Rendiconti
Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL
Memorie di Matematica
101° (1983), Vol. VII, fasc. 8, pagg. 137-144.

GIULIANO BRATTI (*)

Risoluzione dei sistemi differenziali lineari, omogenei, sovradeterminati, del tipo $\{P(D_x, D_y)u = f, Q(D_x, D_y, D_t)u = g\}$, nei cilindri retti di R^3 (**).

Solvability for some overdeterminated system of P.D.E. on cylinders of R^3.

SUMMARY. — We give a necessary and sufficient geometric condition to have solvability for overdeterminated systems of kind $\{Pu = f, Qu = g\}$, for every compatible data (f, g), on cylinders of R^3, when P and Q are homogeneous, and Q is elliptic.

INTRODUZIONE

P e Q sian operatori differenziali lineari, a coefficienti costanti, ed omogenei; Q sia ellittico.

Scopo di questo lavoro è la dimostrazione del seguente teorema

Sia $V(P, Q) = (z \in C^3, P(z) = Q(z) = 0)$. *Il sistema differenziale sovradeterminato*

$$(0) \qquad \begin{cases} P(D_x, D_y)u = f, \\ Q(D_x, D_y, D_t)u = g, \end{cases}$$

è risolubile nel cilindro $C = A \times R$ *di* R^3 *(*A *aperto semplicemente connesso di* R^2*), per ogni dato compatibile* (f, g) *se e solo se ogni retta di* R^3 *di direzione ortogonale a qualche punto di* $V(P, Q)$ *interseca* C *in un connesso* (***).

La dimostrazione si basa essenzialmente sulla teoria dei gruppi di coomologia a valori nel fascio (analitico) delle soluzioni del sistema differenziale omogeneo (0) (***); gli altri metodi usati son quelli consueti.

(*) Seminario Matematico, Via Belzoni 7, I-35100 Padova.
(**) Memoria presentata il 6 aprile 1983 da Giuseppe Scorza Dragoni, uno dei XL.
(***) Per la terminologia usata si vegga il successivo paragrafo 1.
(***) Teoria sviluppata in [6], Chap. VI, pag. 259 e segg.

ISSN-0392-4106

1) *Notazioni e preliminari.* P e Q sono due operatori differenziali lineari, a coefficienti costanti, primi tra di loro; Q è ellittico. C è un aperto di R^n tale che R^n/C (complementare) è privo di componenti connesse e compatte. Posto $D_C(P, Q) = ((f, g) \in C^\infty(C)^2, Pg = Qf)$, $D_C(P, Q)$ è un sottospazio di Fréchet di $C^\infty(C)^2$; con [2] si può controllare facilmente che il duale topologico di $D_C(P, Q)$ è algebricamente e topologicamente isomorfo a $E'(C)^2/H$, con la topologia quoziente, dove: $E'(C)$ è il duale di $C^\infty(C)$, $H = (({}^tQ\omega, -{}^tP\omega), \omega \in E'(C))$ e ${}^tQ$ e ${}^tP$ sono i trasposti di Q e P rispettivamente. Ciò permette [1] di dir subito che l'applicazione lineare $(P, Q): C^\infty(C) \to D_C(P, Q)$ definita da $(P, Q)u = (Pu, Qu)$ è suriettiva se e solo se lo spazio ${}^tP(E'(C)) + {}^tQ(E'(C))$ è chiuso in $E'(C)$.

Lemma 1: *Il sistema differenziale* $(Pu = f, Qu = g)$ *è risolubile per ogni* (f, g) *in* $D_C(P, Q)$ *se e solo se per ogni* f *in* $\mathrm{Ker}\, Q/C = (f \in C^\infty(C), Qf = 0)$ *è risolubile il sistema differenziale* $(Pu = f, Qu = 0)$.

