PAOLO FREGUGLIA (*)

I quaternioni: una chiave di lettura dell'Universo

1. L'« invenzione » di William Rowan Hamilton dei *quaternioni* ebbe (non solo nel mondo scientifico inglese) una notevole risonanza nonostante la spiccata originalità e la singolarità dell'impostazione. La teoria dei quaternioni costituisce matematicamente uno sviluppo e un ampliamento della teoria dei *segmenti orientati*. Quest'ultima nozione era già stata studiata con profondità da Möbius e da Bellavitis (calcolo delle equipollenze). Tuttavia dobbiamo a H. Grassmann (*Ausdehnungslhere*, 1844) l'introduzione vera e propria (anche se in un contesto assai generale) della nozione di *vettore*. D'altro canto però questa nozione trova in Hamilton medesimo una formulazione esatta nel 1844 e completezza di trattazione nei due voluminosi e complessi lavori: *Lectures on Quaternions* (1853) ed *Elements of Quaternions* (prima edizione postuma, 1866). In Italia chi contribuì, tra i primi, a far conoscere le idee di Hamilton fu proprio Bellavitis che le presentò all'Istituto Veneto il 21 Marzo 1858 (1). Per Hamilton la nozione di *quaternione* non è (ovviamente) solo un concetto matematico. Essa piuttosto è studiata come strumento matematico per l'indagine dell'universo fisico. La nozione di *vettore*, che ha la stessa ispirazione epistemologica, risulta in Hamilton teoricamente subordinata, pur essendo l'idea elementare di base.

2. Uno degli aspetti che a prima vista colpisce il lettore degli impegnativi tomi di Hamilton, è la cura linguistico-filologica con la quale l'Autore giustifica la scelta della nomenclatura adottata. Ciò non stupisce davvero se rammentiamo la profonda cultura letteraria e la conoscenza delle lingue che fin da giovanissimo aveva ricevuto dallo zio James.

Questo aspetto, che potrebbe sembrare secondario, in effetti è una testimonianza, tenendo presente anche il modo con cui l'Autore sviluppa la trattazione, della profondità e dell'originalità dell'analisi effettuata dei concetti base della teoria non solo da un punto di vista tecnico, ma anche da quello di una giustificazione, in un certo senso, epistemologica. Ma vediamo subito come Hamilton presenta la nozione di *Vettore*.

(*) P. Freguglia, Istituto di Filosofia, Università di Genova.

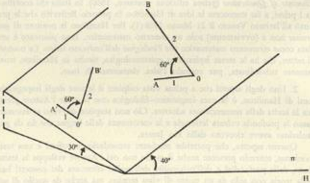
(1) Bellavitis pubblicò « Calcolo dei quaternioni di W. R. Hamilton e sua relazione con il metodo delle equipollenze », in *Memorie della Società Italiana delle Scienze*, t. I, s. II, Modena 1858.

A right line AB, considered as having not only *length*, but also direction, is said to be a VECTOR. Its initial point A is said to be its origin; and its final point B is said to be its *term*. A vector AB is conceived to be (or to construct) the *difference* of its two extreme points; or, more fully, to be the result of the *substraction* of its own origin from its own term; and in conformity with this *conception*, it is also denoted by the *symbol* B — A [...] (2).

L'uguaglianza tra due vettori, della quale viene esplicitamente riconosciuta la transitività, è così definitiva:

Two vectors are said to be EQUAL to each other, or the *equation* AB = CD, or B — A = D — C, is said to hold good, when (and only when) the origin and term of the one can be wrought to *coincide* respectively with the corresponding points of the other by *transports* (or by *translations*) without rotation (3).

Nella seconda delle *Lectures* vengono esaminati il quoziente e il prodotto tra vettori. $\beta \div \alpha$ (dove β e α sono vettori) denota, generalmente, in sintesi il risultato di un'analisi che coinvolge il rapporto tra due lunghezze, l'angolo tra due direzioni e la posizione di un dato piano. Negli *Elements* (4) viene spiegato in modo chiaro il significato geometrico assegnato al quoziente tra due vettori nel modo che segue (5).



