Rendiconti
Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL
Memorie di Matematica
103° (1985), Vol. IX, fasc. 5, pagg. 53-60

FRANCO PARODI (*)

Su un universo di dispositivi risolubili e monotoni massimali (**)

A Universe of Solvable and Monotone Devices

SUMMARY. — By means of a global implicit function theorem [3] for weakly contractive maps, we construct a « Universe » [1] of solvable and monotone devices. This universe contain mixed networks of linear passive and non linear strongly monotone devices.

INTRODUZIONE

La nozione di « Universo di Dispositivi » è stata introdotta in [1] da G. Darbo che nello stesso lavoro ha realizzato e studiato gli « Universi di dispositivi lineari ».

Lo studio degli « Universi non lineari » è stato da me avviato in [2] realizzando « L'Universo totale » dei dispositivi su uno spazio vettoriale X da intendersi come spazio dei funzionamenti; si sono studiati, quali esempi notevoli, alcuni sottouniversi dell'Universo totale.

Fissato R come spazio dei funzionamenti, il sottouniverso dell'Universo totale su R costituito dagli insiemi monotoni è certamente interessante dal punto di vista della fisica realizzabilità, l'ulteriore condizione di massimalità di tali insiemi monotoni, e quindi di risolubilità dei dispositivi che hanno questi insiemi di funzionamenti, non individua però un sottouniverso dell'Universo totale.

Nel presente lavoro, facendo uso di un recente risultato di esplicitazione in grande di G. Darbo [3] relativo a mappe debolmente contrattive, si realizza un sottouniverso dell'Universo totale su R, costituito da dispositivi monotoni

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico della Facoltà di Ingegneria, P.le Kennedy, 16129 Genova.

(**) Memoria presentata il 28 giugno 1984 da Giuseppe Scorza Dragoni, uno dei XL.

ISSN-0392-4106

massimali, quindi risolubili, e che include l'universo dei dispositivi lineari passivi.

Il lavoro non si propone di fornire risultati di immediata applicazione, ma di mettere a punto in un caso particolarmente semplice ma non banale, un procedimento di costruzione di universi di dispositivi risolubili che contengano tutti i dispositivi lineari passivi e quei dispositivi non lineari monotoni massimali le cui mappe di scattering siano debolmente contrattive; questa ultima proprietà consente di prendere in considerazione significativi dispositivi non lineari.

Si intravede la possibilità di una analoga costruzione nel caso in cui i funzionamenti siano funzioni del tempo, qualora il risultato di esplicitazione sopra citato fosse opportunamente esteso a spazi di funzioni.

1. - Dispositivi strettamente monotoni

Consideriamo l'Universo totale su R [2], un suo sottouniverso fisicamente significativo è l'universo dei dispositivi lineari passivi massimali [1], ci proponiamo di ampliare questo, ottenendo un sottouniverso dell'Universo totale costituito da dispositivi monotoni massimali (anche non lineari) quindi risolubili.

Consideriamo a tale scopo i dispositivi in cui insiemi di funzionamenti sono insiemi strettamente monotoni, cioè tali che:

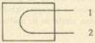
$$\langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle > 0 \ (^1)$$

per ogni coppia di elementi distinti (x_1, y_1), (x_2, y_2), e che siano inoltre massimali; li diremo brevemente dispositivi strettamente monotoni massimali.

Essi non costituiscono un sottouniverso dell'Universo totale, poichè non sono di questo tipo tutti i dispositivi dell'Universo minimo che sono invece lineari e conservativi, cioè tali che:

$$\langle x, y \rangle = 0 \text{ per ogni loro funzionamento } (x, y) .$$

Ad esempio, il « conduttore perfetto »



(¹) Se $x, y \in R^n$, $\langle x, y \rangle$ denota il prodotto scalare.

è individuato dalle equazioni (x tensioni, y correnti)

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \,, \\ y_1 + y_2 = 0 \,, \end{cases}$$

e risulta $\langle x, y \rangle = x_1(y_1 + y_2) = 0$.

I dispositivi strettamente monotoni costituiscono però una classe di dispositivi ovviamente chiusa rispetto all'operazione di somma diretta (prodotto diretto degli insiemi di funzionamenti).

2. - Costruzione dell'universo di dispositivi U

Siano nell'Universo totale:

$\mathfrak{L}$ la famiglia dei dispositivi lineari passivi massimali,

$\mathcal{M}$ la famiglia dei dispositivi strettamente monotoni massimali.

Consideriamo nell'Universo totale la classe di tutti i dispositivi della forma:

$$L + M \quad \text{con } L \in \mathfrak{L} \text{ ed } M \in \mathcal{M} \,,$$

tale classe è chiusa ovviamente rispetto alla somma diretta, allora l'Universo U generato da questa famiglia di dispositivi sarà ovviamente [1], [4], [5] il seguente: per ogni $n \in \mathrm{N}$, l'insieme dei dispositivi di U ad n terminali sarà:

$$U_n = \{\theta_*(L + M) | L \in \mathfrak{L}_p \text{ (}^2\text{)}, \; M \in \mathcal{M}_q \text{ (}^2\text{)}, \; \theta : p + q \to n \text{ trasduttore}\} \,.$$

L'universo U ora considerato è un sottouniverso dell'Universo totale ed è inoltre un sottouniverso dell'universo dei dispositivi monotoni [2].

