Rendiconti
Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL
Memorie di Matematica
101° (1983), Vol. VII, fasc. 4, pagg. 29-36

ADRIANA BROGINI BRATTI (*)

Sulle funzioni caratteristiche e la divisibilità delle variabili casuali deboli (**).

On the characteristic functions and divisibility of weak random variables.

SUMMARY. — We give some condition to have divisibility of characteristic functions of weak random variables with range in a topological ring.

(0) La teoria esposta dal Neveu in [3] e relativa alle variabili casuali valutate in istrutture algebrico-topologiche del tutto generali, è stata costruita con i contributi del Neveu e di altri Autori. In particolare, nella nota [1] io ho introdotto il concetto di variabile casuale debole valutata in un anello commutativo provvisto di unità e dotato di un sottoanello isomorfo all'anello dei numeri reali. In quanto tale, questo sottoanello si può interpretare subito come un corpo (isomorfo al corpo reale). Queste variabili casuali le ho studiate con riferimento ad una misura di probabilità valutata anch'essa nell'anello. Esempi comprovanti l'effettiva generalizzazione ottenuta rispetto al caso classico sono indicati nel n. 4 di [1].

Ebbene: nel presente lavoro (***) dimostrerò che i risultati sulle funzioni caratteristiche e sulla divisibilità validi nell'ambito delle variabili casuali reali o multivariate continuano a sussistere anche per le variabili casuali deboli fortemente integrabili nell'anello.

(*) Indirizzo dell'autore: Facoltà di Scienze Statistiche, Demografiche ed Attuariali dell'Università di Padova, Istituto di Statistica, Via VIII febbraio, I-35100 Padova.

(**) Nota presentata il 24 Agosto 1982 da Giuseppe Scorza Dragoni, uno dei XL.

(***) Già apparso nei preprints della Facoltà di Scienze Statistiche, Demografiche ed Attuariali dell'Università di Padova.

ISSN-0392-4106

(1) A sia un anello commutativo con unità, 1_A, e con valutazione $p: A \to R$; A contenga una copia isomorfa (isomorfismo di anello) di R (così da risultare una R-algebra associativa e commutativa); indicheremo ancora con R la copia del corpo reale contenuta in A, e supporremo che p ristretta a R coincida con il modulo.

A' sia il duale topologico di A, $A' = (g: A \to R$, g omomorfismo continuo quando A è dotato della topologia dedotta dalla valutazione p). Indicheremo con A_0 l'anello A con la topologia dedotta da A' in questo modo: o_A ha una base di intorni fornita dalle intersezioni finite degli insiemi

$$V(g, 1/n) = (a \in A: |g(a)| < 1/n), \quad \forall n \in N,$$

e supporremo che A_0 sia separato (di Hausdorff). Supporremo, inoltre, che A dotato della topologia dedotta da p sia completo.

Se (X, T) è uno spazio topologico, e se Σ_X è la σ-algebra di Borel dedotta da T (la minima che contiene ogni aperto di T), indicheremo con

$$P: \Sigma_X \to A$$

una funzione di insieme soddisfacente alle seguenti condizioni:

i) $p \circ P = P_p: \Sigma_X \to [0, 1] \subset R$ *è una probabilità*;

ii) $\forall g \in A'$, $g \neq o_{A'}$, $g \circ P = P_g: \Sigma_X \to [0, 1] \subset R$ *è una probabilità.*

Da i) e da ii), segue:

se $B_j \in \Sigma_X$, $j \in N$, e se $B_i \cap B_j = \emptyset$ per $i \neq j$, allora $P(\cup B_j) = \sum P(B_j)$, poiché:

per i) $P_p(\cup B_j) = \sum P_p(B_j)$; ciò dimostra che la serie $\sum P(B_j)$ è convergente in A, visto che

$$p\left(\sum_j^N P(B_j) - \sum_j^M P(B_j)\right) \leq \sum_N^M{}_j P_p(B_j);$$

allora, posto $\sum P(B_j) = a$, e posto $P(\cup B_j) = a'$, $\forall g \in A'$ risulta

$$g(\sum P(B_j)) = g(a) = \sum P_g(B_j) = P_g(\cup B_j) = g(a'),$$

ovvero, poiché A_0 è separato, $a = a'$.

