Rendiconti
Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL
Memorie di Matematica e di Scienze Fisiche e Naturali
100° (1982), Vol. VI, fasc. 17, pagg. 183-196.

GIOVANNI PRODI (*)

Tendenze attuali nell'insegnamento della matematica (**)

1. *In cerca della matematica elementare*

Dire che cosa si debba intendere per matematica elementare non è così semplice come potrebbe apparire a prima vista. Si potrebbe tentare di definire elementare quella parte della matematica che fa tutt'uno con lo sviluppo mentale del bambino e del giovane, o che risponde a talune esigenze pratiche della vita associata. Oppure si potrebbe definire elementare quella parte che è in qualche modo propedeutica a quella che viene ritenuta matematica vera e propria. Ma tutti questi criteri dicono ben poco, e rischiano di risolversi in un circolo vizioso.

Può essere preferibile un criterio storico, o, comunque, fattuale.

Ho trovato significativo il pregevole articolo di E. Bortolotti « Storia della matematica elementare », nella Enciclopedia delle Matematiche Elementari di Berzolari: in questa esposizione la storia della matematica elementare è semplicemente una storia della matematica che si arresta con le prime scoperte del calcolo infinitesimale. Effettivamente, per molto tempo — direi per tutta la durata del secolo scorso — il calcolo infinitesimale e la geometria analitica segnano il distacco della matematica « superiore » da quella elementare. Il professore universitario è pieno di diffidenza per le nozioni « superiori » che l'allievo possa avere appreso negli studi secondari e lo invita a dimenticare; nello stesso tempo, egli fa uso di nozioni « elementari » che vengono presupposte senza discussione, anche se hanno aspetti piuttosto delicati (come le nozioni di poligono, angolo, funzioni circolari, ecc...). Per tutto il secolo scorso domina il criterio della rigida separazione fra i due livelli di studio; ma anche a livello degli studi secondari si creano compartimenti

(*) Istituto di Matematica, Università di Pisa.

(**) Conferenza tenuta il 12 giugno 1981 all'Istituto Matematico G. Castelnuovo dell'Università di Roma in occasione della Consegna della Medaglia d'Oro per la Matematica dell'Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL.

ISSN: 0392-4106 0392-4130

stagni. Leggendo il libro di Lacroix « Essais sur l'enseignement in général et sur celui des mathématiques en particulier » — forse il primo libro che sia stato dedicato alla didattica della matematica: opera non priva di interessanti osservazioni, ma di orizzonte piuttosto limitato — ciò che fa più impressione è questo frazionamento dell'insegnamento della matematica in tanti campi separati: l'algebra, la geometria, la trigonometria che diventano quasi materie diverse. Forse, la causa principale della separazione è la geometria euclidea che, per il suo millenario prestigio, conserva intatti i suoi propri metodi, così che la sua compenetrazione con altri settori è vista come un inquinamento, mentre la geometria analitica è considerata come una disciplina a sé e non come un metodo nello studio della geometria.

Una svolta importante si ha all'inizio di questo secolo con la pubblicazione del libro di F. Klein « Le matematiche elementari da un punto di vista superiore » (1908). Con il libro di Klein, le più importanti nozioni della matematica elementare vengono inquadrate in un ambito molto più generale (ad esempio: la geometria euclidea viene inserita fra le varie possibili geometrie, secondo il « programma di Erlangen »). Nella visione di F. Klein la validità delle nozioni e dei metodi della matematica elementare poteva essere, in qualche modo, comprovata dal fatto che essi rimanessero significativi, anzi generalizzabili, una volta adottato il « punto di vista superiore ». Il progresso era innegabile: il carattere elementare non poteva essere più un pretesto per creare nella matematica dei compartimenti chiusi, sottratti ad un qualsiasi giudizio di valore. A questo mutamento di prospettiva non era certamente estraneo il fatto che pochi anni prima, con Frege, Dedekind, Peano e la sua scuola,... le questioni elementari avevano assunto un rilevante significato fondazionale, mettendo in luce le enormi difficoltà nascoste sotto l'apparenza della banalità.

La corrente di pensiero suscitata da Klein si diffuse molto anche nel nostro paese e determinò un interesse scientifico del tutto nuovo per la didattica della matematica. Basta pensare a F. Enriques con le sue « Questioni riguardanti le matematiche elementari ».

Penso che da allora nessuna corrente abbia avuto tanto influsso sull'insegnamento della matematica quanto quella dei Bourbaki. Nel suo esordio, il Bourbakismo è stato avvertito dal mondo matematico come una corrente violentemente innovatrice; in realtà, oggi vediamo chiaramente che si trattava prevalentemente di un movimento di sistemazione e di riorganizzazione della matematica già nota.