Dimostrazione: Ovvio il risultato per un verso, nell'altro si ha: se $\lim_n {}^tP\mu_n + {}^tQ\nu_n = q$ in $E'(C)$, poichè $P(\mathrm{Ker}\, Q/C) = \mathrm{Ker}\, Q/C$ in base al teorema sulle suriezioni (lineari) fra spazi di Fréchet, esiste μ_0 in $E'(C)$ tale che ${}^tP\mu_0 = q \bmod \mathrm{Ker}\, Q/C$; dunque, visto che R^n/C è privo di componenti connesse e compatte e visto che Q è ellittico, esiste ν_0 in $E'(C)$ così che ${}^tP\mu_0 + {}^tQ\nu_0 = q$.

La dimostrazione è conclusa.

D'ora in poi: A è un aperto semplicemente connesso di R^2; $C = A \times R$ è il cilindro retto generato da A in R^3;

$$P = P(D_x, D_y) = R(D_x, D_y)S(D_x, D_y)$$

è un polinomio differenziale omogeneo, fattorizzato nella sua parte iperbolica, R, ed in quella ellittica S. La definizione di P-convessità di un aperto è (la solita) data in [4], pag. 80; per le definizioni (ed il loro uso) di fascio di distribuzioni e gruppi di coomologia, si veda [6], pagg. 230 e 317.

2) In base al Lemma 1 si ha: il sistema differenziale $(Pu = f, Qu = g)$ è risolubile per ogni (f, g) in $D_C(P, Q)$ se e solo se ogni sistema differenziale

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} (D_x - a_k D_y)u = f, \\ Qu \qquad\qquad\quad = 0, \end{cases}$$

$R(D_x, D_y) = a\Pi_k(D_x - a_k D_y)$, $a_k \in R$, e

$$\text{(2)} \qquad \begin{cases} Qv \qquad\qquad\quad = g, \\ (D_x - b_k D_y)u = 0. \end{cases}$$

$S(D_x, D_y) = b\Pi_k(D_x - b_k D_y)$, $\mathrm{Imm}\,(b_k) \neq 0$, è risolubile per ogni dato compatibile (f in $\mathrm{Ker}\, Q|C$ e g in $\mathrm{Ker}\,(D_x - b_k D_y)|C$ (¹)).

Quando Q è omogeneo, i sistemi differenziali del tipo (2) son abbastanza facili da studiare (trasformazioni di variabili); per quelli di tipo (1) la condizione necessaria e sufficiente di risolubilità sarà ottenuta a traverso il risultato di (2), per la condizione sufficiente, e l'uso del Th. 1 di [6], pag. 317 per quella necessaria (senza supporre l'omogeneità di Q).

3) Visto che a_k sta in R, con una trasformazione di variabili di R^2 in sè si può supporre che il tipo del sistema differenziale (1) sia

$$(1') \qquad \begin{cases} D_x u = f, \\ Qu = 0. \end{cases}$$

In base a [3], pag. 57, si ha: se Q è ellittico in due variabili; se $A_1 = ((x,y) \in R^2,\ a < x < b,\ 0 \in (a,b)$ e $c < y < 0)$, esiste $u \in C^\infty(A_1)$ ed esiste una successione di punti p_n in A_1 tale che:

$$Qu = 0, \qquad \lim_n p_n = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_n u(p_n) = +\infty.$$

Lemma 2: *Il sistema differenziale* (1′) *è risolubile per ogni f in* $\mathrm{Ker}\, Q|C$ *se e solo se A è D_x-convesso.*

Dimostrazione: Il sistema differenziale (1′) sia risolubile ed A non sia D_x-convesso. Eventualmente traslando e ruotando A, si può supporre che A contenga l'aperto $B_1 \cup B_2 \cup B_3$, dove

$$B_1 = ((x,y) \in R^2,\ a_1 < x < a_2 < 0,\ b_1 < y < b_2,\ 0 \in (b_1, b_2)),$$

$$B_3 = ((x,y) \in R^2,\ 0 < c_1 < x < c_2,\ b_1 < y < b_2)$$

e

$$B_2 = ((x,y) \in R^2,\ a_1 < x < c_2,\ b_1 < y < 0).$$

Si consideri una copertura $\mathfrak{U} = (U_i,\ i \in I)$, aperta, localmente finita e convessa di C, nella quale tre suoi elementi, diciamoli U_1, U_2 ed U_3 sian, rispettivamente: $U_k = B_k \times R$. Se $\mathcal{F}$ è il fascio delle soluzioni (analitiche) del sistema omogeneo (1′) in C, in base al Th. 1 di [6], pag. 317, si deve avere

$$H^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = 0$$

per ogni $p > 1$, dove H^p è il p-esimo gruppo di coomologia definito da $\mathfrak{U}$ a