È opportuno per il seguito osservare che ogni dispositivo A dell'Universo U ad n terminali quindi della forma:

$$A = \theta_*(L + M) \quad \text{con } L \in \mathfrak{L}_p, \; M \in \mathcal{M}_q, \; \theta : p + q \to n \text{ trasduttore}$$

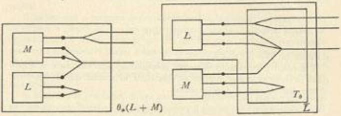
può essere presentato nella forma più semplice

$$A = \iota_*(\overline{L} + M)$$

dove $\overline{L}$ è un opportuno dispositivo lineare passivo massimale avente gli stessi terminali di M ed inoltre gli n terminali di arrivo, cioè $\overline{L} \in \mathfrak{L}_{n+q}$, ed ι è il trasduttore che realizza la cortocircuitazione delle coppie di terminali omonimi di $\overline{L}$ e di M e poi la soppressione.

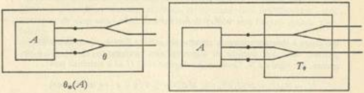
(2) L'indice in basso denota il numero di terminali, o indifferentemente il tratto iniziale di $\mathbf{N}$ di egual cardinalità.

Ad esempio:



Si noti infatti che in generale ad ogni trasduttore $\theta: \alpha \to \beta$ è associato canonicamente un dispositivo T_θ, con terminali $\alpha + \beta$, dell'universo minimo, quindi nel nostro caso lineare conservativo massimale, e che per ogni dispositivo A sui terminali α, $\theta_*(A)$ è il dispositivo che si ottiene cortocircuitando i terminali omonimi di T_θ ed A, e sopprimendoli successivamente.

Un esempio è illustrato nella figura:



3. - Massimalità e risolubilità dei dispositivi di U

Vogliamo ora provare che ogni dispositivo A dell'Universo U è monotono massimale e quindi risolubile.

Posto A nella forma $A = \iota_*(\bar{L} + M)$, con le notazioni del paragrafo precedente, mostreremo che $\iota_*(\bar{L} + M)$ è un dispositivo monotono massimale.

Poichè $\bar{L} \subset R^{\alpha+\beta} \times R^{\alpha+\beta}$ è passivo massimale, risulta allora risolubile [6], cioè la trasformazione:

$$x = u + v, \qquad y = u - v$$

lo muta nel grafico

$$y = Su$$

di un morfismo lineare

$$S: R^{\alpha+\beta} \to R^{\alpha+\beta},$$

detto morfismo di scattering, non espansivo cioè tale che $|Su| < |u|$ per ogni $u \in R^{\alpha+\beta}$, (quindi S è una matrice subunitaria).

I funzionamenti di Σ risultano quindi descritti dalle equazioni:

$$\left|\begin{array}{l} x = u + u\,, \\ y = u - u\,, \end{array}\right.$$

e volendo distinguere i funzionamenti relativi ai terminali destinati al collegamento con M

$$\left|\begin{array}{l} x_1 = u_1 + S_1(u_1, u_2)\,, \\ x_2 = u_2 + S_2(u_1, u_2)\,, \\ y_1 = u_1 - S_1(u_1, u_2)\,, \\ y_2 = u_2 - S_2(u_1, u_2)\,, \end{array}\right.$$

dove $x_1, y_1, u_1 \in \mathbf{R}^n$, $x_2, y_2, u_2 \in \mathbf{R}^q$.

Inoltre $M \subset \mathbf{R}^q \times \mathbf{R}^q$ è strettamente monotono massimale, pertanto la medesima trasformazione lo muta nel grafico $V = G(u)$ di una mappa $G\colon \mathbf{R}^q \to \mathbf{R}^q$, detta mappa di scattering, (non lineare in generale) debolmente contrattiva cioè tale che

$$|G(u) - G(u')| < |u - u'| \qquad \text{se } u \neq u'\,.$$

I funzionamenti di M sono allora descritti dalle equazioni

$$\left|\begin{array}{l} x = u + G(u)\,, \\ y = u - G(u)\,. \end{array}\right.$$

Si ottiene il dispositivo $\iota_*(\Sigma + M)$ ponendo nelle equazioni di $\Sigma + M$

$$\left|\begin{array}{l} x_1 = u_1 + S_1(u_1, u_2)\,, \\ x_2 = u_2 + S_2(u_1, u_2)\,, \\ x = u + G(u)\,, \\ y_1 = u_1 - S_1(u_1, u_2)\,, \\ y_2 = u_2 - S_2(u_1, u_2)\,, \\ y = u - G(u)\,, \end{array}\right.$$

$x_2 = x$ e $y_2 + y = 0$ ed eliminando le variabili x_2, x, y_2, y, u_2, u dalle equazioni.