(2) W. R. HAMILTON, *Elements of Quaternions*, Dublin 1866, 1.
(3) *Ibidem*, 2.
(4) *Ibidem*, 110-112.
(5) Hamilton prende le mosse dal caso particolare di due vettori paralleli e coiniziali. Il loro rapporto è un numero reale (cioè uno scalare), caso a cui si riduce un quaternione.

Il rapporto tra due vettori $\frac{OB}{OA}$ (oppure $\frac{O'B'}{O'A'}$) viene individuato dalla quaterna (ordinata):

$$2, \quad 60^o, \quad 30^o, \quad 40^o$$

dove il primo numero esprime il rapporto (*Ratio*) tra le lunghezze dei vettori, il secondo l'angolo (*Angle*) tra i due vettori, il terzo lo scostamento di fianco dalla linea CH (*Ledge*) ed il quarto la pendenza relativa al piano di riferimento π (*Slope*). Poiché le ultime tre indicazini sono espresse, tutte e tre, con angoli, risulta necessario distinguerle tramite particolari e distinti riferimenti. In effetti viene in questo modo individuata una nuova entità matematica che è appunto il *quaternione*. Ritorniamo alla *Lecture II*. La formula (che individua sinteticamente un quaternione):

$$\beta \div \alpha = q$$

si può trasformare in

$$q \times \alpha = \beta$$

per cui β (che è un vettore) potrà essere visto come il risultato di un prodotto (*product* o *factum*), α come il moltiplicando (*multiplicand* o *faciend*), e q come il moltiplicatore (*multiplier* o *factor*). Avremo cioè:

« factor × faciend = factum »

come pure

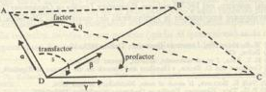
« factum ÷ faciend = factor »

Se $\beta \div \alpha$ è *factor*, allora $\alpha - \beta$ sarà detto *refactor*.
« A new act of faction » (cioè una profaction) così costruito:

$$\gamma \div \beta = r$$

individua in r il *profactor*, in γ il *profactum* e in β il *profaciend*, da cui:

« profactum ÷ profaciend = profactor »
« profactor × profaciend = profactum »



Dai seguenti passi: (6)

$$\gamma = \gamma \div \beta \times \beta$$
$$\gamma = (\gamma \div \beta) \times \beta \qquad \qquad \beta = (\beta \div \alpha) \times \alpha$$
$$\gamma = (\gamma \div \beta) \times (\beta \div \alpha) \times \alpha$$
$$(\gamma \div \alpha) = (\gamma \div \beta) \times (\beta \div \alpha) \quad (7)$$

e posto $\gamma \div \alpha = s$ si ha:

$$s = r \times q$$

Non sarà sfuggito certamente al lettore il parallelismo che Hamilton conduce tra somma di due vettori (che è definita come a tutti è ben noto) e prodotto di due quaternioni. Il ruolo che i punti hanno nel primo caso è ricoperto dai vettori nel secondo caso. Ma va fatta attenzione al fatto che la somma tra vettori è un'operazione commutativa mentre il prodotto tra quaternioni non lo è (si vedano in proposito le osservazioni del Bellavitis).

Alcuni commentatori (8) troppo facilmente hanno voluto liquidare la « presunzione » hamiltoniana di aver trovato, in particolare nella nozione di quaternione, « la chiave della matematica dell'universo fisico ». Nonostante l'intrinseca complessità non può sfuggire e non si può sottovalutare sia per le *Lectures* sia per gli *Elements* la forza espressiva dell'impianto teorico. Da un lato c'è la preoccupazione di riferire e di giustificare il concetto « astratto » a una realtà concretamente fisica (preoccupazione riconducibile bene o male a concezioni kantiane), dall'altro c'è l'osservazione del comportamento delle leggi fondamentali di strutture algebriche nuove. In questo secondo caso c'è l'influenza che la scuola di Cambridge ebbe nei suoi confronti. Questa influenza è da lui stesso riconosciuta nonostante non condividesse non poche delle concezioni di quei matematici (9).

