Rendiconti
Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL
Memorie di Matematica
103° (1985), Vol. IX, fasc. 12, pagg. 261-274

FRANCO PARODI (*)

Un universo di dispositivi risolubili a tempo discreto (**)

Some Universe of Discrete Time Devices

SUMMARY. — In this work we realize some universe [1] of dicrete time devices. First of all a universe of linear passive solvable devices is presented then it is extended to a universe of non linear solvable devices. The universe realized in [4] can be identified with the subuniverse of stationary devices of the one presented here.

INTRODUZIONE

In questo lavoro si costruiscono alcuni universi di dispositivi [1], [2] i cui funzionamenti sono funzioni reali a tempo discreto, ovvero successioni reali.

Si considera prima l'universo dei dispositivi lineari [1] risolubili, passivi rispetto ad una famiglia di «prodotti scalari» assegnata nello spazio delle successioni reali X, spazio dei funzionamenti.

Sfruttando un teorema di feedback in X, che è conseguenza immediata del teorema di esplicitazione in grande in R di G. Darbo [3], si costruisce un universo di dispositivi, a funzionamenti in X, anche non lineari tutti risolubili; tale universo estende quello dei dispositivi lineari prima considerato ed estende anche l'universo di dispositivi non lineari a funzionamenti in R realizzato in [4], contiene pertanto molti dispositivi non lineari fisicamente significativi.

L'universo così ottenuto si presta alle applicazioni, contenendo i modelli discreti o discretizzati anche non lineari di dispositivi con funzionamenti funzioni reali del tempo, e reti qualsivoglia di questi dispositivi, tali reti si prestano ad essere simulate su calcolatore.

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico della Facoltà di Ingegneria, P.le Kennedy, 16129 Genova.

(**) Memoria presentata il 19 ottobre 1984 da Giuseppe Scorza Dragoni, uno dei XL.

ISSN-0392-4106

0. - Dispositivi risolubili e sistemi

Consideriamo universi [1] i cui dispositivi vengono caratterizzati dall'insieme di funzionamenti ammissibili che risulta un sottoinsieme $\mathcal{A}$ di $X^n \times X^n$ che contenga $(0, 0)$, essendo X un conveniente spazio vettoriale, spazio dei funzionamenti o dei segnali, n il numero dei terminali.

Se $(x, y) \in \mathcal{A}$ allora x e y si diranno rispettivamente vettore « tensione » e vettore « corrente » (vettori colonna).

Le operazioni di composizione in rete per dispositivi di questi universi sono quelle naturali dell'interpretazione elettrica.

Non sempre $\mathcal{A}$ è grafico di una mappa $\mathcal{A}: X^n \to X^n$, tuttavia la trasformazione:

$$\begin{cases} x = u + v \\ y = u - v \end{cases} \qquad X^n \times X^n \to X^n \times X^n ,$$

trasforma nei casi fisicamente significativi, $\mathcal{A}$ nel grafico di una mappa $S: X^n \to X^n$ con $S(0) = 0$ e la relazione: $V = S(u)$ caratterizza nelle nuove variabili (u, v) il dispositivo.

Definizione 0.1: Un dispositivo $\mathcal{A} \subset X^n \times X^n$ si dirà risolubile se esiste una mappa $S: X^n \to X^n$ tale che $\mathcal{A}$ è descritto dalle coppie (x, y)

$$\begin{cases} x = u + S(u) \\ y = u - S(u) \end{cases} \qquad u \in X^n .$$

La mappa S, individuata da $\mathcal{A}$ si dice mappa di scattering di $\mathcal{A}$.

Un Universo si dirà risolubile se tali sono tutti i suoi dispositivi.

La risolubilità non è una proprietà universale, perchè la composizione in rete di dispositivi risolubili può non essere risolubile, sono noti esempi di tale situazione [4].

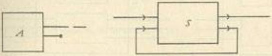
Poichè sembra che la risolubilità sia una condizione indispensabile affinchè un dispositivo sia « fisicamente significativo ci proponiamo di costruire universi risolubili ».