Il Bourbakismo, anzitutto, aspira ad un'esposizione di tutta la matematica in un unico linguaggio duttile e chiaro. Si può dire che questo scopo è stato raggiunto: è un dato di fatto che il linguaggio usato dai matematici di oggi è in larga misura quello proposto dai Bourbaki. Caratteristica del modo di operare di questa scuola è la ricerca di metodi generali: i Bourbaki sembrano disdegnare i procedimenti ingegnosi, ma troppo singolarmente ingegnosi, che non si inquadrino in teorie generali. Ciò può apparire strano se pensiamo che, al momento dell'esordio dei Bourbaki, erano da poco apparsi in logica quei risultati di indecidibilità che riducevano certamente la speranza di applicare uno stesso metodo a vaste classi di problemi aventi un certo livello di complessità.

Il punto centrale dell'esposizione Bourbakista è la nozione di struttura: le strutture matematiche sono la sovrapposizione di alcune strutture elementari (che sono, come è noto, strutture di ordine, strutture algebriche e strutture topologiche). Su questa base, la separazione fra i vari rami della matematica viene a cadere. Si tratta di un fatto di vasta portata: indubbiamente, oggi non vi sarebbe una coscienza così largamente diffusa dell'unitarietà della matematica se non vi fosse stato il Bourbakismo. Inoltre, dal momento che per il Bourbakismo ad ogni livello la matematica non è altro che una combinazione di strutture, cade anche, almeno in in linea di principio, la separazione fra matematica « elementare » e matematica « superiore ». Effettivamente, nell'applicazione concreta della didattica di stampo Bourbakista abbiamo visto verificarsi spesso questo curioso fatto: che le stesse nozioni matematiche fossero presentate — quasi nello stesso modo — ad ogni livello di età, dalla scuola elementare alla Università.

Malgrado i molti sforzi compiuti e il molto entusiasmo suscitato, non si può dire che i risultati raggiunti dalla didattica di orientamento Bourbakista (spesso sotto la sigla di « Matematica moderna ») siano stati eccellenti; anzi, si è determinata una notevole reazione, a cominciare proprio dall'ambiente matematico. Accenniamo brevemente ai possibili motivi di questo insuccesso, avvertendo che il discorso dovrebbe essere assai più lungo e più motivato.

Anzitutto, non è affatto detto che lo stesso criterio di complessità strutturale che vale per una classificazione interna della matematica sia valido anche a livello della psicologia genetica e della didattica. Ad esempio, l'approccio cardinale per la prima introduzione del numero intero e l'impiego di operazioni topologiche per una prima introduzione alla geometria — entrambi suggeriti da un criterio Bourbakistico di semplicità strutturale — si sono rivelati scarsamente produttivi. Si è detto che scopo della educazione matematica è far pervenire l'allievo al possesso delle strutture matematiche: ma si può dubitare, in molti casi, che l'allievo sia in grado di pervenire ad un vero possesso di strutture astratte, così da saper riconoscerle e utilizzarle in situazioni concrete. Sembra che alcuni rinomati specialisti abbiano ripiegato, almeno per gli allievi di più tenera età, su un'acquisizione inconscia e indiretta delle strutture matematiche: ma si rimane perplessi di fronte ad una didattica che, attraverso strane cabale, vuole condizionare questo « inconscio matematico » del bambino.

Oggi siamo ormai decisamente in periodo post-Bourbakista anche nella didattica della matematica. Le acquisizioni teoriche della matematica e della logica di 30-40 anni fa stanno entrando anche nella didattica. Il metodo assiomatico ha sempre il suo posto di onore, ma non pretende di identificarsi con la matematica; molti oggi ritengono che l'aspetto più interessante e profondo del fare matematica sia risolvere problemi: e quando si dice risolvere problemi si insiste sulla novità, sull'imprevisto, piuttosto che sull'applicazione di metodi standard. I rapporti fra la matematica e le scienze sperimentali, la tecnologia, ecc. sono sottolineati non solo per motivazioni di carattere sociale e pratico, ma perché si è già molte volte constatato che essi possono suscitare problemi almeno altrettanto interessanti quanto quelli che scaturiscono dall'interno della matematica. Direi che siamo in un periodo di eclettismo, in cui non ci sono, per la didattica della matematica, idee dominanti, ma si accetta una pluralità di impostazioni e si accentuano gli aspetti euristici, originali. Riguardo a questi atteggiamenti — chiaramente riscontrabili anche nel materiale che è stato presentato al « Quarto congresso internazionale sull'insegnamento della matematica » svoltosi nell'estate scorsa a Berkeley — vorrei citare i nomi di G. Polya e di B. de Finetti, che hanno avuto un ruolo veramente pionieristico, diffondendo queste idee che ora sono ampiamente condivise fra coloro che si occupano di didattica della matematica.