Analogamente: risulta $P(X) = 1_A$, poiché se $a \in A$, $\forall g \in A'$ si ha

$$g(P(X)a) = P_g(X) g(a) = g(a),$$

ovvero $g(P(X)a - a) = 0$, e dunque $P(X)a = a$; con lo stesso procedimento: se $(B, B') \in \Sigma_X \times \Sigma_X$ risulta pure $P(B/B') =_* P(B) - P(B')$.

Con questi risultati (cfr. la definizione 1) di (1)), si dirà che *la quaterna* (X, A, A', P) *è uno spazio di probabilità generalizzato.*

Sia $k: X \to A$ una v.c.d. e semplice (definizione 2) di (1)); se

$$k(x) = \sum_i a_i c_{B_i}(x)$$

dove $a_i \in A$, $j = 1, 2, \dots, n$; $\cup B_i = X$, $B_i \cap B_j = 0$, se $i \neq j$, e c_{B_i} sono le funzioni caratteristiche dei $B_i \in \Sigma_X$, posto

$$F_k: R \to A$$

definita da

$$F_k(u) = P(x \in X: p \circ k(x) \leq u)$$

risulta

se
$$p(a_1) \leq p(a_2) \leq \dots \leq p(a_n)$$

(ordinando opportunamente gli a_i), e se

$$A_i = (u \in R: p(a_i) < u \leq p(a_{i+1}))$$

$$F_k(u) = P(B_1)c_{A_1}(u) + P(B_1 \cup B_2)c_{A_2}(u) + \dots + P(B_1 \cup \dots \cup B_{n-1})c_{A_{n-1}} + c_{A_n}$$

$\bigl(A_n = (u \in R: p(a_n) < u)\bigr)$.

Se Σ_R è la σ-algebra di Borel su R, indicheremo con dF_k la funzione di insieme

$$dF_k: \Sigma_R \to A$$

$$H \in \Sigma_R, \quad dF_k(H) = P(x \in X: p \circ k(x) \in H).$$

$\forall g \in A'$, $g \neq o_{A'}$; $g \circ dF_k$ rappresenta la funzione di distribuzione di probabilità della variabile casuale semplice $p \circ k: X \to R$, definita da

$$p \circ k(x) = \sum_i p(a_i) \bar{c}_{B_i}(x)$$

dove $\bar{c}_{B_i}: X \to R$ è la funzione caratteristica di B_i, rispetto alla probabilità P_g su Σ_X; per tale ragione, si dirà che F_k *è la funzione di distribuzione di probabilità della v.c.d. e semplice* k, *rispetto alla probabilità generalizzata* P.

Se C è il corpo complesso, e $i^2 = -1$, indicheremo con $A \oplus iA$ l'anello somma diretta dei due indicati, dotato della valutazione

$$p_0: A \oplus iA \to R$$

definita da

$$p_0(a + ib) = (p(a)^2 + p(b)^2)^{1/2}.$$

Posto, $\forall a \in A$,

$$\operatorname{sen}(a) = a - a^3/3! + a^5/5! - \dots$$

$$\cos(a) = 1_A - a^2/2! + a^4/4! - \dots,$$

se $k: X \to A$ è una v.c.d. e semplice, $\forall u \in R$ risulta

$$\cos(uk(x)) = \cos\left(\sum_i (ua_i)c_{B_i}(x)\right) = \sum_i \cos(ua_i)c_{B_i}(x)$$

$$\operatorname{sen}(uk(x)) = \operatorname{sen}\left(\sum_i (ua_i)c_{B_i}(x)\right) = \sum_i \operatorname{sen}(ua_i)c_{B_i}(x),$$