(¹) Si osservi che la risolubilità del sistema differenziale (2) garantisce quella del sistema differenziale ($Qv = g$, $Sv = 0$); quindi, per l'ellitticità di S in due variabili, che dà la S-convessità di C, si ha la risolubilità del sistema differenziale ($Qv = g$, $Sv = h$) per ogni (g, h) in $D_0(Q, S)$.

valori nel fascio $\mathcal{F}$. Sia $B_2' = ((y, t) \in R^2, b_1 < y < 0, t \in R)$ e sia u_0 in $C^\infty(B_2')$ la soluzione dell'equazione

$$Q(0, D_y, D_t)u_0 = 0$$

per cui esiste p_n in B_2 tale che

$$\lim_n p_n = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_n u_0(p_n) = +\infty\,;$$

poichè u_0 è indipendente dalla variabile x si può pensar definita su tutto U_2. Sia

$$c\colon I \times I \to \bigcup(\Gamma(U_i \cup U_j, \mathcal{F}), (i,j) \in I \times I)\,, \qquad c_{i,j} \in \Gamma(U_i \cup U_j, \mathcal{F})\ \text{(2)}$$

la 1-cocatena definita da

$$c_{i,j} = 0\,, \qquad \text{se} \qquad (i,j) \notin (1, 2, 3)^2\,; \qquad c_{1,2} = c_{2,3} = u_0\,.$$

poichè risulta $\delta c = 0$, deve esistere una zero-cocatena c' tale che $\delta c' = c$ (3); ovvero

$$c_{1,2} = c_2' - c_1' \qquad \text{e} \qquad c_{2,3} = c_3' - c_2'\,, \qquad \text{con } c_i' \text{ in } \Gamma(U_i, \mathcal{F})\,;$$

dunque, se $a_1 < x' < a_2$ e se $c_1 < x'' < c_2$, risulta

$$\lim_n c_1'(x', p_n) = \lim_n (c_2'(x', p_n) - u_0(p_n)) \in R$$

e

$$\lim_n c_3'(x'', p_n) = \lim_n (c_2'(x'', p_n) + u_0(p_n)) \in R;$$

ciò è assurdo, visto che $c_2'(x', p_n) = c_2'(x'', p_n)$ e che $\lim_n u_0(p_n) = +\infty$ (4).

La condizione necessaria del lemma è dimostrata.

A sia D_x-convesso. Se si dimostra che per ogni f in $\operatorname{Ker} Q/C$ e per ogni aperto relativamente compatto K di C esiste $u_K \in \operatorname{Ker} Q/K$ tale che $D_x u_K = f$, in base a [5] esiste u in $\operatorname{Ker} Q/C$ tale che $D_x u = f$.

Poiché A è D_x-convesso si può supporre che K sia contenuto in un cilindro C_0 contenuto in C, di altezza finita e con base D_x-convessa. Se $b \in C_c^\infty(C)$, e se $b = 1$ su C_0, la funzione $Q(bf)$ è nulla sul D_x-convesso C_0; in base a [2], esiste g in $C^\infty(R^3)$ tale che

$$D_x g = Q(bf) \qquad \text{e} \qquad g/C_0 = 0\,.$$

(2) $\Gamma(U, \mathcal{F})$ è il gruppo delle sezioni su U di $\mathcal{F}$.

(3) Se $C^p(U, \mathcal{F})$ è il gruppo delle p-cocatene definite da U a valori in $\mathcal{F}$, $\delta\colon C^p(U, \mathcal{F}) \to$ $\to C^{p+1}(U, \mathcal{F})$ è l'operatore di cobordo.