2. *Il gusto per la matematica elementare*

Se non è possibile, come abbiamo visto, circoscrivere chiaramente la matematica elementare, è abbastanza facile descrivere, attraverso qualche caratteristica e qualche esempio, quello che vorrei chiamare gusto per la matematica elementare. Ecco un elenco di punti che mi sembrano interessanti.

a) Orientamento verso le costruzioni mentali più « naturali », nei vari significati del termine: c'è una natura esterna, il cui libro è scritto a caratteri matematici, e c'è una natura interna, che si manifesta nello sviluppo mentale del ragazzo, e che segue spontaneamente i suoi itinerari ottimali. Nella terminologia matematica corrente il termine « interi naturali » sembra particolarmente felice, per indicare appunto questi enti che il bambino non saprebbe comprendere e maneggiare se essi non fossero già presenti nella sua mente a livello pre-matematico (o metamatematico). Al contrario, in una certa pedagogia matematica (alludo a cose che sono state stampate all'insegna della « matematica moderna ») c'è tanto di artificioso e cervellotico, tanto desiderio di mettere la matematica in conflitto con il buonsenso...

b) Gusto per la semplicità della deduzione. Ci sono casi in cui un risultato matematico importantissimo è raggiungibile in poche battute, con dimostrazioni che si possono raccontare andando a spasso. Un esempio classico: il teorema di Euclide che afferma l'esistenza di infiniti numeri primi a partire dal numero $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$. Stranamente, fra i giovani che si iscrivono all'Università pochissimi conoscono questo risultato. Pare impossibile che un insegnante di matematica non senta il desiderio di raccontare ai suoi allievi una cosa così semplice e bella.

La matematica, anche ai livelli più elevati, presenta idee che hanno un massimo di fecondità con un minimo di complicazione. Potrei citare: l'argomento « diagonale » di Cantor (quante volte è stato ripreso e adattato a nuovi problemi!) e, più recentemente, la definizione di Kolmogorov di quantità di informazione di una sequenza binaria (come minima lunghezza di un programma che può calcolarla con un macchina di Turing universale).

c) La valorizzazione dell'intuizione. Su questo punto si fonda principalmente l'efficacia formativa della geometria. Se la geometria si riducesse alla sua struttura deduttiva, sarebbe preferibile — come è stato anche autorevolmente proposto — presentare semplicemente la geometria euclidea come la sovrapposizione di un prodotto scalare ad una struttura vettoriale. Ma in questo quadro sarebbe ben difficile vedere gli enunciati interessanti e trovare le dimostrazioni più opportune.

d) La capacità di scegliere i modelli più semplici. Ogni ricercatore, quando fa congetture e cerca dimostrazioni, lo fa scegliendo un modello, il più semplice possibile. Ma una volta raggiunto il risultato, spesso il modello viene occultato e il risultato viene esposto nella forma più generale possibile; non si comportavano molto diversamente gli algebristi del '500 quando esponevano i loro risultati in forma di enigma. Il gusto per la matematica elementare porta invece a valorizzare il modello e a dare conto dei risultati ottenuti al livello più semplice possibile.

Vi sono esempi di modelli matematici (parlo di modelli matematici... per la matematica) particolarmente felici. Vorrei citarne uno che può rendersi utile dai livelli più elementari dell'apprendimento matematico fino ai livelli più elevati: il reticolo piano $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ dei punti a coordinate intere. A livello elementare lo troviamo realizzato come « geopiano », che mette in evidenza alcune semplici proprietà aritmetiche e geometriche. A livello più elevato, il reticolo $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ fa da supporto per la scoperta di profonde proprietà della geometria dei numeri e della approssimazione dei numeri irrazionali con i razionali. Pensiamo al teorema di Minkowski: ogni regione del piano chiusa, convessa, simmetrica rispetto all'origine, che abbia area ≥ 4 contiene un altro punto del reticolo $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ (cioè un punto diverso dalla origine).

e) La capacità di trovare (quando è possibile!) versioni elementari di teoremi « superiori ». Vediamo un esempio. Un risultato fondamentale (e dimostrabile con mezzi modesti) della topologia è che un segmento non può essere omeomorfo ad un quadrato: si può trovare un'applicazione continua surgettiva del segmento sul quadrato (curva di Peano), ma non un'applicazione iniettiva del quadrato nel segmento. E' possibile dare una versione « discreta » di questo risultato? Supponiamo di avere una città a pianta quadrata, in cui le case siano disposte secondo un reticolo a maglie quadrate. Possiamo dare ad ogni casa un numero telefonico in modo che case contigue (sulla stessa orizzontale o verticale) abbiano numeri telefonici abbastanza vicini (ad esempio: con differenza di non più di 10 numeri)? Non è possibile, e la dimostrazione è molto semplice: se N sono le case di un lato, il numero delle case della città è N^2: i numeri telefonici saranno compresi fra 1 ed N^2. Se prendiamo un percorso minimo che congiunga la casa del n. 1 con quella del n. N^2 passando da una casa ad una contigua, la lunghezza del percorso non supera $2(N-1)$, mentre la distanza fra i numeri è $N^2 - 1$. La distanza media fra i numeri telefonici di due case adiacenti, lungo il percorso, sarà $\dfrac{N^2-1}{2(N-1)} = \dfrac{N+1}{2}$. Quando N cresce, questo numero diventa grande oltre ogni limite.