La mappa di scattering S associata al dispositivo risolubile $\mathcal{A}$ consente di associare al dispositivo $\mathcal{A}$ un sistema ad n entrate u, n uscite v la cui funzione di trasformazione entrate-uscite sia S medesima.

Così ad un universo di dispositivi risolubili si associa un universo di sistemi (tante entrate quante uscite), e certe operazioni nell'universo di dispositivi hanno naturale interpretazione nell'universo dei sistemi associato.

a) Soppressione di un terminale - Feedback.

Nella soppressione del termine i-esimo di $\mathcal{A}$ intervengono i funzionamenti $(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathcal{A}$ con x_i arbitrario $y_i = 0$; allora sul sistema associato si ha $u_i - v_i = 0$ quindi $u_i = v_i$ e cioè il feedback ad anello chiuso sull'i-esima uscita i-esima entrata.



b) *Cortocircuitazione di due terminali - Feedback incrociato.*

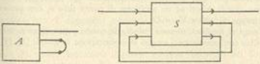
Nella cortocircuitazione della coppia di terminali i, j di A, intervengono tutti i funzionamenti $(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_n) \in A$ tali che:

$$x_i = x_j \quad \text{e} \quad y_i + y_j = 0 .$$

Si ha allora nelle variabili u, v

$$\left| \begin{array}{l} u_i + v_i - u_j - v_j = 0 \\ u_i - v_i + u_j - v_j = 0 \end{array} \right. \quad \text{cioè} \quad \left| \begin{array}{l} u_i = v_j \\ u_j = v_i , \end{array} \right.$$

quindi sul sistema associato si hanno i due feedback ad anello chiuso fra la i-esima uscita e la j-esima entrata e fra la j-esima uscita e la i-esima entrata



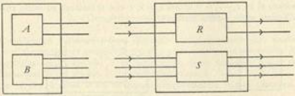
c) *Somma diretta.*

Dati A e B dispositivi risolubili siano S, R le rispettive mappe di scattering.

La somma diretta $A + B$ è il dispositivo che ha funzionamenti $(x, x'; y, y')$ con $(x, y) \in A$, $(x', y') \in B$, la sua mappa di scattering è ovviamente

$$\left| \begin{array}{l} v = S(u) , \\ v' = R(u') , \end{array} \right.$$

cioè la somma diretta $R + S$.

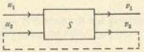


Così nell'universo di sistemi associato ad un universo di dispositivi risolubili sarà sempre possibile il feedback e viceversa la possibilità di realizzare qualunque feedback su un universo di sistemi darà la possibilità di costruire universi di dispositivi.

Si è pertanto interessati a « teoremi di feedback » per sistemi del tipo $v = S(u)$, $S\colon X^n \to X^n$.

Se $v = (v_1, v_2)$, $u = (u_1, u_2)$ con $v_1, u_1 \in X^p$, $v_2, u_2 \in X^q$, $p + q = n$, essendo v_2, u_2 le entrate-uscite destinate ad feedback, il sistema sarà descritto così:

$$\left| \begin{array}{l} v_1 = S_1(u_1, u_2)\,, \\ v_2 = S_2(u_1, u_2)\,, \end{array} \right.$$



il feedback sarà ammissibile se è possibile dal sistema precedente, con l'equazione aggiunta $u_2 = v_2$, eliminare u_2, v_2 ottenendo un sistema dello stesso tipo e ciò si ha se per ogni u_1 esiste unico u_2 tale che $u_2 = S_2(u_1, u_2)$.

Siamo quindi ridotti ad un problema di punto fisso u_2 con parametro u_1 per la mappa $S_2\colon X^p \times X^q \to X^q$.

Teoremi di feedback saranno quindi, da questo punto di vista, teoremi di punto fisso con parametro o meglio di esplicitazione in grande [3], [5].