(4) Si osservi che le c_i', $i = 1, 2, 3$, si posson supporre reali, potendo supporre reale Q. Infatti, se il sistema differenziale (1') è risolubile, anche ogni sistema differenziale del tipo $(D_x u = f, D^n \overline{Q}^m u = 0)$, $\overline{Q}$ il coniugato di Q, (n, m) in N^2, lo è.

Visto che in R^3 il sistema differenziale $(D_x v = bf,\ Qv = g)$ è risolubile, ovvio che se $u_K = v/K$, u_K risolve il problema di sopra.

La dimostrazione del Lemma 2 è conclusa.

4) Sia v in $\operatorname{Ker}(D_x - b_k D_y)/C$, $\operatorname{Imm}(b_k) \neq 0$; ovvio che

$$Q(D_x, D_y, D_t)v = c\Pi_k(D_t - c_k D_x)v\,, \qquad \operatorname{Imm}(c_k) \neq 0\,,$$

dove s'è posto $Q(D_x, D_y, D_t) = Q(D_x, D_x/b_k, D_t)$ e lo si è fattorizzato. Il sistema differenziale (2) è risolubile se e solo se lo è ogni sistema differenziale del tipo

$$(2') \qquad \begin{cases} (D_t - c_k D_x)v = g\,, \\ (D_x - b_k D_y)v = 0\,. \end{cases}$$

Sia V la varietà unidimensionale del sistema differenziale (2'),

$$V = (z \in C^3,\ z = (b_k u, u, b_k c_k u),\ u \text{ in } C)\,.$$

È facile controllare che esiste una sola soluzione reale $(\alpha_k, \beta_k, \gamma_k)$ di modulo 1 tale che $\alpha_k \beta_k + \beta_k + \gamma_k (b_k c_k) = 0$.

Sia $T\colon R^3(\xi, \eta, \theta) \to R^3(x, y, t)$ la trasformazione reale definita da

$$\begin{cases} x = \xi + \alpha_k \theta\,, \\ y = \eta + \beta_k \theta\,, \\ t = \theta\,; \end{cases}$$

T muta il sisfema differenziale (2') nel sistema differenziale

$$(2'') \qquad \begin{cases} D_\theta v \qquad\quad = g\,, \\ (D_\xi - b_k D_\eta)v = 0\,, \end{cases}$$

nel cilindro C' generato da A e dalle rette di direzione $(-\alpha_k, -\beta_k, 1)$ passanti per A.

LEMMA 3: *Il sistema differenziale (2'') è risolubile se e solo se C' è D_θ convesso.*

DIMOSTRAZIONE: Con una trasformazione di variabili in R^3 si può supporre che il sistema differenziale (2'') sia del tipo $(D_t u = f,\ (D_x + iD_y)u = 0)$; se quest'ultimo è risolubile in C' lo è pure il sistema differenziale $(D_t u = f$, dove $\Delta = D_x^2 + D_y^2$. Infatti, se $g \in \operatorname{Ker} \Delta/C'$, esiste $u \in C^\infty(C')$ tale che

$$\begin{cases} D_t u \qquad\quad = (D_x - iD_y)g\,, \\ D_x u + iD_y u = 0\,. \end{cases}$$

Vista la $(D_x - iD_y)$-convessità di C', esiste v in $C^\infty(C')$ tale che

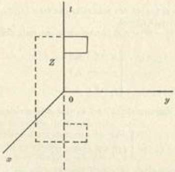
$$u = (D_x - iD_y)v\,, \qquad \text{ovvero} \qquad D_t v = g + h\,,$$

con h in $\operatorname{Ker}(D_x - iD_y)/C'$ (e v in $\operatorname{Ker} \Delta/C'$). Sia v_1 in $C^\infty(C')$ tale che $D_t v_1 = \bar{h}$ ($\bar{h}$ = coniugata di h) e $(D_x + iD_y)v_1 = 0$; risulta

$$\begin{cases} D_t(v - v_1) = g\,, \\ \Delta(v - v_1) \;= 0\,. \end{cases}$$

Dunque: la risolubilità in $C^\infty(C')$ del sistema differenziale (2') implica quella del sistema differenziale ($D_t v = g$, $\Delta v = h$) per ogni dato compatibile (g, h); e (ovviamente) viceversa.

