UBALDO GARIBALDI, MARIA A. PENCO (*)

Probabilità e fisica tra Bernoulli e Laplace: il contributo di J. H. Lambert (1728-1777)

Il Settecento probabilistico è un periodo molto ben definito che parte dallo anno di pubblicazione dell'*Ars Conjectandi* di Jakob Bernoulli (1713) e che può ritenersi unanimemente concluso con la pubblicazione della *Théorie analytique des probabilités* di P. S. de Laplace, nel 1812 [2, 8].

L'*Ars Conjectandi* è la pietra angolare che chiude il periodo delle origini seicentesche del calcolo delle probabilità; e nella celeberrima « Pars quarta tradens usum et applicationem, praecedentis Doctrinae in Civilibus, Moralibus et Oeconomicis » apre le due strade fondamentali che determineranno gli sviluppi del secolo: i teoremi limite, con le conseguenti grandiose acquisizioni del nucleo matematico delle teorie, e l'applicabilità del calcolo ad ambiti sempre più vasti.

Indiscutibilmente l'opera di Laplace rappresenta il coronamento naturale del programma bernoulliano. Più degno di attenzione è lo spostamento di prospettiva che durante il secolo lentamente si produce sull'intero programma.

Per Laplace il calcolo delle probabilità è uno strumento essenziale alla comprensione dei fenomeni naturali, sia per quel che attiene al problema delle misure fisiche (teoria degli errori), che nella valutazione di parametri incogniti e nei test di ipotesi fisiche che si incontrano in cosmologia e in meccanica celeste. Alla « vexata quaestio » dell'applicabilità del calcolo al di fuori dei giochi d'azzardo, Laplace risponde con l'assunzione del calcolo nel nucleo più interno degli strumenti di comprensione della natura.

L'ispirazione di fondo è sicuramente bernoulliana: è però evidente come sia stato necessario sforzare notevolmente l'impostazione di Bernoulli per poterla rendere adatta ai compiti che Laplace intende (e riesce a) risolvere.

Per Bernoulli la fisica appartiene al regno del necessario e come tale è estranea all'applicabilità del calcolo.

La direttiva bernoulliana è verso le scienze morali, in particolare la demografia, l'aritmetica politica, l'economia, la legge: e questo sarà il filone più esplorato delle ricerche del secolo. La « speranza morale » (e la nascita di teorie utilitaristiche del valore), il dibattito sulle vaccinazioni e in generale sulle questioni

(*) U. Garibaldi, M. A. Penco, Dipartimento di Fisica, Università di Genova.

demografiche, il problema del valore delle testimonianze (dietro cui si cela, oltreché la polemica religiosa, il problema della fondazione razionale delle discipline storiche), sono temi che dominano il dibattito culturale del secolo dei lumi [3].

Che l'Arte della Congettura non sia direttamente applicabile alle scienze fisiche è evidente dalla sua stessa struttura. Il calcolo del « grado di certezza » di una proposizione sulla base di evidenze statistiche è una misura della dimostrabilità della proposizione a partire dalle premesse e/o dalle conseguenze. In certe condizioni esso valuta il grado di esplicabilità della cosa, e quindi è un indice della forza con cui è ragionevole sostenere una tesi. La sua interpretazione più naturale è il processo penale, dove non si tratta tanto di *individuare* il colpevole, quanto di *dimostrare* la colpevolezza sulla base di prove [4].

L'aspetto più importante (e più negativo per le applicazioni alla fisica) risiede nello schema di analisi della cosa in termini delle sue cause o circostanze.

L'analisi di Bernoulli è fatta in termini di cause (o segni) *indipendenti*, sufficienti (o no) al prodursi della cosa. Osserviamo qui che il cuore della visione laplaciana dell'induzione risiede nello schema bayesiano delle cause *esclusive* ed *esaustive* la cui occorrenza viene valutata sulla base della *verosimiglianza* con cui riproducono l'esperienza.

Lo schema di Bernoulli, forzatamente pre-bayesiano (la fondamentale memoria di Bayes è del 1763), è naturalmente a-bayesiano nella sua impostazione di fondo. La certezza della cosa non si fonda sul potere discriminante dell'esperienza nei riguardi dell'ipotesi, ma sulla sua forza esplicativa nei riguardi delle conseguenze, o sulla sua dimostrabilità dalle premesse. Mentre lo schema bayesiano mette la cosa a confronto con cose differenti (in particolare con la non-cosa), lo schema bernoulliano non lo fa (con il risultato, niente affatto accessorio, della non complementazione del « grado di certezza »). Inoltre la congettura bernoulliana riguarda essenzialmente eventi singolari in induzioni che portano dalla popolazione al campione: questo mal si adatta alla natura universale e incondizionata delle ipotesi che parlano del mondo fisico.