1. - L'universo dei dispositivi monotoni a tempo discreto

Sia X lo spazio delle successioni reali, noteremo $x \in X$, $x = (x_i)$; nella interpretazione di x come segnale discreto la variabile i sarà interpretata come variabile temporale.

Si consideri l'universo totale su X [2], dispositivi di questo universo ad n terminali sono tutti i sottoinsiemi di $X^n \times X^n$ che contengono $(0, 0)$, un suo sottouniverso è l'universo dei dispositivi lineari su X, intendiamo individuare qualche altro sottouniverso di questo, lineare o non lineare, significativo dal punto di vista della realizzazione fisica, a tale scopo premettiamo alcune considerazioni.

Consideriamo in X^n, fissato $p \in \mathrm{N}$, il «prodotto scalare»:

$$\langle x, y \rangle_p = \sum_{i=1}^{p} \langle x_i, y_i \rangle \ (*)$$

a cui è associata ovviamente la seminorma in X^n

$$|x|_p = \left(\sum_{i=1}^{p} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

DEFINIZIONE 1.1: Un insieme $A \subset X^n \times X^n$ si dice p-monotono se

$$\langle \Delta x, \Delta y \rangle_p \geq 0 ,$$

cioè se per ogni (x, y), $(x', y') \in A$

$$\langle x - x', y - y' \rangle_p \geq 0 .$$

Si dice che A è monotono se A è p-monotono per ogni $p \in \mathrm{N}$.

La nozione di monotonia ha la ovvia interpretazione seguente: se si interpreta i come variabile temporale, x tensione, y corrente, $\sum_{i=1}^{p} \langle x_i, y_i \rangle$ rappresenta nel caso elettrico l'energia dissipata dall'istante iniziale fino all'istante p nel funzionamento (x, y); si richiede quindi che ad ogni istante l'energia complessivamente dissipata da ogni funzionamento di A sia positiva o nulla.

TEOREMA 1.1: I dispositivi p-monotoni costituiscono un sottouniverso dell'universo totale, ed anche i dispositivi monotoni.

DIM.: Si verifica facilmente il primo asserto; l'universo dei dispositivi monotoni risulta intersezione di tutti gli universi dei dispositivi p-monotoni.

PROPOSIZIONE 1.1: Se A è un dispositivo monotono, risultano tutti i suoi funzionamenti (x, y) descritti dalle equazioni:

$$\left| \begin{array}{l} x = u + R(u) , \\ y = u - R(u) , \end{array} \right.$$

con $R: U \to X^n$, $U \subset X^n$.

(*) $\langle \, , \rangle$ denota il prodotto scalare in R^n, $x_i, y_i \in \mathrm{R}^n$; identifichiamo d'ora innanzi X^n con lo spazio delle successioni a valori in R^n.

La mappa $v = R(u)$ è non anticipativa nel senso che risulta componente per componente:

$$
\begin{aligned}
&v_1 = R_1(u_1)\,,\\
&v_2 = R_2(u_1, u_2)\,,\\
&v_3 = R_3(u_1, u_2\, u_3)\,,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&v_i = R_i(u_1, u_2, \dots, u_i)\,.\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

Inoltre R è non espansiva rispetto a ciascuna seminorma $|-|_p$.

Dim.: Eseguita la trasformazione

$$
\left|\begin{array}{l} x = u + v \\ y = u - v \end{array}\right. \qquad X^N \to X^N\,,
$$

si ha per ogni $p \in \mathrm{N}$

$$0 < \langle \Delta x, \Delta y\rangle_p = \langle \Delta u + \Delta v, \Delta u - \Delta v\rangle_p = |\Delta u|_p^2 - |\Delta v|_p^2$$

quindi per ogni p $|\Delta v|_p < |\Delta u|_p$.

Allora se (u, v), $(\bar{u}, \bar{v})$ appartengono al trasformato di A e $u = \bar{u}$ si ha

$$|v - \bar{v}|_p < |u - \bar{u}|_p = 0 \text{ per ogni } p$$

da cui $v = \bar{v}$.