Dalle equazioni:

$$x_2 = x \qquad \text{equivalente a} \qquad u_2 + S_2(u_1, u_2) = u + G(u)\,,$$

$$y_2 + y = 0 \qquad \text{equivalente a} \qquad u_2 - S_2(u_1, u_2) = -u + G(u)\,,$$

si ricava:

$$u = S_2(u_1, u_2) \quad \text{e} \quad u_2 = G(u)$$

e da queste ultime:

$$u_2 = G(S_2(u_1, u_2))\,.$$

Il teorema di esplicitazione in grande di G. Darbo [3] assicura che dalla equazione

$$u_2 = G(S_2(u_1, u_2))$$

soddisfatta dal punto $(u_1, u_2) = (0, 0)$ (8), si esplicita una funzione continua definita su tutto R^n

$$u_2(u_1)\colon R^n \to R^q$$

a condizione che la funzione $G(S_2(u_1, u_2))$ sia debolmente contrattiva come risulta facile provare, poiché G è debolmente contrattiva ed S_2 è lineare non espansiva essendo componente di S non espansiva.

Siano infatti $w, \bar{w} \in R^{n+q}$ con $w \neq \bar{w}$ allora

$$|G(S(w)) - G(S(\bar{w}))| < |S(w) - S(\bar{w})| < |w - \bar{w}| \qquad \text{se } S(w) \neq S(\bar{w})$$

e quindi la diseguaglianza è stretta, se invece $S(w) = S(\bar{w})$ allora banalmente

$$|G(S(w)) - G(S(\bar{w}))| = 0 < |w - \bar{w}|\,.$$

Sostituendo allora nelle equazioni di $\overline{L} + M$ $u_2 = u_2(u_1)$ ed eliminando x_2, y_2, x, y, u si ha:

$$\left|\begin{array}{l} x_1 = u_1 + S_1(u_1, u_2(u_1)) = u_1 + F(u_1)\,, \\ y_1 = u_1 - S_1(u_1, u_2(u_1)) = u_1 - F(u_1)\,, \end{array}\right.$$

dove si è posto $F\colon R^n \to R^n$, la funzione $F(u_1) = S(u_1, u_2(u_1))$.

Questa è allora la rappresentazione del dispositivo $A = \iota_*(\overline{L} + M)$ che risulta certamente monotono, come già osservato, e massimale poiché la sua mappa di scattering F è definita su tutto R^n; il dispositivo A è risolubile ed è rappresentato nelle variabili (u_1, v_1) dall'equazione: $v_1 = F(u_1)$.

Si è così provato che l'Universo U, generato nell'Universo totale dai dispositivi lineari passivi massimali e dai dispositivi strettamente monotoni massimali, è un universo di dispositivi monotoni risolubili e quindi massimali.

L'universo U è interessante perchè contiene tutti i dispositivi lineari passivi massimali e molti (non tutti) dispositivi non lineari monotoni massimali, proprietà quest'ultima di tutti i dispositivi fisicamente realizzabili.

(8) Ogni dispositivo dell'Universo totale ha il funzionamento (0, 0).

4. - Cambiamenti di scala

I « cambiamenti di scala » sullo spazio delle tensioni e sullo spazio delle correnti, rappresentati da trasformazioni del tipo

$$X = ax\,, \quad Y = by \qquad \text{con } a,\, b \text{ reali positivi}\,,$$

devono indurre su un universo, che abbia significato fisico, un automorfismo dell'universo, perchè è ovvio che è fisicamente indifferente prima cambiare riferimento (unità di misura) per tensioni e correnti e poi eseguire su una rete operazioni che la trasformino, oppure prima trasformarla con le medesime operazioni e poi cambiare nello stesso modo riferimento per tensioni e correnti.

È facile mostrare, direttamente dalla caratterizzazione delle operazioni nell'Universo totale su R [2], che i cambiamenti di scala inducono effettivamente un automorfismo nell'Universo totale.

Tale automorfismo subordina un automorfismo sull'universo U ora costruito, infatti è immediato osservare che « cambiamenti di scala » mutano i dispositivi della forma $L + M$, generatori di U, in dispositivi della stessa forma, poichè è ovvio che il cambiamento di scala muta un dispositivo lineare passivo massimale in uno ancora lineare passivo massimale, e muta altresì un dispositivo strettamente monotono massimale in uno ancora strettamente monotono massimale.

Bibliografia

[1] G. Darbo, *Aspetti algebrico categoriali della teoria dei dispositivi*, Symposia Mathematica, 4 (1970).

[2] F. Parodi, *Costruzione di un universo di dispositivi non lineari su una coppia di gruppi abeliani*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 58 (1977).

[3] G. Darbo, *Un teorema di esplicitazione in grande*, Rend. Acc. Naz. Scienze Mem. di Mat., 5 (1981-82).

[4] F. Parodi, *Categoria degli universi di dispositivi e categoria delle T-algebre*.

[5] F. Parodi, *Alcune proprietà della categoria delle T-algebre*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 62 (1980).

[6] Darbo - Maia, *Costruzione di alcuni universi lineari risolubili*, Pubbl. dell'I.M.A., Genova, Ser. Pura, N. 137 (1983).