3. *L'evoluzione della matematica elementare*

E' molto interessante seguire l'influsso che le ricerche più avanzate della matematica producono (dopo un tempo più o meno lungo) sulla matematica elementare. Certi temi della matematica elementare hanno un'evidente importanza, che però sarebbe difficile motivare restando a livello elementare. Manca, in un certo senso, un sufficiente distacco dall'oggetto di studio. Il « punto di vista superiore » permette invece, in molti casi, di vedere le cose in modo più sintetico e più profondo.

Come esempio, vorrei citare la lunga evoluzione della nozione di area.

— In Euclide la nozione di area è fondamentale, ma non è introdotta esplicitamente: il termine « eguali » designa non solo figure isometriche, ma anche figure equiscomponibili fra loro.

— Alla fine del secolo scorso si mettono in evidenza i movimenti rigidi (congruenze) e si elabora una teoria precisa della equiscomponibilità.

— In epoca recente si prende coscienza che l'area è semplicemente una misura invariante per movimenti rigidi.

Il teorema di Haar (1933) sull'esistenza di una misura invariante su un gruppo localmente compatto chiarisce completamente la questione. Direi che finalmente abbiamo capito perché l'area è così importante; nello stesso tempo prendiamo coscienza che anche la didattica deve evolversi: oggi appare del tutto insufficiente una nozione di area che si applichi soltanto a classi di figure molto particolari (poligoni, cerchi).

Le nuove idee suggeriscono poi, anche a livello elementare, scoperte molto interessanti: ad esempio, per dimostrare che l'area è invariante per tutti i movimenti, basta notare che essa è invariante per traslazioni. Infatti, si dimostra facilmente che due rettangoli simmetrici rispetto ad una retta sono equiscomponibili per traslazioni!

Vi sono altri casi in cui lo sviluppo della matematica aumenta quasi il distacco tra il livello elementare e quello « superiore »: questo accade quando nozioni elementari di notevole contenuto intuitivo non sono inquadrabili in teorie deduttive abbastanza accessibili. Questo si verifica particolarmente nel campo della topologia. Ad esempio, il teorema di Jordan sulle curve semplici chiuse del piano ha un enunciato del tutto intuitivo; tuttavia, come si sa, le sue dimostrazioni sono impraticabili per il loro carattere elevato o per la loro complessità. (La situazione è del tutto diversa dall'esempio precedente perché invece si può fare una teoria dell'area del tutto rigorosa e, nello stesso tempo, elementare).

Del resto, neppure la nozione di curva continua è semplice come il significato intuitivo richiederebbe.

Dal punto di vista didattico abbiamo una situazione sconcertante: nozioni matematiche che possono essere presentate, a livello intuitivo, nella scuola media debbono essere messe ai margini, almeno nei loro aspetti deduttivi, a livello della scuola secondaria superiore.

Vi sono dunque problemi didattici non risolti, che potranno forse essere risolti in futuro, con il progredire della ricerca teorica e didattica.

Ma possiamo chiederci: attraverso quali processi una nozione « superiore » diventa elementare? A volte è il progresso stesso della ricerca che porta grandi semplificazioni o che fornisce strumenti di rappresentazione tali da eliminare molte difficoltà. (Vedremo interessanti esempi di ciò). A volte si tratta semplicemente della caduta di barriere e pregiudizi, cosa che può esigere un tempo anche molto lungo: così è stato per il concetto di funzione e per il metodo delle coordinate, che, con la recente riforma, sono entrati nei programmi della scuola media.

L'introduzione nei programmi di nuovi temi divenuti elementari deve essere ovviamente accompagnata dalla eliminazione o dalla riduzione di vecchi temi superati: in generale è proprio il nuovo concetto unificante che rende inutili le lunghe trattazioni precedenti.

Un esempio classico: già nel 1898, in occasione del 1° congresso della « Mathesis » il Pieri domandava l'abolizione della teoria delle proporzioni, a favore della legge della proporzionalità diretta $y = kx$ (che dice tutto in modo molto stringato). Era evidente ormai che la teoria delle proporzioni, costruita dai matematici dell'antichità come un ingegnoso surrogato all'algebra, non aveva più motivo di sussistere ancora nei programmi anzi causava disagio e confusione negli allievi. Sono occorsi ottanta anni per prendere atto di questo!