La linea indicata da Bernoulli viene decisamente ripresa e sviluppata da J. H. Lambert, di cui sono stati rivalutati, negli ultimi anni, i contributi fondamentali alla teoria degli errori di misura, cui lo stesso Gauss avrebbe attinto per le sue più profonde acquisizioni [9]. L'attività vastissima e poliedrica di Lambert riguarda pure l'ottica, la cosmologia, la geodesia, e lo pone in contatto con i maggiori scienziati e filosofi del tempo (Kant). Proprio nella sua opera filosofica fondamentale, il *Neues Organon*, Lambert sviluppò una teoria della probabilità logica degna di ogni attenzione, e che, a nostra conoscenza, è sinora sfuggita a eminenti studiosi della disciplina, come J. M. Keynes [6]. La probabilità logica è una terza specie generale di probabilità », che segue nell'ordine dell'esposizione la « probabilità a priori » tipica dei giochi d'azzardo, e la « probabilità a posteriori » di origine statistica.

Essa riguarda il grado di certezza da conferire a cose accadute, sulla base di conseguenze accertate, o a cose future, sulla base della conoscenza delle cause e delle circostanze presenti, alcune favorevoli, altre di ostacolo. Il grado di certezza viene generalizzato a un'esplicita probabilità logica:

[...] noi consideriamo qui non le cose stesse, ma i concetti e le proposizioni che esse ci offrono. [...] fino a che punto una proposizione può essere dimostrata dalle sue conseguenze? [...] ogni proposizione è necessariamente vera ogni volta che non si può ricavarne nulla di contraddittorio [...] In questo tipo di dimostrazione la proposizione è assunta come un'ipotesi [...] e si provano le conseguenze. Ma questo è possibile solo in linea di principio, poiché le argomentazioni sono infinite. Se ci si limita ad un certo numero, si arriva solo ad un certo grado di probabilità.

Se si assume che la terra sia una sfera, è possibile dedurre da questa preposizione l'intera geografia matematica e l'intera idrografia; e l'esperienza non contraddirà le conseguenze. Ma con tutte queste conseguenze la proposizione assunta avrebbe avuto sempre solo la parvenza di una probabilità, anche se molto grande. Di essa però i matematici non si contentarono; ma, poiché una sfera ha moltissimi contrassegni e rapporti propri, essi cercarono di trovare confermati dall'esperienza soprattutto questi. Ora, l'ombra sempre rotonda della Terra nelle eclissi lunari offrì la prima occasione per tale conferma, e più tardi si ricavò non solo la sua grandezza, ma, nell'età moderna, anche la sua forma sferoidale [7].

Se da evidenze certe (ma non dimostrative) si passa a evidenze statistiche (traduzione moderna del sillogismo « i predicati non sono contrassegni propri del soggetto della premessa maggiore ») si può calcolare la probabilità dell'induzione al modo di Bernoulli, assumendo come modello i giochi di azzardo. Il risultato è identico alla composizione bernoulliana di argomenti puri. Ma in generale lo scopo di Lambert è quello di individuare una logica induttiva che miri alla certezza, non limitandosi ai calcoli di probabilità logica, ma cercando la via verso l'« induzione completa », che « costituisce il tranquillante nella certezza ». Di qui lo sforzo di scegliere gli argomenti più utili per dimostrare l'ipotesi.

Il secondo genere di probabilità logica si ha « se la probabilità di una conclusione deve essere determinata dalla probabilità delle premesse. Qui, infatti, le premesse non si possono ritenere come argomenti singoli e tra loro indipendenti, perché la conclusione dipende per necessità da entrambe contemporaneamente, così che la conclusione risulta vera solo quando le conclusioni si avverano tutte ». In questo caso, facendo ricorso al gioco d'azzardo, la probabilità della conclusione si calcola come nel caso bernoulliano della composizione di argomenti misti.

Il naturale campo di applicazione di questo genere riguarda i sillogismi probabili, che trattano di proposizioni probabili in senso proprio. Fonte di proposizioni probabili possono essere *premesse certe e determinate* ma non sufficienti a dimostrare la proposizione in studio; e *premesse statistiche*, certe e determinate, che costituiscono la base di inferenze probabilistiche. Le proposizioni probabili sono in generale riducibili alla forma A è p B, equivalente a Prob. [A è B] $= p$, dove p « rappresenta non solo il grado, ma anche il concetto di probabilità, perché i concetti *essere* e *non essere* non hanno *gradus intensitatis* ». L'interpretazione di p è il numero dei casi in cui si hanno buone ragioni *per credere vera* la proposizione sulla base degli argomenti.

