generali, la nozione di struttura paracomplessa su un corpo commutativo $\mathcal{K}$ introdotta in [1]. Per quanto questo strumento concettuale possa essere evitato al fine di raggiungere il risultato principale, si è ritenuto di utilizzarlo perché fornisce risultati più generali.

1.3. - Un struttura paracomplessa su un corpo commutativo $\mathcal{K}$ è una coppia $\mu = (\eta, \theta)$ dove η è un automorfismo involutorio di $\mathcal{K}$ (coniugio) e θ è un ordinamento del sottocorpo $\mathcal{K}_\eta$ degli elementi fissi rispetto a η. Queste due assegnazioni devono essere tali che per ogni $x \in \mathcal{K}$ si abbia:

$$x^\eta x > 0 \qquad (\theta). \tag{2}$$

Abbiamo indicato con x^η il trasformato di x mediante η e la relazione $>$ si riferisce all'ordinamento θ.

In seguito considereremo strutture paracomplesse su corpi che sono anche **R**-algebre e il coniugio η dovrà essere in tal caso automorfismo di **R**-algebra.

1.4. - Una matrice S di tipo $n \times n$ su $\mathcal{K}$ dicesi μ-subunitaria se per ogni $u \in \mathcal{K}^n$ risulta:

$$u^\eta S^\eta S u < u^\eta u \qquad (\theta)$$

dove con u^η, S^η abbiamo indicato le trasposte hermitiane rispetto al coniugio η.

(1) Almeno quando il corpo base è di caratteristica diversa da due.

In [1] vengono caratterizzate tutte le strutture paracomplesse sul corpo $\mathscr{K} = \mathsf{C}(D)$ delle funzioni razionali (cfr. anche [3]). Queste formano una varietà a quattro dimensioni reali. Interpretando $\mathsf{C}(D)$ come corpo degli operatori differenziali fratti (l'indeterminata D acquista il significato di operatore di derivazione), si può costruire, a partire da ciascuna di queste strutture paracomplesse μ, l'universo dei dispositivi lineari μ-passivi massimali su $\mathscr{K}$. Questi dispositivi sono tutti e soli quelli descrivibili mediante una matrice di scattering

$$S: \mathscr{K}^n \to \mathscr{K}^n$$

μ-subunitaria e pertanto l'universo stesso risulta risolubile.

Poiché lo spazio $\mathfrak{T}$ delle funzioni C^∞ definite in R, a valori complessi e a supporto inferiormente limitato, può essere considerato come spazio vettoriale sul corpo $\mathsf{C}(D)$, tramite il funtore esatto e fedele $\mathfrak{T} \underset{\mathsf{C}(D)}{\otimes} -$, l'universo dei dispositivi μ-passivi massimali viene trasformato in un universo isomorfo e risolubile i cui dispositivi sono caratterizzati da convenienti sistemi di equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti.

2. – A questo punto ci si può chiedere quale sia il nesso tra la nozione di μ-passività e la nozione di passività in senso fisico.

2.1. – Si sa (cfr. ad esempio [4], [12], [13]) che la condizione di passività fisica è esprimibile tramite funzionamenti in $\mathfrak{T}^n \times \mathfrak{T}^n$ dalla disuguaglianza relativa all'energia assorbita:

$$\text{(3)} \qquad \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{t} \langle x(t), y(t) \rangle \, dt \geq 0 \qquad \text{per ogni } t \in \mathsf{R}$$

che nelle variabili u, v (legate alle x, y dalle (1)), equivale a:

$$\text{(4)} \qquad \int_{-\infty}^{t} |v(t)|^2 \, dt \leq \int_{-\infty}^{t} |u(t)|^2 \, dt \qquad (t \in \mathsf{R})$$

per ogni funzionamento del dispositivo N. Si è indicato con $\langle\, ,\rangle$ e $|\;|$ il prodotto scalare e la norma in C^n. Nel caso che il dispositivo ammetta una rappresentazione mediante una matrice impedenza Z i cui elementi sono in $\mathsf{C}(D)$, la condizione (3), se è verificata per ogni funzionamento (x, y) con $x = Zy$, si traduce nella «positività» della matrice complessa $\hat{Z}(p)$ per ogni p del semipiano $\operatorname{Re} p > 0$, essendo $\hat{Z}$ la trasformata di Laplace (bilatera) dell'operatore Z (cfr. [4], [12]). Se il dispositivo è risolubile, anche quando non ammette una rappresentazione impedenziale né ammettenziale, la condizione di passività (4) si esprime, mediante la trasformata di Laplace $\hat{S}$ della matrice S, con la condizione di subunitarietà (nel corpo C) di $\hat{S}(p)$ per ogni p con $\operatorname{Re} p > 0$. In seguito indicheremo con C_+ il semipiano $\operatorname{Re} p > 0$.

2.2. – Come risulta in [1], il coniugio di una struttura paracomplessa sul corpo $\mathsf{C}(D)$ è completamente individuato da una circonferenza Γ contenuta in $\hat{\mathsf{C}}$ (retta proiettiva complessa ottenuta da C con l'aggiunzione di un punto all'infinito), che caratterizza l'automorfismo involutorio. Il sottocorpo degli elementi fissi è costituito dalle funzioni razionali a valori reali su Γ; l'ordinamento θ di questo sottocorpo è definito dal seguente criterio di positività: una funzione razionale f è positiva se tali sono i valori di $f(p)$ su qualche elemento di un opportuno filtro su Γ avente un punto aderente $p_0 \in \Gamma$. Tale filtro è a sua volta individuato dal punto p_0 e da un'orientazione su Γ ed ha come base l'insieme degli archi aperti di Γ aventi il primo estremo in p_0 (nell'orientazione di Γ). Il punto p_0 verrà detto brevemente origine della struttura paracomplessa.

Il prototipo di tali strutture paracomplesse è fornito dal caso in cui Γ si riduce all'asse reale $\hat{\mathsf{R}}$; l'automorfismo involutorio associa alla funzione razionale $f(p)$ la funzione $\overline{f(\bar{p})}$. Il sottocorpo «reale» è costituito dalle funzioni razionali reali su R; l'ordinamento di questo sottocorpo può essere definito dalle funzioni che assumono valori positivi in qualche intorno di $+\infty$. Ogni altra struttura paracomplessa su $\mathsf{C}(p)$ è ottenibile trasformando questa mediante una proiettività di $\hat{\mathsf{C}}$.

2.3. – Per i dispositivi risolubili si intuisce come la condizione di μ-passività o l'equivalente condizione di subunitarietà della matrice di scattering relativamente a una struttura paracomplessa μ, risulti molto più debole della passività fisica. Tuttavia quest'ultima si lascia esprimere attraverso la simultanea subunitarietà della matrice S rispetto ad un conveniente insieme di strutture paracomplesse.

Indichiamo con D^{μ} il sottouniverso dell'universo lineare totale sul corpo $\mathsf{C}(D)$ costituito dai dispositivi risolubili e μ-passivi rispetto alla struttura paracomplessa μ.

Sia $\mathfrak{R}$ l'insieme di tutte le strutture paracomplesse caratterizzate da una circonferenza orientata Γ avente il centro sull'asse immaginario e punto origine $p_0 \in \mathsf{C}_0$, allora l'universo di dispositivi sul corpo $\mathsf{C}(D)$, fisicamente passivi, sarà dato dall'intersezione:

$$\mathsf{D}^{\mathfrak{R}} = \bigcap_{\mu \in \mathfrak{R}} \mathsf{D}^{\mu}.$$

L'universo $\mathsf{D}^{\mathfrak{R}}$ è risolubile e, poiché le matrici di operatori differenziali fratti operano sullo spazio $\mathfrak{T}^n$, si ha la consueta rappresentazione di detti dispositivi mediante funzionamenti in $\mathfrak{T}^n \times \mathfrak{T}^n$. I dispositivi di questo universo sono i cosiddetti dispositivi passivi razionali ovvero a costanti concentrate.

Ampliamento dell'universo dei dispositivi passivi razionali risolubili

3. – Delimiteremo una sottoalgebra del corpo di Mikusinski, che indicheremo con $\mathscr{M}_0$. Interessa considerare il corpo $\bar{\mathscr{M}}_0$ delle frazioni in $\mathscr{M}_0$; questo

è un sottocorpo del corpo di Mikusinski che risulta isomorfo ad un certo corpo di funzioni meromorfe nel semipiano C_0. Il vantaggio di questo isomorfismo, che estende ulteriormente la trasformazione di Laplace, è quello di permettere lo studio di un gruppo di automorfismi di $\mathscr{M}_0$ e la costruzione di una classe di strutture paracomplesse in $\hat{\mathscr{M}}_0$, i cui coniugi mutano in sé la sottoalgebra $\mathscr{M}_0$.