Ancora: molti sviluppi della trigonometria, già inutili e ingombranti da tempo, sono ora del tutto spiazzati dai piccoli calcolatori. Eppure sono ancora numerosi gli insegnanti che rimangono affezionati ai vecchi amici. Non ci sono solo le « vedove del latino », ma anche le vedove (e i vedovi) del « 3 semplice », delle formule di Briggs e Nepero e del metodo di Tartainville, cose decisamente peggiori del latino.

Vorrei fare, per inciso, un'osservazione: chi si occupa di insegnamento, e conosce perciò gli insegnanti, sa che la resistenza ai mutamenti è molto lieve (a volte anche troppo lieve) a livello della scuola elementare, è piuttosto forte nella scuola media inferiore, è d'acciaio nelle scuole secondarie superiori... Come docente universitario, mi sono spesso sentito in crisi di fronte a questa constatazione.

Ma, lasciando da parte il problema dei « rami secchi », che rischierebbe di destare eccessive polemiche, vorrei invece occuparmi di una questione assai più interessante: quali sono i temi che oggi premono per entrare nell'insegnamento secondario? Non avrei esitazioni a mettere in primo piano:

— l'informatica;

— il calcolo delle probabilità e la statistica.

Per entrambi i temi si tratterà di verificare sia la validità intrinseca sia lo stadio di « elementarizzazione » in cui ora si trovano.

4. *L'introduzione dell'informatica*

Devo premettere che il termine « informatica » non mi piace affatto: esso devia il pensiero verso la raccolta e la diffusione delle informazioni: aspetti importantissimi nella società di oggi, ma che (anche quando non siano collegati con quella massificazione di cui siamo fatti continuamente oggetto) non sono certo preminenti dal punto di vista concettuale.

Preferirei parlare di algoritmi e di calcolatori, e preferirei partire, in queste brevi riflessioni, dall'interno della matematica, anzi addirittura dal problema della esistenza degli enti matematici.

Su questo punto gli allievi più riflessivi si pongono domande che spesso non riescono neppure ad esplicitare: esiste veramente $\sqrt{2}$? Esistono veramente i numeri immaginari? Ecc. Un atteggiamento mentale che si può assumere è quello di fissare certi strumenti e domandarsi se essi permettono di costruire le soluzioni dei problemi che interessano. I geometri greci avevano fissato, come strumenti fondamentali, la riga e il compasso; la secolare fortuna dei problemi di secondo grado sta proprio nell'aver ripreso questa classica e venerata categoria dei greci.

A volte conviene limitare ad arte i mezzi disponibili, perché l'allievo si renda conto del modo con cui da essi dipenda la risposta ai problemi di esistenza. Vi sono al riguardo esercizi veramente intelligenti che utilizzano un piccolo calcolatore tascabile e consistono nel limitare (ad esempio per mezzo di una mascherina) l'uso dei tasti. Si può assegnare al ragazzo questo compito: premendo solo i tasti 3, 5, +, −, rappresentare un qualsiasi numero intero; idem con i tasti 4, 6, +, −. E si possono escogitare tanti altri esercizi analoghi.

Ed ecco la mia tesi: nella scuola secondaria superiore gli algoritmi sono destinati a prendere il posto d'onore tenuto fin qui dai problemi di secondo grado: un modo particolarmente significativo di intendere la soluzione di un problema dovrà essere quello di costruire un algoritmo risolutivo. Il piccolo calcolatore programmabile fornirà lo strumento ottimale per l'esecuzione del calcolo.

Come si può sviluppare un itinerario didattico? Si può partire dalla costruzione delle successioni con procedimento ricorsivo (successioni ricorsive, in sostanza). In questo modo ci si porta al centro stesso dell'aritmetica (che da decenni è ingiustamente scomparsa dalle nostre scuole secondarie superiori). Il postulato di induzione, che è alla base della definizione delle funzioni ricorsive, può essere facilmente utilizzato anche per svolgere semplici dimostrazioni. Comincia così una attività molto interessante che può riguardare lo studio di particolari successioni aritmetiche, della dinamica di popolazioni biologiche, di problemi di meccanica, ecc. I problemi di meccanica possono essere impostati e risolti in forma discreta, senza il passaggio all'equazione differenziale.

La ben nota dimostrazione algoritmica del « teorema degli zeri di una funzione continua » (*) col metodo delle bisezioni apre la strada ad una grande quantità di attività interessanti.

(*) Naturalmente, si ammette che la funzione f sia tale che si possa decidere, per ogni valore x, se è $f(x) > 0$, $f(x) = 0$, $f(x) < 0$.