Lambert distingue accuratamente ed esplicitamente la probabilità logica *di* una proposizione dalla probabilità statistica che compare *nelle* premesse di natura statistica, chiarendo ampiamente ciò che Bernoulli semplicemente mostra. Questo sembra essere il primo caso storico di trattazione esplicita e approfondita della probabilità logica, dopo le intuizioni leibniziane e il sintetico approccio bernoulliano. Non a caso Lambert riprende in pieno il programma di Leibniz a questo proposito, con i pesanti limiti della tradizione scolastica che ne conseguono, ma anche con l'attenzione al simbolismo e alla matematizzazione che ne derivano. Proprio la forma sillogistica limita la teoria di Lambert: due sole premesse sono in generale insufficienti alla determinazione completa della probabilità.

> I gradi di probabilità che risultano per l'affermazione e la negazione delle conclusioni, presi insieme, non sempre formano un intero, poiché spesso resta ancora indeterminata una parte considerevole. Bisogna perciò tener conto certamente di questa parte indeterminata, se si vuole inferire dal grado di probabilità al grado di improbabilità.

Qui la probabilità non è complementata perché normalmente l'informazione è insufficiente, oppure inattendibile.

Al termine della trattazione, dopo aver applicato la teoria al caso classico delle combinazioni di testimonianze contrastanti, Lambert confronta i suoi risultati con quelli di Bernoulli, notevolmente differenti.

La critica di Lambert è riportata da Todhunter e recentemente è stata ripresa da J. Hacking [10, 5].

Hacking ha confrontato le formule contrastanti di Bernoulli e Lambert riferendole a un esempio concreto. Egli ritiene che le due formule abbiano ambiti di validità differenti: la formula di Bernoulli vale nel caso in cui gli argomenti sono *epistemologicamente* indipendenti, quella di Lambert nel caso di interazione tra le assegnazioni di probabilità.

Nessuna considerazione viene fatta sulla intrinseca differenza tra le due formule in rapporto alle teorie che le esprimono. La differenza filosofica di fondo è che la teoria bernoulliana è fondata su di un concetto di argomentazione di tipo causale esplicativo, mentre quella di Lambert è una teoria essenzialmente epistemologica.

Se la teoria di Lambert è più generale e più approfondita (come egli stesso sostiene), e se riesce a superare alcune delle « stranezze » più anacronistiche del causalismo bernoulliano, ciononostante essa si rivela completamente fuori dalla strada che, *via* Bayes, condurrà i procedimenti induttivi alla sintesi di Laplace.

La forza della concezione di Laplace nei confronti del Settecento probabilistico (e la sua debolezza nell'Ottocento) sta nell'uso generale del principio della probabilità delle cause, con l'attribuzione delle probabilità a priori basata sul principio di ragion non sufficiente. Benché Bernoulli sia il primo a formulare il principio, egli non ne fa uso nell'arte dell'argomentazione, che è l'arte di stimare le probabilità. Sono proprio le regolarità statistiche a rivelare il numero dei casi, quando questi non siano analizzabili a priori. Ma ogni probabilità statistica è condizionata alla popolazione in esame.

L'impostazione logicista di Lambert accentua questo aspetto: la probabilità è sempre relativa a premesse. Questo aspetto, basilare per le ricerche del Novecento, ostacola il logicismo settecentesco nel cammino verso la probabilità delle ipotesi.

BIBLIOGRAFIA

[1] T. BAYES, « An Essai Towards Solving a Problem in the Doctrine of Chances », *Phil. Trans, LIII*, 1763, 370–418.

[2] J. BERNOULLI, *Ars Conjectandi opus posthumum*, Basilea 1713.

[3] V. FERRONE, « Il dibattito su probabilità e scienze sociali nel secolo XVIII », *Physis*, *22* (1), 1980, 27–71.

[4] U. GARIBALDI, « L'*Ars Conjectandi* di J. Bernoulli e la rivoluzione scientifica », Atti IV *Congresso Nazionale di Storia della Fisica*, Como 1983, 46–52.

[5] I. HACKING, « Combined Evidence », in S. STENLUND (*ed.*), *Logical theory and Semantic Analysis*, Amsterdam 1974, 113–123.

[6] J. M. KEYNES, *A Treatise on Probability*, vol VIII, Cambridge 1973.

[7] J. H. LAMBERT, *Neues Organon...*, Leipzig 1764, 2 Bd; nella comunicazione si fa riferimento alla trad. it. di R. Ciafardone, Laterza, Bari 1977.

[8] P. S. DE LAPLACE, *Theorie analytique des probabilités*, in P. S. DE LAPLACE, *Oeuvres complètes*, vol. VII, Paris 1886.

[9] O. B. SHEYNIN, « Origin of the Theory of Errors », *Nature*, *211*, 1966, 1003–1304; « J. H. Lambert's Work on Probability », *Arch. Hist. Exact Sci.*, *7* (3), 1971, 244–256.

[10] I. TODHUNTER, *History of the Mathematical Theory of Probability*, Cambridge 1865.