3.1. – Sia, come in precedenza, $\mathfrak{T}$ lo spazio delle funzioni C^∞ definite in R e a valori complessi, a supporto inferiormente limitato. Come è noto (cfr. [5]) il prodotto di convoluzione conferisce ad $\mathfrak{T}$ una struttura di algebra commutativa senza divisori dello zero, il cui corpo delle frazioni è il corpo di Mikusinski, che in seguito indicheremo con $\mathfrak{M}$. Conseguenza immediata di una caratterizzazione degli operatori passivi di König e Meixner (cfr. [2], [4]) che, tra quelle note, è la meno onerosa nelle assunzioni, è la seguente:

Sia Y un endomorfismo di $\mathfrak{T}$, in quanto C-spazio vettoriale, soddisfacente le seguenti condizioni:

i) *Y commuta con le traslazioni temporali,*

ii) *per ogni $x \in \mathfrak{T}$, posto $y = Y(x)$, si ha:*

$$\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{t} \overline{y(t)}\, x(t)\, dt \geq 0$$

qualunque sia t reale.

Allora esiste la trasformata di Laplace $\hat{Y}(p)$ e questa è una funzione olomorfa nel semipiano C_0; inoltre si ha ivi $\mathrm{Re}\, \hat{Y}(p) \geq 0$. Viceversa ogni funzione olomorfa con parte reale positiva o nulla in C_0 è la trasformata di Laplace di un endomorfismo di $\mathfrak{T}$ soddisfacente le condizioni i), ii).

Tali operatori sono rappresentati da distribuzioni a supporto contenuto in R_+ (cfr. [12]) e quindi anche da certi elementi di $\mathfrak{M}$ che chiameremo positivi.

L'algebra generata da questi elementi è una sottoalgebra di $\mathfrak{M}$ isomorfa, tramite la trasformata di Laplace, ad un'algebra di funzioni olomorfe nel semipiano C_0. In seguito indicheremo con $\mathscr{M}_0$ quest'algebra che è isomorfa alla sua immagine $\hat{\mathscr{M}}_0$, nella trasformazione di Laplace. Identificheremo talvolta per brevità gli elementi di $\mathscr{M}_0$ con i corrispondenti in $\hat{\mathscr{M}}_0$.

3.2. – Consideriamo il gruppo delle trasformazioni proiettive della retta complessa che mutano in sé il semipiano C_0.

Queste trasformazioni sono della forma:

$$k(p) = \frac{ap - ib}{icp + d} \tag{5}$$

con a, b, c, d reali ed $ad - bc > 0$. Poiché a, b, c, d sono alterabili per un fattore reale non nullo, si può supporre sempre $ad - bc = 1$.

Ciascuna di queste trasformazioni definisce un automorfismo di $\mathcal{M}_0$ che muta $f \in \mathcal{M}_0$ in $f \circ k$. Infatti, se f è olomorfa in C_0 e a parte reale positiva, tale è $f \circ k$ e viceversa. Questi automorfismi sono estendibili univocamente al corpo delle frazioni $\bar{\mathcal{M}}_0$.

Un'altra classe di automorfismi è ottenuta partendo dalle trasformazioni «antiproiettive» della forma:

$$h(p) = \frac{a\bar{p} - ib}{ic\bar{p} + d} \tag{6}$$

a, b, c, d reali, $ad - bc = 1$. Tali automorfismi sono quelli che mutano $f \in \mathcal{M}_0$ nella funzione g definita da

$$g(p) = \overline{f(h(p))} \qquad p \in C_0 . \tag{7}$$

Anche queste trasformazioni mutano la funzione f con parte reale positiva in funzioni dello stesso tipo.

Chiameremo di classe pari gli automorfismi definiti da proiettività della forma (5) e di classe dispari quelli della forma (6). Tutti questi automorfismi formano un gruppo di Lie a tre parametri e due componenti connesse. Gli automorfismi pari, anche se involutori, non costituiscono il coniugio di una struttura paracomplessa su $\bar{\mathcal{M}}_0$, poiché subordinano l'identità sul sottocorpo $\mathbf{C}$ (delle costanti) e questo non è ordinabile, mentre gli automorfismi involutori di classe dispari sono coniugi di infinite strutture paracomplesse su $\bar{\mathcal{M}}_0$ e sono quelli provenienti dalle trasformazioni (6) con $a = d$. Queste trasformazioni h sono involuzioni antiolomorfe di C_0 e presentano un luogo di punti fissi costituito da una semicirconferenza Γ centrata sull'asse immaginario o eventualmente da una semiretta parallela all'asse reale. Le funzioni del corpo $\bar{\mathcal{M}}_0$ che sono invarianti nell'automorfismo η definito da h mediante la (7) sono tutte e sole quelle che assumono valori reali sulla semicirconferenza luogo dei punti fissi e costituiscono un sottocorpo di $\bar{\mathcal{M}}_0$. Per ordinare tale sottocorpo basta scegliere un punto $p_0 \in \Gamma$ ed un'orientazione di Γ la quale permette di caratterizzare il solito filtro di archi (aperti) di Γ aventi il primo estremo in p_0. Sono da considerarsi positive nell'ordinamento θ le funzioni che assumono valori positivi in tutti i punti di qualche elemento del filtro. Essendo la condizione (2) ovviamente verificata, la coppia $\mu = (\eta, \theta)$ è una struttura paracomplessa con origine in p_0.

L'insieme delle strutture paracomplesse così ottenute può essere rappresentato su una varietà a tre dimensioni. Indicheremo con $\mathfrak{R}_0$ tale insieme: queste strutture paracomplesse sono estensioni di quelle già considerate sul corpo delle funzioni razionali.

4. – Analogamente a quanto detto in riferimento al corpo $\mathbf{C}(D)$, ad ogni struttura paracomplessa $\mu \in \mathfrak{R}_0$ rimane associato un sottouniverso risolubile $\mathbf{D}^\mu$ dell'universo lineare totale sul corpo $\bar{\mathcal{M}}_0$. L'interesse di questi universi con-

siste nel fatto che l'intersezione

$$\mathsf{D}^{\mathfrak{R}_0} = \bigcap_{\mu \in \mathfrak{R}_0} \mathsf{D}^{\mu}$$

è l'universo risolubile costituito dai dispositivi la cui matrice di scattering S è tale che $\hat{S}(p)$ è una matrice subunitaria [2] in C per ogni $p \in \mathsf{C}_0$.

4.1. – TEOREMA: *Se $S = (s_{ik})$ è una matrice in $\tilde{\mathscr{M}}_0$, μ-subunitaria rispetto ad ogni $\mu \in \mathfrak{R}_0$, allora:*

i) *gli elementi s_{ik} sono funzioni olomorfe in C_0 soddisfacenti la disuguaglianza*

$$\sum_i |s_{ik}(p)|^2 < 1 \qquad k = 1, 2, \ldots, n$$

e pertanto gli elementi s_{ik} appartengono a $\mathscr{M}_0$,

ii) *in ogni punto $p \in \mathsf{C}_0$ la matrice complessa $S(p) = (s_{ik}(p))$ è subunitaria in C,*

iii) *ogni matrice di funzioni olomorfe in C_0, subunitaria in ogni punto di C_0 è altresì μ-subunitaria per ogni $\mu \in \mathfrak{R}_0$.*

DIMOSTRAZIONE: Sia $p_0 \in \mathsf{C}_0$, $\mu = (\eta, \theta) \in \mathfrak{R}_0$ avente origine in p_0; risulta allora per ogni $u = (u_i) \in \tilde{\mathscr{M}}_0^n$:

$$\sum_{ihk} u_i^{\theta} s_{hi}^{\theta} s_{hk} u_k < \sum_j u_j^{\theta} u_j \,,$$

se u percorre la base canonica di $\tilde{\mathscr{M}}_0^n$, si ottengono le disuguaglianze

$$\sum_i s_{ik}^{\theta} s_{ik} < 1 \qquad k = 1, 2, \ldots, n \,. \tag{8}$$

Poiché ogni termine della somma è positivo o nullo (rispetto a θ), in ogni intorno di p_0 esiste almeno un punto p in cui vale la disuguaglianza:

$$\sum_i |s_{ik}(p)|^2 < 1 \,. \tag{9}$$

Al variare di μ in $\mathfrak{R}_0$, il punto p_0 descrive tutto il semipiano e quindi la disuguaglianza (9) è verificata in un insieme denso in C_0. Poiché le funzioni $s_{ik}(p)$ sono meromorfe in C_0, la (9) deve valere in tutto C_0 e quindi le s_{ik} sono olomorfe e limitate in C_0. La matrice S è con elementi in $\mathscr{M}_0$ (infatti $s_{ik}(p) + 1$ ha parte reale positiva o nulla in C_0) e, con ragionamento analogo, si trova

[2] Per matrici ad elementi in C, «subunitaria» si intende rispetto all'unica struttura paracomplessa esistente sul corpo C.

che la matrice complessa $S(p)$ è subunitaria in un insieme denso in C_0 e quindi in tutto C_0.