Sia r una retta verticale tale che $r \wedge C'$ non sia connesso (vero se e solo se C' non è D_t-convesso). Brevemente (per non complicare le notazioni), si può supporre che r sia l'asse delle t, che l'origine di R^3 non stia in C' e che C' contenga l'aperto Z del piano $R_{y,t}$ del tipo della figura sottostante.



Se $D_x^2 + D_y^2 + D_t^2)E = \delta$ e se (2') fosse risolubile, esisterebbe u in $C^\infty(C')$ tale da soddisfare il sistema

$$\begin{cases} D_t u \qquad\quad = E\,, \\ (D_x^2 + D_y^2)u = -D_t E\,; \end{cases}$$

e ciò è assurdo; infatti, la restrizione di u sull'aperto Z soddisferebbe l'equazione $D_t u(0, y, t) = k(y^2 + t^2)^{-\frac{1}{2}}$. Fin qui, è dimostrata la condizione necessaria del lemma.

Viceversa: C' sia D_t-connesso; allora il sistema differenziale $((D_x + iD_y)\cdot$ $\cdot u = f$, $D_t u = 0)$ è certamente risolubile in C' (ogni f in $\operatorname{Ker} D_t/C'$ è definita su tutta la proiezione di C' sul piano xy); dunque è risolubile anche il sistema differenziale

$$\begin{cases} (D_x + iD_y)u = f, \\ D_t u \qquad = g, \end{cases}$$

per ogni dato (f, g) in $D_C((D_x + iD_y), D_t)$.

La dimostrazione del Lemma 3 è conclusa.

I due Lemmi 2 e 3 si posson così riassumere:

TEOREMA: *$P = P(D_x, D_y)$ e $Q = Q(D_x, D_y, D_t)$ sian operatori differenziali lineari, a coefficienti costanti, ed omogenei; Q sia ellittico.*

$V(P, Q) = (\zeta \in C^3, P(\zeta) = Q(\zeta) = 0)$. *Il sistema differenziale*

$$\begin{cases} Pu = f, \\ Qu = g, \end{cases}$$

è risolubile nel cilindro retto $C = A \times R$, per ogni dato compatibile (f, g) in $D_C(P, Q)$, se e solo se: ogni retta di direzione ortogonale a qualche punto di $V(P, Q)$ interseca C in un connesso.

OSSERVAZIONE. Nel caso che P sia privo di fattori ellittici, la condizione del teorema di sopra equivale alla P-convessità della base A del cilindro C. È anche interessante osservare che la P-convessità della base A non basta a garantire la risolubilità del sistema differenziale di sopra (caso: P è ellittico); epperò, considerato il sistema differenziale

$$\begin{cases} (D_x + aD_y)u = f, \\ Qu \qquad = 0, \end{cases}$$

con $a = \alpha + i\beta$, con $\beta \neq 0$, al tendere a zero di β, la condizione espressa dal teorema di sopra dà «al limite» la $(D_x + \alpha D_y)$-convessità di A.

BIBLIOGRAFIA

[1] G. BRATTI, *Un'applicazione del teorema del grafico chiuso alla risolubilità dei sistemi del tipo $Pu = f$, $Qu = 0$*, Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università di Padova, Vol. 61, 1979.

[2] G. BRATTI, *Problema di Cauchy semiglobale in due variabili*, Rendiconti del Seminario Matematico di Padova, Vol. 69, 1982.

[3] F. JOHN, *Plane waves and spherical means applied to partial differential equations*, Interscience Publishers, 1955.

[4] L. HORMANDER, *Linear partial differential operators*, Springer-Verlag, 1969.

[5] L. MODICA, *A Range theorem for overdetermined systems with constant coefficients*, Com. on partial differential equations, 5, 1980, 2.

[6] V. P. PALAMODOV, *Linear differential operators with constant coefficients*, Springer-Verlag, 1970.