Allora u individua univocamente v, sia $v = R(u)$; anzi per ogni p le prime p componenti di u individuano univocamente le prime p componenti di v quindi R è non anticipativa.

La non espansività di R rispetto a ciascuna seminorma $|-|_p$ è pure dimostrata.

Allora un dispositivo monotono A è risolubile se il dominio di R è tutto quanto X^N.

Vogliamo individuare alcuni sottouniversi [1], significativi dell'universo dei dispositivi monotoni, è noto dal caso stazionario [4] che i dispositivi monotoni risolubili non costituiscono un sottouniverso.

2. - L'universo dei dispositivi lineari passivi risolubili su X

Ci limitiamo per il momento al caso lineare; per un sottospazio A di $X^N \times X^N$ la monotonia è ovviamente equivalente alla proprietà seguente, che diremo passività: per ogni $(x, y) \in A$ $\langle x, y\rangle_p > 0$ per ogni $p \in \mathrm{N}$.

Sia A un dispositivo lineare passivo risolubile di $X^n \times X^n$ la mappa R di cui alla Proposizione 1.1 risulta in tal caso un morfismo lineare definito in X^n, la linearità e non anticipatività di R ne consentono la seguente descrizione:

$$v_1 = A_{11} u_1 ,$$
$$v_2 = A_{21} u_1 + A_{22} u_2 ,$$
$$v_3 = A_{31} u_1 + A_{32} u_2 + A_{33} u_3 ,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$v_i = \sum_{k=1}^{i} A_{ik} u_k ,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

con $v_i, u_i \in \mathrm{R}^n$, $A_{i,k} \in \mathcal{M}_n(\mathrm{R})$.

PROPOSIZIONE 2.1: La matrice M (infinita), subdiagonale a blocchi, che descrive R:

$$M = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 & 0 & \\ A_{21} & A_{22} & 0 & \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

è subunitaria nel senso che ogni sua riga o colonna ha seminorma $|-|_p$ minore o uguale ad 1, per ogni p.

DIM.: Poichè R è non espansiva rispetto ad ogni seminorma $|-|_p$, tutte le sottomatrici di M costituite dalle prime $n \times p$ righe e colonne sono subunitarie, da ciò segue la tesi.

TEOREMA 2.1: I dispositivi lineari passivi risolubili costituiscono un sottouniverso dell'universo dei dispositivi lineari passivi su X.

DIM.: È sufficiente provare [1] che la classe dei dispositivi lineari passivi risolubili:

1) contiene la connessione ternaria,

2) è chiusa rispetto alla somma diretta,

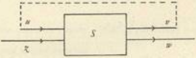
3) è chiusa rispetto alla soppressione di un terminale,

4) è chiusa rispetto alla cortocircuitazione di due terminali.

Le prime due verifiche sono immediate.

Verifichiamo che sopprimendo un terminale di un dispositivo lineare passivo risolubile si ottiene ancora un dispositivo risolubile, essendo ovvio che è lineare passivo poichè i dispositivi lineari passivi costituiscono un universo.

Dato il dispositivo $\mathcal{A}$ con n terminali, lineare passivo risolubile, sia S il suo morfismo di scattering, sappiamo che la soppressione del primo terminale equivale al feedback ad anello chiuso sulla prima uscita-entrata del sistema associato S, mostriamo che tale feedback è ammissibile.



Rappresentiamo il morfismo S nel modo seguente

$$
\begin{aligned}
v_1 &= a_{11}u_1 + B_{11}z_1 , \\
w_1 &= c_{11}u_1 + D_{11}z_1 , \\
v_2 &= a_{21}u_1 + B_{21}z_1 + a_{22}u_2 + B_{22}z_2 , \\
w_2 &= c_{21}u_1 + D_{21}z_1 + c_{22}u_2 + D_{22}z_2 , \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
v_i &= \sum_{j=1}^{i} a_{ij}u_j + B_{ij}z_j , \\
w_i &= \sum_{j=1}^{i} c_{ij}u_j + D_{ij}z_j , \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

$$
u_i \in \mathbf{R} , \quad z_i \in \mathbf{R}^{n-1} ; \qquad a_{ij}, c_{ij} \in \mathbf{R} , \quad B_{ij}, D_{ij} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbf{R}) .
$$

La matrice rappresentativa di S è subunitaria.