La iii) è conseguenza immediata della definizione di matrice μ-subunitaria.

4.2. – Osservazione: Si noti che il precedente teorema si estende ovviamente quando si sostituisce a C_0 un aperto $U \subset \dot{\mathsf{C}}$ e a $\mathfrak{N}_0$ una qualunque famiglia $\mathfrak{M}$ di strutture paracomplesse il cui insieme dei punti origine è denso in U.

Poiché, se S è una matrice μ-subunitaria $(\mu = (\eta, \theta))$, tale è la sua trasposta η-hermitiana S^{η} (cfr. Appendice), dalle (8) segue anche

$$(10) \qquad \sum_k s^{\eta}_{ik} s_{ik} \leq 1 \quad (\theta) \qquad i = 1, 2, \ldots, n .$$

Dalle (8) e (10) inoltre segue il

4.3. – Corollario: *Se S è μ-subunitaria e se $s_{ik} = 1$ per una coppia i, k allora tutti gli altri elementi della riga i-esima e della colonna k-esima sono nulli.*

5. – Come si è già detto, sia l'algebra $\mathcal{M}_0$ sia il corpo $\tilde{\mathcal{M}}_0$ sono sottoalgebre del corpo $\mathfrak{M}$, tuttavia, mentre gli elementi di $\mathcal{M}_0$ operano sulle funzioni dello spazio $\mathfrak{X}$, contenuto anch'esso in $\mathfrak{M}$, trasformandolo in sé, lo stesso non si può dire per il corpo $\tilde{\mathcal{M}}_0$; abbiamo dunque a disposizione soltanto il fatto che lo spazio $\mathfrak{X}$ può essere atteggiato a $\mathcal{M}_0$-modulo ma non a spazio vettoriale su $\tilde{\mathcal{M}}_0$. In quanto $\mathcal{M}_0$-modulo, $\mathfrak{X}$ è privo di torsione. Questo fatto non ci permette di immergere l'universo $\mathsf{D}^{\mathfrak{N}_0}$ nell'universo lineare totale su $\mathfrak{X}$ con le semplici considerazioni fatte relativamente al corpo $\mathsf{C}(D)$ essendo $\mathfrak{X} \underset{\mathsf{C}(D)}{\otimes} -$ un funtore esatto e fedele. Seguiremo quindi un'altra via per raggiungere lo stesso scopo nel caso attuale.

5.1. – Per evitare ambiguità useremo notazioni del tipo $\mathsf{D}(\mathcal{X}\text{-mod}, X)$, dove X è un $\mathcal{X}$-modulo, per indicare l'universo lineare totale i cui dispositivi ad n terminali sono $\mathcal{X}$-sottomoduli di $X^n \times X^n$. Ciò perché lo stesso spazio X potrà essere considerato come modulo (o spazio vettoriale) su algebre diverse; notazioni analoghe, in cui si mette in evidenza la struttura algebrica di X, verranno usate anche per certi sottouniversi: in particolare indicheremo con $\mathsf{D}^{\mathfrak{N}_0}(\tilde{\mathcal{M}}_0\text{-mod}, \tilde{\mathcal{M}}_0)$ l'universo finora indicato con $\mathsf{D}^{\mathfrak{N}_0}$. In base al Teorema 4.1, questo universo è isomorfo ad un sottouniverso di $\mathsf{D}(\mathcal{M}_0\text{-mod}, \tilde{\mathcal{M}}_0)$, che indicheremo con $\mathsf{D}^{\mathfrak{N}_0}(\mathcal{M}_0\text{-mod}, \tilde{\mathcal{M}}_0)$. Detto isomorfismo è la restrizione del morfismo iniettivo dell'universo $\mathsf{D}(\mathcal{M}_0\text{-mod}, \tilde{\mathcal{M}}_0)$ nell'universo $\mathsf{D}(\tilde{\mathcal{M}}_0\text{-mod}, \tilde{\mathcal{M}}_0)$ derivante dal funtore additivo, esatto e fedele associato al morfismo inclusione $\mathcal{M}_0 \to \tilde{\mathcal{M}}_0$ (cfr. [1]).

L'universo $\mathsf{D}^{\mathfrak{N}_0}(\mathcal{M}_0\text{-mod}, \tilde{\mathcal{M}}_0)$ dalla definizione risulta un sottouniverso risolubile dell'universo lineare totale $\mathsf{D}(\mathcal{M}_0\text{-mod}, \tilde{\mathcal{M}}_0)$ e, come tale, i suoi dispositivi (ad n terminali) sono rappresentati da sotto $\mathcal{M}_0$-moduli in $\tilde{\mathcal{M}}_0^n \times \tilde{\mathcal{M}}_0^n$. Sia N un tale sottomodulo; se S è la matrice di scattering di N, allora N è descritto, al variare di u in $\tilde{\mathcal{M}}_0^n$, dalle relazioni:

$$
\begin{aligned}
x &= u + Su\,, \\
y &= u - Su\,,
\end{aligned}
\tag{11}
$$

ed è quindi generato dai vettori (x, y) ottenuti da queste quando u percorre la base canonica di $\tilde{\mathcal{M}}_0^n$. Poiché questi vettori sono formati con elementi di $\mathcal{M}_0$, essi individuano anche un sotto $\mathcal{M}_0$-modulo N' di $\mathcal{M}_0^n \times \mathcal{M}_0^n$; viceversa N', in quanto sottoinsieme di $\tilde{\mathcal{M}}_0^n \times \tilde{\mathcal{M}}_0^n$, genera il sottospazio N, vettoriale su $\tilde{\mathcal{M}}_0$.

Dimostreremo che la trasformazione $N \mapsto N'$ è un morfismo iniettivo di $\mathsf{D}^{\bar{n}}(\mathcal{M}_0\text{-mod}, \tilde{\mathcal{M}}_0)$ in $\mathsf{D}(\mathcal{M}_0\text{-mod}, \mathcal{M}_0)$, ma poiché il metodo sarà ripreso in ulteriori situazioni nel seguito, diciamo che esso si basa sul seguente

5.2. - Criterio: *Se una trasformazione tra due universi associa ad ogni dispositivo N un dispositivo N' con gli stessi terminali e se:*

i) *alla somma diretta di due dispositivi corrisponde la somma diretta dei corrispondenti,*

ii) *la trasformazione commuta con lo scambio di due terminali qualsiasi,*

iii) *al dispositivo $\bar{n}N$ ottenuto da N mediante soppressione dell'ultimo terminale (l'n-esimo) corrisponde il dispositivo $\bar{n}N'$ ottenuto da N' con la stessa operazione su N',*

iv) *vale l'analogo di iii) per la cortocircuitazione (con saturazione) degli ultimi due terminali,*

v) *al nodo triplo corrisponde il nodo triplo,*

allora la trasformazione è un morfismo tra i due universi.

Omettiamo la dimostrazione (che richiama la definizione di morfismo di universi data in [1]) e osserviamo che la compatibilità di una trasformazione con le operazioni di composizione in rete (che caratterizza i morfismi tra universi) è conseguenza intuitivamente evidente delle condizioni i), ii), iii), iv), v) del precedente criterio.

5.3. – Nel caso attuale i dispositivi N e N' hanno la stessa matrice di scattering S (che ha elementi in $\mathcal{M}_0$). N ed N' sono descritti mediante le relazioni (11) al variare di u in $\tilde{\mathcal{M}}_0^n$ e rispettivamente in $\mathcal{M}_0^n$; entrambi, in quanto $\mathcal{M}_0$-moduli sono privi di torsione.

Verifichiamo che le condizioni del Criterio 5.2 sono soddisfatte.

La somma diretta di due dispositivi ha come matrice di scattering la somma diretta delle rispettive matrici, vale pertanto la i).

Lo scambio di due terminali in N o N' equivale allo scambio delle righe e colonne omonime di S, da cui la validità di ii).

La soppressione del terminale n-esimo in N o N' si traduce nell'aggiunta della condizione:

$$y_n = 0$$

e successiva eliminazione di x_n. Ciò equivale, nelle solite variabili u, v, all'aggiunta della condizione

$$u_n = v_n$$

e successiva eliminazione di u_n.