cioè: le funzioni $\cos(uk): X \to A$ e $\operatorname{sen}(uk): X \to A$ sono ancora v.c.d. semplici; in base a [1], pag. 58, porremo

$$E(\cos(uk)) = \sum_i \cos(ua_i)P(B_i)$$

e

$$E(\operatorname{sen}(uk)) = \sum_i \operatorname{sen}(ua_i)P(B_i);$$

e porremo, inoltre

$$f_k: R \to A \oplus iA$$

definita da

$$f_k(u) = E(\cos(uk)) + iE(\operatorname{sen}(uk)).$$

f_k si dirà la funzione caratteristica della v.c.d. e semplice k.

La giustificazione di tale definizione sta nel seguente fatto: se $g \in A'$ poiché g è continua, e poiché $\forall u \in R$ risulta $g(u) = u$, e

$$g\Big(E(\cos(uk))\Big) = E\Big(\cos(u(g \circ k))\Big)$$

$$g\Big(E(\operatorname{sen}(uk))\Big) = E\Big(\operatorname{sen}(u(g \circ k))\Big),$$

per la continuità di sen e cos, la funzione

$$g \circ f_k: R \to C$$

è la funzione caratteristica della v.c. semplice $g \circ k: X \to R$ rispetto alla probabilità P_g su Σ_X.

Il lemma seguente trasla il th. 1, di [2], pag. 51 al caso delle v.c.d. semplici.

LEMMA 1. *Se $k_i: X \to A$ sono due v.c.d. e semplici, e se $f_{k_1} = f_{k_2}$, allora $F_{k_1} = F_{k_2}$.*

DIMOSTRAZIONE. In base al th. 1 di [2], pag. 35, dove, in questo caso, $f: A \to A$ è una funzione misurabile rispetto alla σ-algebra dedotta dalla topologia su A fornita da p, risulta

$$f_{k_j}(u) = \int e^{iux}\, dF_{k_j}(x) \qquad j = 1, 2.$$

Poiché per ogni $g \in A'$, $g \circ f_{k_1}$ è la funzione caratteristica della $g \circ k_1 : X \to R$, che ha come funzione di distribuzione la $g \circ F_{k_1}$, sempre rispetto alla probabilità P_x su Σ_X, deve risultare

$$g \circ F_{k_0} = g \circ F_{k_1}.$$

Poiché A_0 è separato, risulta

$$F_{k_0} = F_{k_1}.$$

Le definizioni precedenti, ed il lemma di sopra permettono il calcolo della funzione caratteristica, e della funzione di distribuzione, delle variabili casuali $k_0 : X \to A$, purché k_0 sia fortemente integrabile in A (definizione 10) di [1]).

Sia $k_0 : X \to A$ una v.c. fortemente integrabile in A. Esiste, allora, una successione $k_n : X \to A$ di v.c.d. e semplici tale che

$$\lim_n P_x\big(x \in X : p(k_n(x) - k_0(x)) \geq \eta\big) = 0 \tag{1}$$

$\eta \in R_+$; e

$$\lim_{(m,n)} \int p(k_n - k_m)\, dP_x = 0\,. \tag{2}$$

(1) mostra che la successione $p \circ k_n : X \to R$ converge, in P_x-probabilità ([2], pag. 100), verso la $p \circ k_0 : X \to R$.

In base al teorema (6) di [2], pag. 105, ed alla definizione di pag. 83, ibid., risulta, allora,

$$F_{k_n} \xrightarrow{s} F_k$$

dove

$$F_{k_0}(u) = P(x \in X : p \circ k_0(x) \leq u)\,;$$

con la stessa tecnica usata nella dimostrazione di quel teorema, si ha: $\forall u \in R$, la successione $f_{k_n}(u)$ è una successione di Cauchy in A.

Teorema 1. *Se $k_0 : X \to A$ è una v.c. fortemente integrabile in A, posto*

$$f_{k_0}(u) = \lim_n f_{k_n}(u)$$

f_{k_0} è la funzione caratteristica di k_0.