La teoria dei quaternioni, come è stato osservato (10), è una costruzione algebrica secondo cui l'algebra è una scienza analoga alla geometria. Algebra intesa come « scienza del tempo puro » (ispirazione kantiana esplicitamente voluta da Hamilton, in analogia con una « scienza dello spazio puro », la geometria). Lo studio dell'algebra deve dunque avere come « scopo quello di migliorare la *scienza*, non l'*arte* (concezione « pratica ») né il *linguaggio* (concezione « filologica ») dell'algebra ».

3. Discepolo di Hamilton fu Peter Guthrie Tait, indubbiamente tra i più profondi studiosi di matematica e fisica del suo tempo. Tait pubblica, incoraggiato dal maestro, nel 1867 il volume *Elementary Treatise on Quaternions* (11) in cui sono sviluppate ampiamente le applicazioni dei quaternioni alla fisica matema-

---

(6) W. R. Hamilton, *Lectures on Quaternions*, Dublin 1853, 36.
(7) *Ibidem*, 42.
(8) E. T. Bell, *I grandi matematici*, Sansoni, Firenze 1966, 367.
(9) Confronta con D. Bloor, « Hamilton and Peacock on the Essence of Algebra », *Soc. Hist. of XIX Cent. Math.*, Birkhouser 1981.
(10) Vedi E. Bellone, *Il mondo di carta*, Mondadori, Milano 1876.
(11) P. G. Tait, *Elementary Treatise on Quaternions*, Cambridge 1867 (1873).

tica. Molto interessanti, storicamente, alcune considerazioni, alcune polemiche (ad esempio contro Houel e Laisant) altre riconoscenti (ad esempio al Cayley) che riscontriamo nella *Prefazione* nella quale a proposito di Gibbs e Grassmann si legge:

Even Prof. Willard Gibbs must be ranked as one of the retarders of Quaternion progress, in virtue of his pamphlet on *Vector Analysis*; a sort of hermaphrodite monster, compounded of the notations of Hamilton of Grassmann.

A propos of Grassmann, I may advert for a moment to some comparatively recent German statements as to his anticipations & c. of Quaternions. I have given in the last edition of the *Encyc. Brit.* (Art. QUATERNIONS to which I refer the reader) all that is necessary to shew the absolute baselessness of these statements. The essential points are as follows. Hamilton not only published his theory complete, the year before the first (and extremely imperfect) sketch of the *Ausdehnungslehre* appeared; but had given ten years before, in his protracted study of Sets, the very processes of external and internal multiplication (corresponding to the Vector and Scalar parts of product of two vectors) which have been put forward as specially the property of Grassmann. The scrupulous care with which Hamilton drew up his account of the work of previous writers (*Lectures*, Preface) is minutely detailed in his correspondence with De Morgan (Hamilton's *Life*, Vol. III) (12).

Va detto che Tait non predilesse della teoria dei quaternioni gli aspetti prettamente teorico-matematici che ad esempio erano particolarmente presenti negli *Elements* hamiltoniani (13). Il suo interesse, appunto, è piuttosto orientato alle applicazioni strettamente geometriche (Cap. VII, VIII, XI e X) e fisiche (Cap. XI e XII). Riguardo a queste ultime, dopo una trattazione ampia e approfondita della *Cinematica* (Cap. XI, in cui le nozioni quaternionali giocano un ruolo tutt'altro che ridondante) i temi esaminati da Tait sono: la statica dei sistemi rigidi, il moto di questi sistemi e quindi le processioni e le nutazioni, l'equazione generale del moto del pendolo semplice, questioni di ottica e di elettrodinamica. Dopo aver analizzato le proprietà dell'operatore ∇ ne studia l'utilizzazione in problemi fisico-matematici, come ad esempio l'equazione idrodinamica, e per il calcolo delle variazioni.