Sia $S = (s_{ik})$ la matrice di scattering di N (o di N'), si dovrà eliminare u_n dalle relazioni:

$$v_i = \sum_k s_{ik} u_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

$$u_n = \sum_k s_{nk} u_k .$$

Dall'ultima si ha:

$$(1 - s_{nn}) u_n = s_{n1} u_1 + \ldots + s_{n,n-1} u_{n-1} .$$

Se $s_{nn} = 1$, allora, essendo i rimanenti elementi della n-esima riga e della n-esima colonna tutti nulli, per il Corollario 4.3, basterà cancellare dalla S l'ultima riga e l'ultima colonna per ottenere la matrice di scattering comune ai dispositivi $\hat{n}N$ e $\hat{n}N'$. Se $s_{nn} \neq 1$, allora la funzione $1 - s_{nn}$ soddisfa la condizione

$$\operatorname{Re}(1 - s_{nn}(p)) > 0$$

in tutto $\mathbf{C}_0$. Ma poiché una funzione a parte reale positiva in $\mathbf{C}_0$ non può avere zeri senza essere identicamente nulla, si ha che la funzione $1/(1 - s_{nn})$ è olomorfa a parte reale positiva in $\mathbf{C}_0$, dunque appartiene a $\mathscr{M}_0$. Ne segue che u_n si esprime come combinazione lineare di $u_1, \ldots, u_{n-1}$ con coefficienti in $\mathscr{M}_0$. Ciò indipendentemente dal fatto che le variabili u_i, v_i siano elementi di $\tilde{\mathscr{M}}_0$ o di $\mathscr{M}_0$. È quindi verificata la condizione iii).

Dimostriamo ora che vale la iv).

L'operazione di cortocircuitazione equivale a quella di soppressione dell'n-esimo e $(n-1)$-esimo terminale nel dispositivo ottenuto dallo scambio delle ultime due righe nella matrice S. Infatti l'operazione di cortocircuitazione consiste nell'aggiunta delle condizioni:

$$\text{(12)} \qquad \begin{aligned} x_n &= x_{n-1} , \\ y_n + y_{n-1} &= 0 \end{aligned}$$

e successiva eliminazione di queste variabili.

Le (12), tradotte nelle variabili u, v diventano:

$$v_{n-1} = u_n ,$$

$$v_n = u_{n-1} .$$

Poiché la matrice ottenuta mediante lo scambio anzidetto è ancora μ-subunitaria rispetto a tutte le strutture paracomplesse μ di $\mathfrak{N}_0$, la validità della condizione iv) discende dalla validità della iii).

La condizione v) risulta ovvia, essendo il nodo triplo il dispositivo risolubile a tre terminali i cui funzionamenti (x, y) sono quelli definiti da:

$$x_1 = x_2 = x_3 \,; \qquad \text{(eguaglianza delle tensioni)},$$

$$y_1 + y_2 + y_3 = 0 \,; \qquad \text{(conservazione delle correnti)}.$$

5.4. – Indicheremo con $\mathsf{D}^{\mathfrak{R}_0}(\mathscr{M}_0\text{-mod}, \mathscr{M}_0)$ il sottouniverso (risolubile) di $\mathsf{D}(\mathscr{M}_0\text{-mod}, \mathscr{M}_0)$ immagine del morfismo iniettivo di cui sopra. Consideriamo ora lo spazio $\mathfrak{X}$ in quanto $\mathscr{M}_0$-modulo; ogni elemento di $\mathscr{M}_0$ opera su $\mathfrak{X}$ in modo da commutare con le traslazioni (temporali). Ogni dispositivo di $\mathsf{D}^{\mathfrak{R}_0}(\mathscr{M}_0\text{-mod}, \mathscr{M}_0)$ è caratterizzato da una matrice S univocamente determinata, ad elementi in $\mathscr{M}_0$, ovvero da un morfismo

$$S : \mathscr{M}_0^n \to \mathscr{M}_0^n .$$

Si deduce pertanto, mediante prodotto tensoriale, il morfismo:

$$\mathfrak{X} \bigotimes_{\mathscr{M}_0} S : \mathfrak{X}^n \to \mathfrak{X}^n . \tag{13}$$

Poiché $\mathfrak{X}$ è un $\mathscr{M}_0$-modulo (non nullo) privo di torsione, la matrice di scattering di un dispositivo di $\mathsf{D}^{\mathfrak{R}_0}(\mathscr{M}_0\text{-mod}, \mathscr{M}_0)$ coincide con quella del corrispondente dispositivo in $\mathsf{D}(\mathscr{M}_0\text{-mod}, \mathfrak{X})$. Con ragionamenti analoghi a quelli fatti dianzi, possiamo applicare il Criterio 5.2 per concludere che la corrispondenza è un morfismo (iniettivo) e la sua immagine, che indicheremo con $\mathsf{D}^{\mathfrak{R}_0}(\mathscr{M}_0\text{-mod}, \mathfrak{X})$ è un sottouniverso risolubile di $\mathsf{D}(\mathscr{M}_0\text{-mod}, \mathfrak{X})$.

Proprietà caratteristiche dell'universo dei dispositivi passivi

6. – Consideriamo l'$\mathscr{M}_0$-modulo $\mathfrak{X}$; poiché il gruppo delle traslazioni temporali si può considerare come un sottogruppo moltiplicativo del corpo $\mathfrak{M}$, questo opera su $\mathfrak{X}$ commutando con i moltiplicatori dell'algebra. Da ciò segue che i dispositivi dell'universo $\mathsf{D}^{\mathfrak{R}_0}(\mathscr{M}_0\text{-mod}, \mathfrak{X})$ sono invarianti rispetto alle traslazioni temporali. Inoltre ogni dispositivo N di detto universo è fisicamente passivo nel senso che ogni suo funzionamento (x, y) verifica la disuguaglianza (3) o la equivalente (4) che nel caso attuale implica la non anticipatività (causalità) della trasformazione funzionale (13). Ogni dispositivo è altresì risolubile.

Le proprietà precedenti costituiscono una caratterizzazione diretta del sottouniverso $\mathsf{D}^{\mathfrak{R}_0}(\mathscr{M}_0\text{-mod}, \mathfrak{X})$ di $\mathsf{D}(\mathsf{C}\text{-mod}, \mathfrak{X})$.

Infatti sussiste il seguente

6.1. – Teorema: *Sia Φ un endomorfismo di $\mathfrak{X}^n$ in quanto* $\mathbf{C}$-*spazio vettoriale, soddisfacente le seguenti condizioni:*

i) *Φ commuta con le traslazioni temporali,*

ii) *per ogni $x \in \mathfrak{X}^n$ e per ogni $t \in \mathbf{R}$ si ha:*

$$\int_{-\infty}^{t} \langle \Phi u(t), \Phi u(t) \rangle \, dt < \int_{-\infty}^{t} \langle u(t), u(t) \rangle \, dt ,$$

allora il dispositivo lineare i cui funzionamenti sono descritti da

$$x = u + \Phi(u),$$

$$y = u - \Phi(u),$$

al variare di u in $\mathfrak{X}^n$ appartiene all'universo $\mathsf{D}^{\mathfrak{R}_0}(\mathcal{M}_0\text{-mod}, \mathfrak{X})$.

Dimostrazione: Consideriamo gli operatori Φ_{ik} ottenuti componendo la sequenza

$$\mathfrak{X} \xrightarrow{\varepsilon_i} \mathfrak{X}^n \xrightarrow{\Phi} \mathfrak{X}^n \xrightarrow{\pi_k} \mathfrak{X}$$

dove ε_i, π_k $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$ sono le iniezioni e proiezioni canoniche.

Allora gli operatori

$$id_{\mathfrak{X}} + \Phi_{ik} \colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$$

sono morfismi lineari, commutano con le traslazioni e sono operatori passivi. In virtù del già citato teorema di König e Meixner ([2]) sono rappresentati da funzioni Y_{ik} olomorfe con parte reale positiva o nulla in $\mathbf{C}_0$ e quindi anche i morfismi Φ_{ik} sono rappresentati in $\mathcal{M}_0$ da certi elementi $s_{ik} = Y_{ik} - 1$ e la matrice $S = (s_{ik})$ opera su $\mathfrak{X}^n$ come Φ.

Ancora applicando il medesimo teorema dimostriamo che la matrice S è μ-subunitaria per ogni μ di $\mathfrak{R}_0$ o equivalentemente che la matrice complessa $S(p)$ è subunitaria in ogni punto $p \in \mathbf{C}_0$. A tal uopo basta dimostrare che per ogni costante reale c, con $|c| < 1$, la matrice $I - cS$ è invertibile in $\mathcal{M}_0$ e la matrice $Z = (I - cS)^{-1}(I + cS)$ rappresenta un operatore passivo in $\mathfrak{X}^n$. Ne segue che la matrice complessa

$$cS(p) = (Z(p) + I)^{-1}(Z(p) - I)$$

è subunitaria per ogni p in $\mathbf{C}_0$. Per l'arbitrarietà di c risulta ivi subunitaria la matrice $S(p)$.

Ulteriori generalizzazioni della passività fisica: la k-monotonia.