Volendo il feedback $u = v$ si ha il sistema di equazioni seguente da cui eliminare u.

$$
\begin{aligned}
u_1 &= a_{11}u_1 + B_{11}z_1 , \\
w_1 &= c_{11}u_1 + D_{11}z_1 , \\
u_2 &= a_{21}u_1 + B_{21}z_1 + a_{22}u_2 + B_{22}z_2 , \\
w_2 &= c_{21}u_1 + D_{21}z_1 + c_{22}u_2 + D_{22}z_2 , \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
u_i &= \sum_{j=1}^{i} a_{ij}u_j + \sum_{j=1}^{i} B_{ij}z_j , \\
w_i &= \sum_{j=1}^{i} c_{ij}u_j + \sum_{j=1}^{i} D_{ij}z_j , \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

Se $a_{ii} \neq 1$ per ogni i dalle prime due equazioni si elimina u_1 ricavando u_1 dalla prima per ogni z_1 e sostituendo nella seconda; si sostituisce il valore ricavato di u_1 anche nelle successive equazioni. Dalle seconde due equazioni si elimina u_2 ricavando dalla terza u_2 per ogni z_1, z_2 e sostituendo nella quarta e anche nelle successive.

Si itera il procedimento sulle successive coppie di equazioni.

Se invece per un certo $\bar{i}$ $a_{\bar{i}\bar{i}} = 1$, allora, essendo la matrice subunitaria, si ha nel sistema di equazioni che rappresenta S, l'equazione

$$v_{\bar{i}} = u_{\bar{i}}\,,$$

e la variabile $u_{\bar{i}}$ non compare in nessuna altra equazione. Così per ogni $\bar{i}$ tale che $a_{\bar{i}\bar{i}} = 1$, cancellata l'equazione $v_{\bar{i}} = u_{\bar{i}}$, si procede come prima all'eliminazione ricorsiva delle u_i rimanenti.

Resta così provata l'ammissibilità del feedback.

In modo analogo, con due feedback consecutivi, si prova che il dispositivo che si ottiene da un dispositivo lineare passivo risolubile, cortocircuitando due terminali, è ancora risolubile.

Osservazione 2.1: Un sottouniverso interessante di questo è quello dei dispositivi tempo invarianti caratterizzati quindi da operatori di convoluzione.

Osservazione 2.2: In talune considerazioni potrebbero interessare dispositivi a memoria finita si noti che però questi non costituiscono un sottouniverso dell'universo ora considerato, come si prova con facili esempi.

3. - Un universo di dispositivi su $\mathcal{X}$ non lineari risolubili

Si vuole ora costruire un universo di dispositivi risolubili, monotoni anche non lineari che contenga quello dei dispositivi lineari passivi risolubili, risulta a tale scopo opportuno considerare una sottoclasse di dispositivi monotoni risolubili.

Definizione 3.1: Una mappa $R\colon X^n \to X^n$, $v = R(u)$, non espansiva si dirà debolmente contrattiva se per ogni $p \in N$ $|\Delta u|_p \neq 0$ implica $|\Delta v|_p < |\Delta u|_p$.

È immediato provare la seguente:

Proposizione 3.1: Un dispositivo monotono risolubile, con mappa di scattering debolmente contrattiva, risulta strettamente monotono nel senso che per ogni p se $|\Delta x|_p \neq 0$ oppure $|\Delta y|_p \neq 0$ allora

$$\langle \Delta x, \Delta y \rangle_p > 0\,.$$

Viceversa un dispositivo $\mathcal{A}$ risolubile, strettamente monotono, ha mappa di scattering debolmente contrattiva.