Per un approfondimento della questione, rinviamo alla monografia: O. Aberth *Computable Analysis* Mc Graw Hill - New York 1980.

Citiamo alcuni esempi di problemi di grado superiore al secondo per cui è facile costruire un algoritmo risolutivo:

a) Tre masse m_A, m, m_C sono disposte nei punti A, B, C allineati. Dimostrare che, nel segmento AB esiste un punto X in cui la forza di attrazione (secondo la legge di Newton) è nulla, e calcolarlo.

b) Problema della riflessione su uno specchio sferico (che fu studiato anche da Leonardo da Vinci). Si può formulare così: dati, internamente ad un cerchio, due punti A, B, determinare sul cerchio i punti R tali che il raggio luminoso che passa per A, dopo essersi riflesso in R passi per B.

Non è qui il caso di soffermarsi su particolari aspetti didattici di questa attività: basterà osservare che essa, con il suo carattere operativo, diminuisce la difficoltà di comprensione di molti concetti. Essa si rivela particolarmente utile verso gli allievi che hanno una mentalità spiccatamente concreta e che comprendono nozioni generali solo quando esse vengano tradotte in una sequenza di operazioni.

Anche l'insegnante ha un sicuro strumento di verifica: ad esempio, un allievo che sia in grado di scrivere il programma per la risoluzione di un'equazione col metodo delle successive bisezioni ha certamente capito il teorema che sta alla base.

Tuttavia il punto di vista costruttivo non basta per una educazione matematica completa. Occorre che l'insegnante coltivi anche il punto di vista complementare, che io chiamerei « Cantoriano ». L'escludere dall'orizzonte matematico tutto ciò che non è costruibile, che non è traducibile in un programma di calcolo, ridurrebbe la matematica ad una spaventosa grettezza. Non si avrebbe nemmeno una comprensione sufficientemente ampia di ciò che è costruibile: per poter studiare le funzioni ricorsive occorre pensarle in un ambiente più ampio, costituito da funzioni che consideriamo esistenti anche se non siamo in grado di descriverle!

Ci sono, anche negli elementi dell'analisi matematica, teoremi tipicamente non costruttivi. Basta considerare, ad esempio, il teorema di Cauchy sulla esistenza del massimo per una funzione continua definita in un intervallo $[a, b]$. Come è noto, esso può essere dimostrato con un metodo apparentemente identico a quello con cui si è dimostrato il teorema degli zeri: si eseguono successive bisezioni scegliendo sempre quell'intervallo in cui l'estremo superiore della funzione è quello stesso di tutto l'intervallo $[a, b]$. La dimostrazione si conclude in modo ovvio, individuando un punto che è compreso in tutti questi intervalli.

Ma vi è una differenza sostanziale rispetto al caso del teorema degli zeri: qui la scelta dell'intervallo non è un'operazione che si possa compiere per via algoritmica! Quindi la dimostrazione non è, in generale, di tipo costruttivo.

Per inciso osserviamo che, mentre nei testi tradizionali il teorema di Rolle viene fatto dipendere dal teorema di Cauchy, esso può benissimo essere dimostrato per altra via in modo costruttivo.

Comunque, ci rendiamo conto che una definizione precisa di ciò che è costruttivo conduce a notevoli sottigliezze, che possono interessare solo gli specialisti: ci basta insistere sul fatto che per un'educazione matematica completa l'atteggiamento costruttivo e quello « Cantoriano » devono essere entrambi presenti.

Per questo motivo sarei molto contrario all'introduzione dell'informatica come materia a sé.

Se così accadesse, si ricadrebbe in quella frammentazione della matematica di cui si parlava all'inizio e che è risultata in passato così dannosa per l'educazione matematica. Naturalmente, ciò non toglie che si debbano fare corsi tecnici di informatica per particolari esigenze, per impadronirsi di particolari strumenti. Ma anche gli strumenti, cioè i calcolatori, devono essere adeguati ad un progetto educativo e devono essere utilizzati razionalmente. In questo campo il rischio è quello dell'eccesso: cioè che l'allievo abbia in mano uno strumento eccessivamente potente di fronte a cui si senta passivo, anzi succube! Nell'immediato futuro, a motivo della innegabile utilità che l'informatica può avere per la vita economica e sociale e a motivo delle pressioni che verranno esercitate da strutture pubbliche e private, c'è da temere che l'impiego dei calcolatori venga fatto in modo massiccio, senza eccessiva cura per i risvolti di carattere educativo (che sono sempre gli ultimi ad essere considerati, dal momento che non provocano reazioni a breve scadenza).