7. – Per ogni k reale costruiremo un universo risolubile i cui dispositivi sono caratterizzati da una condizione di monotonia che generalizza la (3); quest'ultima si ritrova come caso particolare per $k = 0$.

7.1. – Sia k un numero reale; indichiamo con C_k il semipiano $\operatorname{Re} p > k$. Sia $\mathscr{M}_k$ l'algebra generata dalle funzioni olomorfe in C_k aventi ivi parte reale positiva. Ognuno di tali generatori, e quindi ogni elemento di $\mathscr{M}_k$, si può considerare come trasformata di Laplace di un operatore C-lineare su $\mathfrak{T}$ non anticipativo e commutante con le traslazioni. Infatti, detto φ tale operatore, $\hat{\varphi}(p + k)$ è una funzione olomorfa con parte reale positiva in C_0 e come tale rappresenta un operatore $\varphi_0 \in \mathscr{M}_0$.

Se $u \in \mathfrak{T}$ e $\varphi \in \mathscr{M}_k$, allora si ha, per note proprietà della trasformazione di Laplace [9]:

$$\varphi u(t) = \exp(kt)\, \varphi_0 u(t)\,. \tag{14}$$

In generale la traslazione $p \mapsto p + k$ determina un isomorfismo dell'algebra $\mathscr{M}_k$ sull'algebra $\mathscr{M}_0$. Per ogni $k \in \mathsf{R}$, $\mathscr{M}_k$ è una sottoalgebra di $\mathfrak{M}$; in questo ambiente, se $k_1 < k_2$ $(k_1, k_2 \in \mathsf{R})$, si ha l'inclusione

$$\mathscr{M}_{k_1} \subset \mathscr{M}_{k_2}\,. \tag{15}$$

Posto

$$\mathscr{M} = \bigcup_{k \in \mathsf{R}} \mathscr{M}_k$$

si ottiene un'algebra che opera su $\mathfrak{T}$, così che $\mathfrak{T}$ si può considerare un $\mathscr{M}$-modulo senza torsione. Inoltre ogni elemento di $\mathscr{M}$, oltre a commutare con le traslazioni temporali, opera su $\mathfrak{T}$ in modo non anticipativo.

7.2. – Indichiamo con $\mathfrak{R}_k$ la famiglia di strutture paracomplesse sul corpo $\bar{\mathscr{Z}}_k$ corrispondente a $\mathfrak{R}_0$. Allora si ottengono gli universi isomorfi:

$$\begin{aligned}\mathsf{D}^{\mathfrak{R}_k}(\bar{\mathscr{Z}}_k\text{-mod}, \bar{\mathscr{Z}}_k) = \mathsf{D}^{\mathfrak{R}_k}(\bar{\mathscr{Z}}_k\text{-mod}, \mathscr{M}_k) = \mathsf{D}^{\mathfrak{R}_k}(\mathscr{M}_k\text{-mod}, \mathscr{M}_k) = \\ = \mathsf{D}^{\mathfrak{R}_k}(\mathscr{M}_k\text{-mod}, \mathfrak{T}) = \mathsf{D}^{\mathfrak{R}_k}(\mathsf{C}\text{-mod}, \mathfrak{T})\,.\end{aligned}$$

Uno qualunque di questi universi verrà indicato nel seguito semplicemente con $\mathsf{D}^{(k)}$; il contesto eviterà ambiguità.

[9] Poiché φ, come φ_0, opera in modo non anticipativo, l'identità (14), valendo per u a supporto compatto, vale per qualunque $u \in \mathfrak{T}$.

Le traslazioni (parallele all'asse reale) che sovrappongono due semipiani C_k determinano una famiglia (transitiva) di isomorfismi tra i corrispondenti universi $D^{(k)}$.

7.3. – Definizione: *Diremo che un dispositivo N di $D(C\text{-mod}, \mathfrak{X})$ è k-monotono se ogni funzionamento $(x, y) \in N$ soddisfa la disuguaglianza*

$$\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{t} \exp(-2kt)\langle x(t), y(t)\rangle\, dt > 0 \qquad \text{per ogni } t \in \mathbf{R}. \tag{16}$$

Se il dispositivo N è risolubile, allora nella solita descrizione (11), il morfismo S è tale da soddisfare la condizione seguente:

$$\int_{-\infty}^{t} \exp(-2kt)\,|Su(t)|^2\, dt < \int_{-\infty}^{t} \exp(-2kt)\,|u(t)|^2\, dt\,, \qquad t \in \mathbf{R}, \tag{17}$$

per ogni $u \in \mathfrak{X}^*$.

Allora possiamo dimostrare il seguente

7.4. – Teorema: *Il sottouniverso $D^{(k)}$ dell'universo lineare totale $D(C\text{-mod}, \mathfrak{X})$ è costituito da tutti i dispositivi soddisfacenti le seguenti condizioni:*

i) *risolubilità,*

ii) *invarianza temporale,*

iii) *k-monotonia.*

Dimostrazione: Mediante l'isomorfismo derivante dalla traslazione $p \mapsto p + k$, se N è un dispositivo di $D^{(k)}$, esso si muta in un dispositivo N_0 in $D^{(0)}$ che risulta risolubile. Sia S_0 la matrice di scattering relativa a N_0; la matrice S, i cui elementi sono traslati di k, è una matrice di $\mathscr{M}_k$, dunque N è risolubile e S opera su $\mathfrak{X}^*$ commutando con le traslazioni temporali. Sia (x, y) un funzionamento di N, allora, posto

$$X(t) = \exp(-kt)x(t)\,, \qquad Y(t) = \exp(-kt)y(t)$$

per la (15), (X, Y) è un funzionamento di N_0 che, per la passività, soddisfa la

$$\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{t} \langle X(t), Y(t)\rangle\, dt > 0 \qquad t \in \mathbf{R}$$

e quindi

$$\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{t} \exp(-2kt)\langle x(t), y(t)\rangle\, dt > 0 \qquad t \in \mathbf{R}$$

che equivale a

$$\int_{-\infty}^{t} \exp(-2kt)\,|Su(t)|^2\,dt < \int_{-\infty}^{t} \exp(-2kt)\,|u(t)|^2\,dt \qquad t \in \mathsf{R}$$

ovvero N è k-monotono.

Si noti che, in particolare per $k = 0$, tale enunciato porta alla caratterizzazione dell'universo $\mathsf{D}^{(0)}$ e la 0-monotonia si identifica con la passività fisica consueta (cfr. Teorema 6.1).

7.5. – Tramite la caratterizzazione dei dispositivi di $\mathsf{D}^{(k)}$ fornita dal Teorema 7.4 possiamo dimostrare che per $k_1 < k_2$ è

$$\mathsf{D}^{(k_1)} \subset \mathsf{D}^{(k_2)}.$$

Infatti, sia $S\colon \mathfrak{X}^n \to \mathfrak{X}^n$ il morfismo di scattering di un dispositivo $N \in \mathsf{D}^{(k_1)}$, basterà dimostrare che la k_1-monotonia di N ne implica la k_2-monotonia.

Sia $u \in \mathfrak{X}^n$, si avrà:

$$\int_{-\infty}^{t} \exp(-2k_1 t)\left(|u(t)|^2 - |Su(t)|^2\right) dt > 0 \tag{18}$$

per ogni $t \in \mathsf{R}$; posto $b = k_2 - k_1 > 0$ e $\psi(t) = |u(t)|^2 - |Su(t)|^2$, risulta:

$$\int_{-\infty}^{t} \exp(-2k_2 t)\,\psi(t)\,dt = \exp(-2bt)\int_{-\infty}^{t} \exp(-2k_1 t)\,\psi(t)\,dt + \\ + 2b\int_{-\infty}^{t} \exp(-2bt)\int_{-\infty}^{t} \exp(-2k_1 \tau)\,\psi(\tau)\,d\tau\,dt$$

e quindi, per la (18), essendo entrambi i termini al secondo membro non negativi, tale sarà anche il primo membro.

7.6. – Poiché, al variare di k, gli universi $\mathsf{D}^{(k)}$, in quanto sottouniversi di quello lineare totale $\mathsf{D}(\mathsf{C}\text{-mod}, \mathfrak{X})$, sono totalmente ordinati per inclusione, potremo considerare l'universo

$$\mathsf{D} = \bigcup_{k \in \mathsf{R}} \mathsf{D}^{(k)}$$

costituito da tutti i dispositivi C-lineari su $\mathfrak{X}$, invarianti per traslazioni temporali, risolubili e k-monotoni per qualche $k \in \mathsf{R}$.

7.7. – Osservazione: È opinione degli autori che la k-monotonia (anche per $k > 0$) possa acquistare significato fisico se opportunamente estesa ad universi di dispositivi non lineari, poiché, in tal caso, potrebbe essere compatibile con la passività fisica ordinaria. Questo argomento, non privo di difficoltà, sarà oggetto di ulteriori ricerche.