Teorema 3.1 (Teorema del feedback): Sia $G\colon X^m \times X^n \to X^n$, debolmente contrattiva, allora se $G(0, 0) = 0$ esiste una unica $y\colon X^m \to X^n$ tale che

$$y(x) = G(x, y(x)) \text{ per ogni } x \in X^m .$$

Dim.: La funzione G, debolmente contrattiva, è della forma

$$\begin{aligned}
z_1 &= g_1(x_1, y_1)\,,\\
z_2 &= g_2(x_1, x_2, y_1, y_2)\,,\\
z_3 &=\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
z_i &= g_i(x_1, x_2, \ldots, x_i, y_1, y_2, \ldots, y_i)\,,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

con $g_i\colon R^m \to R^n$ debolmente contrattiva $(g_1, g_2)\colon R^{2m} \times R^{2n} \to R^{2n}$ debolmente contrattiva e in generale per ogni $p \in N$ $(g_1, g_2, \ldots, g_p)\colon R^{pm} \times R^{pn} \to R^{pn}$ debolmente contrattiva.

Applicando il teorema di esplicitazione in grande negli spazi euclidei [3], all'equazione $y_1 = g_1(x_1, y_1)$, che ha la soluzione $(0, 0)$ e g_1 debolmente contrattiva, si ha una e una sola funzione

$$y_1(x_1)\colon R^m \to R^n \text{ tale che } y_1(x_1) = g_1(x_1, y_1(x_1)) \text{ per ogni } x_1 \in R^m .$$

Applicando ancora il medesimo risultato alle equazioni

$$\left|\begin{aligned}
y_1 &= g_1(x_1, y_1)\,,\\
y_2 &= g_2(x_1 x_2, y_1 y_2)\,,
\end{aligned}\right.$$

che hanno la soluzione $(0, 0, 0, 0)$ e $(g_1, g_2)\colon R^{2m} \times R^{2n} \to R^{2n}$ debolmente contrattiva si ha una sola coppia di funzioni

$$(y_1(x_1, x_2), y_2(x_1, x_2))\colon R^{2m} \to R^{2n}$$

che soddisfano le equazioni; l'unicità garantisce che questa y_1 coincide con la funzione y_1 determinata al passo precedente.

Si procede ricorsivamente determinando univocamente

$$y_3(x_1, x_2, x_3)\colon R^{3m} \to R^{3n}$$

dalle equazioni

$$\left|\begin{aligned}
y_1 &= g_1(x_1, y_1)\,,\\
y_2 &= g_2(x_1, x_2, y_1, y_2)\,,\\
y_3 &= g_3(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3)\,,
\end{aligned}\right.$$

e così via in generale $y_l(x_1, x_2, \ldots, x_l)$: $R^{lm} \to R^{ln}$ dal sistema

$$\left|\begin{array}{l} y_1 = g_1(x_1, y_2), \\ y_2 = g_2(x_1 x_2 y_1 y_2), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_l = y_l(x_1, x_2, \ldots, x_l, y_1, y_2, \ldots, y_l). \end{array}\right.$$

Seguendo ora la linea sviluppata in [4] per il caso stazionario realizziamo un universo di dispositivi risolubili che contiene tutti i dispositivi strettamente monotoni e tutti i dispositivi lineari passivi risolubili.

Si considerino i dispositivi della forma

$$L + M$$

con L lineare passivo risolubile ed M strettamente monotono risolubile, e tutti quei dispositivi che si ottengono, nell'universo totale, trasformando questi con un trasduttore elementare θ:

$$A = \theta_*(L + M).$$

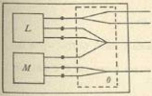
Teorema 3.2: La totalità dei dispositivi del tipo $A = \theta_*(L + M)$ costituisce un universo di dispositivi tutti monotoni, e tale universo è risolubile.

Dim.: La prima affermazione è ovvia perché la totalità dei dispositivi descritta è certamente chiusa rispetto alle operazioni di composizione in rete, domunque è conseguenza di risultati generali sugli universi di dispositivi [6], [7] e del fatto che i dispositivi monotoni costituiscono un sottouniverso dell'universo totale su X.