In questo discorso sull'introduzione dell'informatica ci siamo riferiti alla scuola secondaria superiore; il calcolatore può essere usato anche prima, e a vari livelli. E' importante che, ad ogni livello, l'allievo sappia utilizzare in modo pieno e creativo lo strumento di cui dispone. Alla fine della scuola secondaria superiore sarà opportuno che egli apprenda un linguaggio che gli consenta anche l'uso di calcolatori abbastanza potenti; ritengo comunque che l'inserimento delle nozioni fondamentali sul calcolatore all'interno del corso di matematica sia la migliore garanzia perché l'introduzione dell'informatica avvenga in modo valido dal punto di vista culturale ed educativo.

5. *L'introduzione della probabilità e della statistica*

Nel campo della probabilità e della statistica la scuola italiana ha già fatto qualche passo avanti, abbastanza importante. I programmi recentemente entrati in vigore nella scuola media contengono qualche nozione di statistica descrittiva e di probabilità; tutto fa pensare che qualche nozione, almeno a livello germinale, sarà inserita anche nei programmi della scuola elementare, che stanno per essere riformati.

Nel campo della statistica c'è stata anche qualche iniziativa di studi; la S.I.S. (Società Italiana di Statistica) ha organizzato nel settembre del 1979 un convegno sull'insegnamento della statistica. La C.I.I.M. (Commissione Italiana per l'Insegnamento della Matematica) ha dedicato alla statistica una larga parte del convegno annuale del 1980.

Anche per la probabilità e la statistica vorrei sorvolare, in questi rapidi cenni, sulle motivazioni di carattere sociale ed economico, che sono ben note. Vorrei insistere sulle motivazioni « interne », scientifiche e pedagogiche.

Quanto alla probabilità, l'introduzione dei primi elementi a livello della scuola secondaria superiore può essere fatta abbastanza agevolmente. Direi che, in questo campo, il processo di « elementarizzazione » è già arrivato ad un punto soddisfacente. Vorrei sottolineare due aspetti che mi sembrano importanti:

— l'assiomatizzazione di Kolmogorov, che ha indubbiamente portato una notevole chiarezza formale, indipendentemente dai vari possibili significati della probabilità (anzi, a mio parere, permettendo ai vari significati di coesistere...);

— l'introduzione di rappresentazioni efficaci, ed, in particolare, dei grafi. Quella dei grafi può essere considerata a torto una trovata epidermica: in realtà l'esposizione di certi punti delicati del Calcolo delle probabilità (come la probabilità condizionale) si semplifica e si chiarisce moltissimo con l'uso dei grafi. Del resto, basta prendere in mano un vecchio trattato di Calcolo delle probabilità per rendersi conto, per contrasto, dei vantaggi didattici che offrono i grafi.

Un programma di probabilità per le Scuole Secondarie Superiori ad indirizzo scientifico può facilmente spingersi fino allo studio delle variabili aleatorie e al teorema di J. Bernoulli (« legge debole dei grandi numeri »): insomma, può affrontare una tematica concettualmente ricca, arrestandosi al punto in cui gli strumenti di calcolo non potrebbero più essere elementari. Non c'è bisogno di insistere sulla ricchezza didattica del Calcolo delle probabilità; basterà sottolineare che esso è uno strumento importante anche ai fini dello svolgimento di un insegnamento « per problemi »: infatti è difficile trovare altri campi della matematica che offrano un'attività di « matematizzazione » così varia e ricca.

Ben diversa mi sembra la situazione nel campo della statistica: non parlo della statistica descrittiva, che si trova già inserita nel programma della scuola media e che, eventualmente, potrebbe essere ampliata ed approfondita nel primo biennio della scuola secondaria superiore. Mi riferisco alla statistica induttiva, che è la parte veramente succosa della statistica (del resto, anche nella statistica descrittiva, la parte interessante sta nelle considerazioni induttive che, sia pure ancora a livello qualitativo, traspaiono dalle rappresentazioni dei dati).

In questo campo il processo di « elementarizzazione » è soltanto agli inizi. Forse le stesse basi teoriche non sono ancora così chiare e univoche da consentire esposizioni a livello elementare.

D'altra parte, non sembra molto formativo un insegnamento della statistica che si riduca ad un complesso di regole da applicare ciecamente per manipolare i risultati delle esperienze (le « ricette di cucina », come si dice; ma la frase potrebbe risultare offensiva per i cuochi). Tuttavia, in mancanza di meglio, anche questo è ammissibile: non ci si deve meravigliare, data la complessità della ricerca scientifica, se certi strumenti vengono impiegati « a scatola chiusa ». Certamente, se le cose fossero così, il discorso non riguarderebbe la matematica, mentre sono personalmente convinto che la riguardi: anzi, penso che gli elementi di statistica induttiva siano un complemento ed un correttivo essenziale dell'educazione logica, ed abbiano una grandissima validità interdisciplinare. Si tratta di idee esposte in modo intelligente da G. Polya (*), che qui vorrei brevemente richiamare.