Alcuni automorfismi dell'universo D

8. – Si mette in evidenza un gruppo di automorfismi di D contenente un sottogruppo formato dalle similitudini derivanti da un cambiamento di scala dei tempi, oppure delle tensioni e delle correnti.

8.1. – Sia $a \in \mathsf{R}$, $(a > 0)$ e $\alpha \in \mathsf{C}$, consideriamo la trasformazione $E_{a,\alpha} : \mathfrak{T} \to \mathfrak{T}$ che muta $x \in \mathfrak{T}$ in

$$E_{a,\alpha} x(t) = \frac{e^{\alpha t}}{a} x\left(\frac{t}{a}\right). \tag{19}$$

Tale trasformazione, oltre ad essere un automorfismo di $\mathfrak{T}$ in quanto C-spazio, è distributiva rispetto al prodotto di convoluzione in $\mathfrak{T}$ e quindi ammette una estensione ad un automorfismo di $\mathfrak{M}$; inoltre essa subordina un isomorfismo che indicheremo ancora con

$$E_{a,\alpha} : \mathscr{M}_k \to \mathscr{M}_{k'}$$

dove

$$k' = \frac{k}{a} + \operatorname{Re} \alpha . \tag{20}$$

Infatti, se $\varphi \in \mathscr{M}_k$, risulta

$$(E_{a,\alpha} \varphi)^{\wedge}(p) = \phi(a(p - \alpha)) \tag{21}$$

per proprietà note della trasformata di Laplace.

Al variare di a e di α, $E_{a,\alpha}$ descrive un gruppo di automorfismi di $\mathscr{M}$ anti-isomorfo al gruppo delle omotetie del piano C, a rapporto positivo; ne segue che l'omotetia

$$p \mapsto a(p - \alpha)$$

trasforma il semipiano $\mathsf{C}_{k'}$ nel semipiano C_k, con k' dato da (20).

L'universo D si può considerare dunque come un sottouniverso risolubile dell'universo lineare totale $\mathsf{D}(\mathscr{M}\text{-mod}, \mathfrak{T})$. Ogni automorfismo $E_{a,\alpha}$ definisce un endofuntore esatto e fedele della categoria degli $\mathscr{M}$-moduli in sé (funtore tacito di cambiamento d'anello [4]). Pertanto $E_{a,\alpha}$ induce un automorfismo dell'universo $\mathsf{D}(\mathscr{M}\text{-mod}, \mathfrak{T})$.

[4] In realtà è un cambiamento del modo di operare dell'anello.

8.2. – Dimostriamo ora che detto automorfismo subordina un automorfismo di $\mathbf{D}$.

Sia N un dispositivo in $\mathbf{D}$ e sia S la matrice di scattering di N; allora N sarà descritto dai funzionamenti (x, y) con

$$x = u + Su,$$
$$y = u - Su, \quad u \in \mathfrak{L}^n.$$

Il trasformato N' di N mediante tale automorfismo sarà descritto mediante i funzionamenti (X, Y) con

$$X = E_{a,\alpha} x,$$
$$Y = E_{a,\alpha} y,$$

al variare di $(x, y) \in N$. Si avrà quindi:

$$X = E_{a,\alpha} u + (E_{a,\alpha} S)(E_{a,\alpha} u),$$
$$Y = E_{a,\alpha} u - (E_{a,\alpha} S)(E_{a,\alpha} u),$$

ma, quando u descrive $\mathfrak{L}^n$, anche $U = E_{a,\alpha} u$ descrive $\mathfrak{L}^n$ e perciò il sistema:

$$X = U + (E_{a,\alpha} S) U,$$
$$Y = U - (E_{a,\alpha} S) U,$$

descrive N' al variare di U in $\mathfrak{L}^n$, per mezzo della matrice di scattering

$$S' = E_{a,\alpha} S.$$

Per qualche k, S è subunitaria rispetto a tutte le strutture paracomplesse di $\mathfrak{R}_k$; allora $E_{a,\alpha} S = (E_{a,\alpha} s_{ij})$ risulta subunitaria rispetto alla famiglia di strutture paracomplesse $\mathfrak{R}_{k'}$, k' essendo dato dalla (20). Perciò $N' \in \mathbf{D}^{(k')} \subset \mathbf{D}$.

Dunque $E_{a,\alpha}$ induce un endomorfismo su $\mathbf{D}$. Poiché $(E_{a,\alpha})^{-1}$ è un automorfismo del tipo $E_{b,\beta}$ (associato all'omotetia inversa che trasforma il semipiano $\mathbf{C}_k$ nel semipiano $\mathbf{C}_{k'}$), ne segue che $E_{a,\alpha}$ induce un automorfismo su $\mathbf{D}$.

8.3. – Gli automorfismi di $\mathbf{D}$ derivanti dagli $E_{a,0}$ formano un gruppo E di automorfismi che chiameremo similitudini di scala temporale. L'importanza di tali automorfismi è dovuta al fatto che certe proprietà di un dispositivo non devono dipendere dalla scelta dell'unità di misura dei tempi. Ciò si traduce nel fatto che la sostituzione $t \mapsto t/a$ in tutti i funzionamenti di un dispositivo deve produrre un dispositivo del medesimo universo. Ed anzi questa corrispondenza deve essere un automorfismo dell'universo stesso; nel nostro caso quest'esigenza è soddisfatta.

Sia infatti N in D ed S la sua matrice di scattering, si avrà per $(x, y) \in N$:

$$(22) \qquad \begin{aligned} X(t) &= x\left(\frac{t}{a}\right) = u\left(\frac{t}{a}\right) + Su\left(\frac{t}{a}\right), \\ Y(t) &= y\left(\frac{t}{a}\right) = u\left(\frac{t}{a}\right) - Su\left(\frac{t}{a}\right). \end{aligned}$$

Detto N' il dispositivo descritto da (X, Y) al variare di (x, y) in N, mostriamo che la trasformazione $N \mapsto N'$ è un automorfismo di D.

Le (22) si possono scrivere:

$$\begin{aligned} X &= aE_{a,0}u + aE_{a,0}(Su), \\ Y &= aE_{a,0}u - aE_{a,0}(Su), \end{aligned}$$

ossia, ponendo $U = aE_{a,0}u$:

$$\begin{aligned} X &= U + (E_{a,0}S)U, \\ Y &= U - (E_{a,0}S)U. \end{aligned}$$

Poiché, al variare di u in $\mathfrak{X}^n$, U descrive ancora $\mathfrak{X}^n$, tale trasformazione è proprio quella indotta su D da $E_{a,0}$, che risulta pertanto un automorfismo di D.

8.4. – Un altro gruppo di automorfismi di D deriva dal cambiamento di unità di misura per le tensioni e per le correnti.

Consideriamo la trasformazione che muta il dispositivo generico N di D nel dispositivo N' di $\mathsf{D}(\mathscr{M}\text{-mod}, \mathfrak{X})$ descritto dai funzionamenti (X, Y) con

$$(23) \qquad \begin{aligned} X &= bx, \\ Y &= y, \end{aligned}$$

al variare di $(x, y) \in N$, b essendo una costante reale positiva (ciò significa un cambiamento di unità di misura per le tensioni).

Sia S la matrice di scattering di N, dimostriamo intanto che N' è risolubile. Posto

$$\begin{aligned} X &= U + V, \\ Y &= U - V, \end{aligned}$$

con (X, Y) funzionamento generico di N', sarà:

$$U = \frac{b+1}{2}u + \frac{b-1}{2}Su,$$

$$V = \frac{b+1}{2}u - \frac{b-1}{2}Su,$$

con u variabile in $\mathfrak{X}^n$.

Risulta, posto $c = (h-1)/(h+1)$:

$$(I + cS)V = (I - cS)U$$

dove I è la matrice identica. Poiché $|c| < 1$, $I + cS$ è invertibile e si ha la rappresentazione del generico funzionamento di N' seguente:

$$X = U + (I + cS)^{-1}(I - cS)U, \tag{24}$$
$$Y = U - (I + cS)^{-1}(I - cS)U$$

al variare di U in $\mathfrak{X}^n$.

Il dispositivo N' è quindi risolubile. Inoltre, se N è k-monotono, le (23) porgono:

$$\operatorname{Re}\int_{-\infty}^{t} \exp(-2k\tau)\langle X(\tau), Y(\tau)\rangle\, d\tau = h \operatorname{Re}\int_{-\infty}^{t} \exp(-2k\tau)\langle x(\tau), y(\tau)\rangle\, d\tau \geq 0$$

per $t \in \mathbf{R}$ e per ogni funzionamento $(X, Y) \in N'$; pertanto anche N' è k-monotono e appartiene a $\mathbf{D}$. La trasformazione $N \mapsto N'$ è bijettiva in $\mathbf{D}$ poiché la trasformazione inversa si ottiene mutando h in h^{-1} nelle (23).