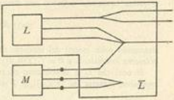
Per mostrare che ogni dispositivo di questo universo è risolubile possiamo porre

$$A = \theta_*(L + M) \text{ nella forma } A = \iota_*(\bar{L} + M)$$

essendo $\bar{L}$ un opportuno dispositivo lineare passivo risolubile (ottenuto con operazioni nell'universo dei dispositivi lineari passivi risolubili) ed ι il trasduttore elementare che realizza le cortocircuitazione dei terminali di M con gli opportuni terminali di $\bar{L}$.



$\theta_*(L + M)$



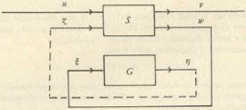
$L_*(\bar{L} + M)$

Ognuna di tali cortocircuitazioni si interpreta come feedback sul sistema associato, si tratta di mostrare che tale feedback è ammissibile.

Siano

S: $X^{m+n} \to X^{m+n}$ morfismo di scattering di L,

G: $X^n \to X^n$ mappa di scattering di M,



$$S: \begin{cases} v = R(u, z) \\ w = T(u, z) \end{cases} \qquad \eta = G(\xi)\,,$$

con $\xi, \eta, z, w \in X^n$ destinate al feedback, $u, v \in X^m$. Si vuole l'ammissibilità del feedback incrociato

$$z = \eta \qquad \text{e} \qquad \xi = w\,.$$

Si comincia ponendo $\xi = w$ e si ha il sistema

$$\begin{cases} v = R(u, z)\,, \\ \eta = G(T(u, z))\,, \end{cases}$$

a questo punto si pone $z = \eta$.

Si ha:

$$z = G(T(u, z))$$

e questa equazione definisce una funzione

$$z(u): X^m \to X^n$$

rientrando nelle ipotesi del teorema del feedback infatti $G(T(-,-))$ è debolmente contrattiva e $0 = G(T(0, 0))$.

Si noti che G è debolmente contrattiva per ipotesi ma T è solo non espansiva, tuttavia sia $|\Delta(u, \eta)|_p \neq 0$ risulta:

$$|\Delta G[T(u, \eta)]|_p < |\Delta T(u, \eta)|_p < |\Delta(u, \eta)|_p\,.$$

se $|\Delta T|_p \neq 0$ la prima diseguaglianza è stretta essendo G debolmente contrattiva, se invece $|\Delta T|_p = 0$ la seconda diseguaglianza è stretta banalmente, quindi in tutti i casi risulta qualunque sia p

$$|\Delta G[T(u, \eta)]|_p < |\Delta(u, \eta)|_p .$$

Allora chiuso il feedback si ha il sistema

$$V = S(u, z(u)) \quad \text{con} \quad S(u, z(u)) \colon X^n \to X^n ,$$

e il dispositivo associato $\iota_*(\Sigma + M)$ è pertanto risolubile.

BIBLIOGRAFIA

[1] G. Darbo, *Aspetti algebrici categoriali della teoria dei dispositivi*, Symposia Mathematica, 4 (1970).

[2] F. Parodi, *Costruzione di un universo di dispositivi non lineari su una coppia di gruppi abeliani*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 58 (1977).

[3] G. Darbo, *Un teorema di esplicitazione in grande*, Rend. Acc. Naz. Scienze Mem. di Mat., 5 (1981-82).

[4] F. Parodi, *Su un universo di dispositivi risolubili e monotoni massimali*, Rend. Acc. Naz. Scienze Mem. di Mat., **9** (1985).

[5] G. Darbo, *Teoremi di esplicitazione in grande*, Rend. Acc. Naz. Scienze Mem. di Mat., **9** (1985).

[6] F. Parodi, *Categoria degli universi di dispositivi e categoria delle T-algebre*.

[7] F. Parodi, *Alcune proprietà della categoria delle T-algebre*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 62 (1980)