(*) G. Polya Mathematics and Plausible Reasoning Princeton Univ. Press - 1954.

Uno dei cardini dell'educazione logica è che, in generale, un'implicazione non si può rovesciare; ogni insegnante deve insistere lungamente su questo punto. Consideriamo la forma tipica di ragionamento in cui interviene l'implicazione: il « modus ponens »:

$A \Rightarrow B$	Ammesso che A implichi B
A	ed ammesso A
$\overline{B}$	allora segue B.

Ad esempio A può significare « c'è fuoco » e B « c'è calore ». Allora, se si ammette l'implicazione « se c'è fuoco, c'è calore », ammesso « c'è fuoco » possiamo dedurre che « c'è calore ». L'implicazione non si può invertire: ammessa B non si può dedurre A; tuttavia, nella vita di tutti i giorni, noi compiamo continuamente inversioni di questo tipo. Ad esempio (per rimanere nella situazione che abbiamo descritto) se sentiamo calore, affermiamo che c'è fuoco o forse (più esattamente) riteniamo assai probabile che ci sia fuoco. Effettivamente, il passaggio logicamente errato diventa corretto se ambientato nel campo della probabilità. La probabilità condizionale diventa la nozione fondamentale in questo tipo di analisi.

Ammettiamo che A sia un'ipotesi e B indichi l'esito di un esperimento, e ammettiamo vera l'implicazione $A \Rightarrow B$ (cioè: il fatto B è una necessaria conseguenza di A). Allora, l'avverarsi di B accresce la probabilità che inizialmente potevamo avere attribuito ad A. Precisamente: se $P(B) < 1$ allora $P(A/B) > P(A)$. Questo è il primo passo, ancora a livello qualitativo. La formula di Bayes permette di passare a considerazioni quantitative e di procedere oltre.

Tuttavia, ci sono ancora molte difficoltà per una trattazione che, partendo da queste basi e mantenendosi ad un livello elementare, raggiunga risultati significativi, anche in vista delle applicazioni alle scienze sperimentali. Forse occorre che qualche specialista si metta all'opera con pazienza e tenti la stesura di un testo adatto per gli allievi delle scuole secondarie superiori.

Nel campo dell'insegnamento della statistica siamo ancora in uno stadio molto problematico. Dobbiamo prendere atto che anche la didattica ha i suoi problemi interni, oltre a quelli inerenti ai cambiamenti di mentalità, alla preparazione degli insegnanti e alle circostanze in cui l'insegnamento si svolge.

6. *Conclusioni*

Abbiamo parlato dell'insegnamento della matematica e formulato proposte prescindendo completamente dall'attuale situazione della scuola italiana: preoccupazione metodologica necessaria perché un riferimento troppo stretto alla situazione attuale (almeno sotto il profilo socio-politico) toglierebbe slancio ad ogni progetto. Per inciso: anche il progetto di riforma della scuola secondaria superiore che, al termine della passata legislatura, fu approvato da un solo ramo del Parlamento sarebbe stato — per varie ragioni che qui non si possono esaminare — del tutto negativo riguardo all'insegnamento scientifico e, in particolare, all'insegnamento della matematica.

Tuttavia, dopo quanto detto, vi è almeno un punto su cui prendere posizione: la preparazione degli insegnanti. Infatti, a nulla varrebbe predisporre programmi eccellenti se non ci fossero insegnanti capaci di attuarli. Il problema è difficile: per tentare una soluzione vorrei proporre una nuova aggregazione fra le materie da insegnare. Premetto una considerazione: penso che, nel settore scientifico, la demarcazione più profonda sia fra le materie teoriche e quelle sperimentali. Queste ultime devono essere coltivate mediante una assidua pratica di laboratorio: alla lunga, fra la mentalità teorica e quella sperimentale la divaricazione è molto forte. La mia proposta è allora che l'insegnante di matematica assuma anche gli elementi di informatica, probabilità e statistica e lasci la fisica sperimentale (impegnandosi però a fornire agli allievi gli strumenti matematici per questo corso). Questa soluzione è passibile di molte e fondate obiezioni, ma non ne vedo di migliori. Soprattutto vedrei come negativa l'introduzione di tante nuove materie separate, che renderebbero frammentario e poco formativo l'insegnamento scientifico.

Vorrei concludere con un auspicio: che l'attesa riforma delle scuole secondarie superiori consista soltanto in una legge-quadro, che consenta un continuo lavoro di sperimentazione con estesi margini di libertà. I risultati di molte scuole sperimentali sono decisamente positivi anche nel campo scientifico e attendono di essere consolidati e generalizzati. D'altra parte, l'insegnamento scientifico, per progredire, ha bisogno di una continua ricerca e sperimentazione.