Che tale trasformazione sia un automorfismo di $\mathbf{D}$ segue dal fatto che, oltre ad essere bijettiva, essa soddisfa le condizioni del Criterio 5.2.

Alla dimostrazione si può pervenire più facilmente attraverso la seguente:

8.5. – Osservazione: Se a è un reale non nullo, il dispositivo N' descritto dalle (23) è descrivibile anche mediante la trasformazione seguente:

$$X = ahx, \tag{25}$$
$$Y = ay.$$

Prendendo $a = 1/\sqrt{h}$, le (25) porgono:

$$X = \sqrt{h}\, x,$$
$$Y = \frac{1}{\sqrt{h}}\, y.$$

Sia T il «trasformatore ideale a due terminali» di rapporto $\sqrt{h}$ definito dal sistema:

$$x_2 = \sqrt{h}\, x_1 \qquad x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathfrak{X};$$
$$y_2 = -\frac{1}{\sqrt{h}}\, y_1$$

esso è risolubile e k-monotono per ogni $k \in \mathbf{R}$. Allora il dispositivo N' si ottiene collegando in serie ad ogni terminale di N il trasformatore T. Inoltre il trasformatore T collegato in serie con T' ottenuto da T per scambio dei terminali produce il «connettore perfetto» a due terminali.

8.6. – Per quanto riguarda il cambiamento di unità di corrente, possiamo ancora disporre della scelta di a nelle (25) ponendo $a = 1/b$; si ottiene la seguente descrizione del dispositivo N':

$$\begin{aligned} X &= x, \\ Y &= \frac{1}{b}y, \end{aligned} \qquad (x, y) \in N.$$

Ciò significa che variare nel rapporto $1:b$ le correnti dà luogo allo stesso automorfismo che variare le tensioni nel rapporto $b:1$.

Questi automorfismi che chiameremo similitudini di scala tensione-corrente formano un gruppo G ad un parametro isomorfo al gruppo moltiplicativo $\mathbf{R}^*_+$.

Indicheremo il dispositivo N' corrispondente ad N per le (23) con N^h. Questa notazione è compatibile con la notazione $M \cdot N$ usata per indicare la composizione in parallelo dei dispositivi M ed N con gli stessi terminali. In conformità a questa notazione (moltiplicativa) (cfr. [1]) potremo porre ricorsivamente:

$$\begin{aligned} N^1 &= N, \\ N^p &= N \cdot N^{p-1}, \end{aligned}$$

per p intero maggiore di 1.

Allora N^h, per h reale positivo, estende la «potenza di composizione in parallelo» di p copie di N (N^p, con p esponente intero).

Valgono le consuete proprietà delle potenze, ossia:

$$\begin{aligned} N^1 &= N, \\ (M \cdot N)^h &= M^h \cdot N^h, \\ (N^{h_1})^{h_2} &= N^{h_1 h_2}, \\ N^{h_1} \cdot N^{h_2} &= N^{h_1 + h_2}. \end{aligned}$$

9. – Si prendono in esame alcuni automorfismi involutori di $\mathbf{D}$ che commutano con le similitudini.

9.1. – Consideriamo la seguente trasformazione (coniugio) sull'algebra di convoluzione $\mathfrak{T}$: sia $u \in \mathfrak{T}$, poniamo

$$\bar{u}(t) = \overline{u(t)} \qquad t \in \mathbf{R}.$$

La trasformazione involutoria $u \mapsto \bar{u}$ è un automorfismo di $\mathfrak{T}$ in quanto $\mathbf{R}$-spazio vettoriale, inoltre è:

$$\bar{u} * \bar{v} = \overline{u * v}$$

per ogni $u, v \in \mathfrak{T}$.

Perciò tale trasformazione, essendo distributiva rispetto alla convoluzione in $\mathfrak{T}$, si estende ad un automorfismo del corpo $\mathfrak{M}$ (in quanto R-algebra). Questo automorfismo subordina un automorfismo su ogni sottoalgebra $\mathscr{M}_k$ e quindi anche su $\mathscr{M}$.

Se $w \in \mathscr{M}_k$ si ha la seguente relazione con la trasformata di Laplace:

$$\hat{\bar{w}}(p) = \overline{\hat{w}(\bar{p})} \qquad p \in \mathsf{C}_k .$$

Sia N un dispositivo di $\mathsf{D}^{(k)}$ e $S = (s_{ij})$ la sua matrice di scattering. Allora, se indichiamo con $\bar{S}$ la matrice $(\bar{s}_{ij})$, questa risulta ancora subunitaria (cfr. Appendice), rispetto a tutte le strutture paracomplesse di $\mathfrak{R}_k$ e individua un dispositivo $\bar{N} \in \mathsf{D}^{(k)}$.

La trasformazione

$$N \mapsto \bar{N} \tag{26}$$

è un automorfismo involutorio di $\mathsf{D}^{(k)}$; la dimostrazione procede secondo il Criterio 5.2.

Poiché la trasformazione (26) non dipende da k, essa opera come automorfismo in D.

9.2. – Un altro automorfismo involutorio di D che subordina automorfismi su ogni $\mathsf{D}^{(k)}$ è quello di trasposizione. Esso muta il dispositivo N nel dispositivo N^τ la cui matrice di scattering è la trasposta S^τ della matrice S definente N. Anche qui la dimostrazione procede con le solite considerazioni.

Poiché ovviamente i due automorfirmi commutano, si potrà definire il trasposto hermitiano N^* di N attraverso la matrice trasposta hermitiana:

$$S^* = \bar{S}^\tau .$$

Questi tre automorfismi involutori con l'identità formano un gruppo abeliano di automorfismi di $\mathsf{D}^{(k)}$ e di D.

9.3. – Osservazione: Il gruppo delle similitudini (generato da E e G) è un gruppo di automorfismi (abeliano a due parametri). I tre automorfismi involutori commutano con ogni similitudine: ciò significa che essi non dipendono dalla scelta di unità di misura per le grandezze tempo, tensione, corrente, ed hanno significato intrinseco.

Alcuni sottouniversi notevoli di D

10. – Si delimitano certi sottouniversi di D che sono stabili rispetto alle similitudini.

10.1. – Se consideriamo il sottoinsieme dei dispositivi di D la cui matrice di scattering è una matrice ad elementi razionali (nella variabile p), questo costituisce un sottouniverso che si presenta come un ampliamento dell'universo D^{R} (cfr. 2.3).

10.2. – I dispositivi invarianti rispetto all'automofismo involutorio $N \mapsto \bar{N}$ costituiscono un sottouniverso di D; questi rimangono completamente determinati dai loro funzionamenti reali. Analogamente i dispositivi invarianti rispetto all'automorfismo di trasposizione (simmetrici) formano un sottouniverso e lo stesso accade per quelli invarianti rispetto all'automorfismo * (hermitiani).

10.3. – Un ulteriore sottouniverso è

$$\mathsf{D}^{(-\infty)} = \bigcap_{\lambda \in \mathbf{R}} \mathsf{D}^{(\lambda)}.$$

Un dispositivo di $\mathsf{D}^{(-\infty)}$ possiede una matrice di scattering $S = (s_{ij})$ con elementi s_{ij} funzioni olomorfe e limitate in tutto C, quindi costanti. Tutti gli automorfismi del gruppo H (abeliano a due parametri e quattro componenti connesse) generato dalle similitudini e dalle tre involuzioni, subordinano automorfismi su $\mathsf{D}^{(-\infty)}$; le restrizioni a quest'ultimo si riducono alle similitudini di scala tensione-corrente ed alle tre involuzioni, quindi ad un gruppo abeliano ad un parametro e quattro componenti.

Si ha poi il sottouniverso dei dispositivi « uniformemente passivi »:

$$\mathsf{D}^{(0^-)} = \bigcup_{\lambda < 0} \mathsf{D}^{(\lambda)}$$

che è sottouniverso proprio di $\mathsf{D}^{(0)}$.

10.4. – Tutti i precedenti sottouniversi di D sono stabili rispetto agli automorfismi del gruppo H (e in particolare rispetto alle similitudini); tali sono altresì i sottouniversi del reticolo generato dai precedenti. Ciò garantisce la loro significatività intrinseca.

Il sottouniverso costituito dai dispositivi « flottanti » (svincolati da massa), cioè dai dispositivi i cui funzionamenti (x, y) soddisfano la condizione

$$\sum_i y_i = 0$$

è invariante per le similitudini.