Si tratta chiaramente della presentazione di talune concezioni fondamentali della fisica matematica hamiltoniana. Come è stato evidenziato (14) Tait esplicitamente riconosce (e peraltro prova) che sul piano teorico l'uso dei quaternioni conduce a considerare enunciati più generali rispetto a quelli che ordinariamente siamo abituati a esaminare quando il quaternione « degrada in scalare ». E non c'è dubbio che ciò sia in gran parte vero e assai proficuo sul piano teorico-formale. Tuttavia, è innegabile che questa compattezza espositiva impostata sulla centralità *teoretica* di una nozione (quella di quaternione) se da un lato può rappresentare filosoficamente la « chiave di lettura dell'universo », dall'al-

(12) *Ibidem*, VI.

(13) Ph. Kelland in collaborazione con Tait scrive il libro *Introduction to Quaternions*, Macmillan, London 1873.

(14) Vedi E. BELLONE, *Il mondo...*, *cit.*

tro lato va a discapito, proprio per una intrinseca complessità e per vincoli strutturali a priori stabiliti, a una rappresentazione *agevole* e funzionale della meccanica *in primis* e di altre questioni fisico-matematiche. Ciò contribuì a determinare il progressivo abbandono della teoria dei quaternioni e quindi delle relative applicazioni alla fisica matematica, pur trattandosi di una teoria matematicamente suggestiva e pur essendo ineccepibili sul piano formale tali applicazioni.

La storia del « calcolo geometrico », dalle concezioni di Möbius e di Bellavitis, agli impianti teorici pressoché contemporanei di H. Grassmann e di Hamilton conduce via via, verso la fine dell'Ottocento e i primi del Novecento, alla determinazione del *calcolo vettoriale* (inteso come *sistema minimo*) la cui nozione cardine è semplicemente quella di *vettore* e le cui operazioni sono quelle che consentono una trattazione completa della meccanica e della fisica matematica classica senza forzature teoriche legate vuoi alla centralità di talune nozioni (come nel caso dei quaternioni), vuoi a riduzioni di operazioni molto generali (come il « prodotto alternativo » di Grassmann).

Tra gli artefici di questa trasformazione c'è indubbiamente Peano e il suo allievo Cesare Burali-Forti, i quali dapprima illustrarono la superiorità matematica (15) del calcolo di Grassmann rispetto a quello di Hamilton e in un secondo tempo ridussero, o comunque contribuirono significativamente a ridurre, dal sistema di Grassmann quelle nozioni che costituiscono il cosiddetto *sistema minimo* (16).

---

(15) Il sistema di Grassmann permette infatti di trattare (con il calcolo geometrico) anche questioni di geometria proiettiva, mentre ciò non è possibile con il calcolo dei quaternioni. Peano fu segretario nel 1901 per l'Italia dell'« Associazione internazionale per lo sviluppo degli studi sui quaternioni e i sistemi matematici connessi ». Vanno citate almeno, di Peano, l'opera *Il calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann*, Bocca, Torino 1888, e di C. Burali-Forti e R. Marcolongo, *Elementi di calcolo vettoriale*, Zanichelli, Bologna 1909. Vedi, per ulteriori notizie, il cap. III di M. Borga, P. Freguglia, D. Palladino, *I contributi fondazionali della scuola di Peano*, F. Angeli, Milano 1985.

(16) Vedi C. Burali-Forti, « Elementi di calcolo vettoriale », in AA VV, *Enciclopedia delle matematiche elementari e complementari*, Hoepli, Milano 1950 (ristampa).