Dimostrazione. $\forall g \in A'$, le funzioni

$$g \circ f_{k_n} : R \to A \oplus iA \quad \text{e} \quad g \circ f_{k_0} : R \to A \oplus iA$$

sono le funzioni caratteristiche delle v.c. $g \circ k_n : X \to R$ e $g \circ k_0 : X \to R$, rispetto alla probabilità P_x; le $g \circ k_n$ e la $g \circ k_0$ hanno come funzione di distribuzione, rispettivamente, le $g \circ F_{k_n}$ e $g \circ F_{k_*}$. Dunque, in base al lemma precedente, si ha

$$f_{k_n}(u) = \int e^{iux} dF_{k_n}(x);$$

applicando la g all'eguaglianza di sopra, tenendo presente che $g(dF_{k_n}) = dF_{g \circ k_n}$, e passando al limite per $n \to +\infty$, visto che

$$F_{k_n} \xrightarrow{d} F_{k_*}$$

risulta

$$f_{k_*}(u) = \int e^{iux} dF_{k_*}(x).$$

(2) In quest'ultimo numero, dimostreremo che la tesi del th. 2 di [2], pag. 54, continua a sussistere per le v.c. $k: X \to A$ fortemente integrabili.

Siano $k_i: X \to A$ due v.c.d. e semplici; F_{k_i}, siano le loro funzioni di distribuzione, e f_{k_i} le loro funzioni caratteristiche. Posto

$$F_{k_1} * F_{k_2}(u) = \int F_{k_1}(u - t) dF_{k_2}(t)$$

(l'integrazione è possibile poiché $\forall u \in R$ $F_{k_1}(u-t)$ è una funzione semplice della variabile t), risulta:

la funzione caratteristica di $F_{k_1} * F_{k_2}$ è $f_{k_1} \times f_{k_2}$ (prodotto).

Infatti:

$$\forall g \in A', \quad g(F_{k_1} * F_{k_2})(u) = \int F_{g \circ k_1}(u - t) dF_{g \circ k_2}(t)$$

dunque, la funzione caratteristica di $g(F_{k_1} * F_{k_2})$ è la

$$g(f_{k_1} \times f_{k_2}) = g(f_{k_1}) g(f_{k_2}) = f_{g \circ k_1} \times f_{g \circ k_2}.$$

Teorema 2. *$k_i: X \to A$ siano due v.c. fortemente integrabili. Allora:*

a) $F_{k_1} * F_{k_2}: R \to A$ è ben definita;

b) la funzione caratteristica di $F_{k_1} * F_{k_2}$ è $f_{k_1} \times f_{k_2}$, se f_{k_i} è la funzione caratteristica di F_{k_i}.

Dimostrazione. $k_{i,n}: X \to A$ siano due successioni di v.c.d. e semplici tali che

$$\lim_n P_g\{x \in X : p(k_{i,n}(x) - k_i(x)) \geq \eta\} = 0;$$

e

$$\lim_{(m,n)} \int p(k_{i,n} - k_{i,m}) dP_p = 0.$$

In base a quanto sopra, risulta

$$f_{k_{1,n}}(u)\, f_{k_{2,n}}(u) = \int e^{iux}\, d(F_{k_{1,n}} * F_{k_{2,n}}); \tag{3}$$

in base al fatto che $F_{k_{i,n}} \xrightarrow{s} F_{k_{i}}$ e che $f_{k_{i,n}} \to f_{k_i}$, passando al limite nella (3), per $n \to +\infty$, si ha la dimostrazione sia di *a*) che di *b*).

BIBLIOGRAFIA

[1] A. Brogini Bratti, *Variabili casuali deboli*, Rendiconti del Seminario Matematico di Padova, vol. 58 (1977).

[2] H. G. Tucker, *A graduate course in probability*, Academic Press (1967).

[3] J. Neveu, *Mathematical Foundations of the Calculus of Probability*, Holden-Day, San Francisco (1965).