Appendice

Teorema: *Sia $\mathscr{K}$ un corpo commutativo, $\mu = (\eta, \theta)$ una struttura paracomplessa su $\mathscr{K}$ e sia $S: \mathscr{K}^n \to \mathscr{K}^n$ una matrice μ-subunitaria, allora la matrice trasposta η-hermitiana S^η e la trasposta S^T sono μ-subunitarie.*

Mancando l'ipotesi di chiusura algebrica per $\mathscr{K}$ (nel qual caso la dimostrazione potrebbe ricalcare il procedimento usuale per $\mathbf{C}$), ci avvarremo di alcuni lemmi. Tutte le disuguaglianze che seguono sono relative all'ordinamento θ.

Lemma 1: *Nelle ipotesi del teorema, se $\lambda \in \mathscr{K}$ e $\lambda^\eta \lambda < 1$, allora λS è strettamente μ-subunitaria (cioè $u^\eta(I - \lambda^\eta S^\eta S \lambda)u > 0$ per $u \neq 0$).*

Infatti si ha:

$$u^\eta(I - \lambda^\eta S^\eta S\lambda)u = u^\eta u - \lambda^\eta \lambda u^\eta u + \lambda^\eta \lambda u^\eta u - u^\eta \lambda^\eta S^\eta S \lambda u =$$

$$= (1 - \lambda^\eta \lambda) u^\eta u + \lambda^\eta \lambda (u^\eta u - u^\eta S^\eta S u)$$

di questi due termini non negativi il primo è strettamente positivo per $u \neq 0$, da cui l'asserto.

Lemma 2: *Nelle ipotesi precedenti sono invertibili le matrici $I + \lambda S$ e $I - \lambda^\eta S^\eta$.*

Infatti altrimenti sarebbe

$$\mathrm{Ker}\,(I - \lambda^\eta S^\eta)(I + \lambda S) \neq 0\,.$$

Allora, preso $u_0 \in \mathrm{Ker}\,(I - \lambda^\eta S^\eta)(I + \lambda S)$, $u_0 \neq 0$, si avrebbe

$$u_0^\eta (I - \lambda^\eta S^\eta)(I + \lambda S) u_0 = 0$$

cioè

(1) $$u_0^\eta u_0 + \lambda u_0^\eta S u_0 - \lambda^\eta u_0^\eta S^\eta u_0 - u_0^\eta \lambda \lambda^\eta S^\eta S u_0 = 0\,,$$

ma la parte reale del primo membro di (1) è

$$u_0^\eta u_0 - u_0^\eta \lambda^\eta S^\eta S \lambda u_0 = 0$$

che, per il Lemma 1, deve essere positiva strettamente.

Lemma 3: *Nelle solite ipotesi $\lambda^\eta S^\eta$ è strettamente μ-subunitaria.*

Mutando λ in $-\lambda$ nel Lemma 2, si ha che $I + \lambda^\eta S^\eta$ e $I - \lambda S$ sono invertibili.

Poniamo

$$
\begin{aligned}
&x = u + \lambda^{\pi} S^{\pi} u\,, \\
(2) \qquad &y = u - \lambda^{\pi} S^{\pi} u\,,
\end{aligned}
$$

si ha

$$
u = (I + \lambda^{\pi} S^{\pi})^{-1} x\,,
$$

$$
y = (I - \lambda^{\pi} S^{\pi})(I + \lambda^{\pi} S^{\pi})^{-1} x\,,
$$

da cui

$$
(3) \qquad x^{\pi} y = x^{\pi}(I - \lambda^{\pi} S^{\pi})(I + \lambda^{\pi} S^{\pi})^{-1} x = x(I + \lambda^{\pi} S^{\pi})^{-1}(I - \lambda^{\pi} S^{\pi}) x\,.
$$

Posto $w = (I + \lambda S)^{-1} x$, cioè $x = (I + \lambda S) w$, dalla (3) si ottiene:

$$
x^{\pi} y = w^{\pi}(I + \lambda^{\pi} S^{\pi})(I + \lambda^{\pi} S^{\pi})^{-1}(I - \lambda^{\pi} S^{\pi})(I + \lambda S) w = w^{\pi}(I - \lambda^{\pi} S^{\pi})(I + \lambda S) w
$$

per cui

$$
(4) \qquad \operatorname{Re}(x^{\pi} y) = w^{\pi} w - w^{\pi} \lambda^{\pi} S^{\pi} S \lambda w > 0
$$

per $w \in \mathcal{K}^n$, $w \neq 0$.

Dalle (2) si ottiene:

$$
y^{\pi} x = u^{\pi}(I - \lambda S)(I + \lambda^{\pi} S^{\pi}) u
$$

da cui

$$
(5) \qquad \operatorname{Re}(y^{\pi} x) = u^{\pi} u - u^{\pi} \lambda S S^{\pi} \lambda^{\pi} u\,;
$$

ma la corrispondenza tra u e w è un automorfismo di $\mathcal{K}^n$ ed essendo ovviamente $\operatorname{Re}(x^{\pi} y) = \operatorname{Re}(y^{\pi} x)$, dal confronto della (5) con la (4) si ha

$$
u^{\pi}(I - \lambda S S^{\pi} \lambda^{\pi}) u > 0
$$

per ogni $u \neq 0$; quindi $\lambda^{\pi} S^{\pi}$ è strettamente μ-subunitaria.

LEMMA 4: *Se λS è μ-subunitaria per ogni $\lambda \in \mathcal{K}$ per cui $\lambda^{\pi} \lambda < 1$, allora S è μ-subunitaria.*

Infatti se S non fosse μ-subunitaria esisterebbe $u_0 \in \mathcal{K}^n$ tale che

$$
u_0^{\pi} S^{\pi} S u_0 > u_0^{\pi} u_0 > 0\,;
$$

allora, posto

$$
\alpha = \frac{u_0^{\pi} u_0}{u_0^{\pi} S^{\pi} S u_0}
$$

sarebbe $\alpha = \alpha^*$ nonché $0 < \alpha < 1$; quindi preso $\lambda = 1 - (1 - \alpha)/2$ risulterebbe

$$1 > \lambda^* \lambda = \lambda^2 = 1 - (1 - \alpha) + \left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^2 > \alpha .$$

Ma per tale valore di λ si avrebbe

$$u_0^* \lambda^* S^* S \lambda u_0 > u_0^* u_0$$

e ciò è in contrasto con l'ipotesi.

La prima parte del teorema enunciato è ormai raggiunta, poiché, in virtù del Lemma 3, se $\lambda^* \lambda < 1$, allora $\lambda^* S^*$ è μ-subunitaria e quindi per il Lemma 4, S^* è μ-subunitaria.

Dimostriamo ora che anche S^T è μ-subunitaria.

Sia $v \in \mathcal{X}^n$ e $u^T = v^*$, allora, poiché S^* è μ-subunitaria, si ha:

$$u^* S S^* u < u^* u$$

cioè, trasponendo ambo i membri:

$$u^T S^{*T} S^T u^{*T} < u^T u^{*T}$$

ossia

$$v^* S^{T*} S^T v < v^* v$$

che, valendo per ogni v, esprime la μ-subunitarietà di S^T.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[1] G. Darbo, *Aspetti algebrico-categoriali della teoria dei dispositivi*, Symposia Mathematica, vol. IV, (1970), pp. 303-336.

[2] H. König - J. Meixner, *Lineare Systeme und Lineare Transformationen*, Mathematische Nachrichten, 18 (1959), pp. 265-322.

[3] L. Massabò, *Estensioni di una struttura paracomplessa su un corpo algebricamente chiuso ad un suo ampliamento trascendente semplice*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, vol. 48 (1972), pp. 113-125.

[4] J. Meixner, *On the theory of linear passive systems*, Arch. for Rational Mechanics and Analysis, vol. 17 (1964), pp. 278-296.

[5] J. Mikusinski, *Operational Calculus*, Pergamon Press (1959).

[6] F. Parodi, *Costruzione di un universo di dispositivi non lineari su una coppia di gruppi abeliani*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, vol. 58 (1977), pp. 45-54.

[7] F. Parodi, *Categoria degli Universi di dispositivi e categoria delle T-Algebre*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, vol. 62 (1980), pp. 1-15.

[8] F. Parodi, *Alcune proprietà della categoria delle T-Algebre*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, vol. 62 (1980), pp. 75-94.

[9] S. Testa, *Sui sottouniversi normali di un universo di dispositivi lineari su un corpo*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, vol. 56 (1977), pp. 193-204.

[10] S. Testa, *Costruzione di un universo di dispositivi ciclicamente monotoni massimali*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, vol. 58 (1977), pp. 101-116.

[11] S. Testa, *Su un universo di dispositivi monotoni*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, vol. 65 (1981), pp. 53-57.

[12] V. Vladimirov, *Distributions en physique mathématique*, Editions Mir, Moscou (1979).

[13] D. Youla - L. Castriota - H. Carlin, *Bounded real scattering matrices and the foundation of linear passive network theory*, IRE Transaction on Circuit Theory, CT-6 (1959), pp. 102-124.