Rendiconti
Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL
Memorie di Matematica
103° (1985), Vol. IX, fasc. 11, pagg. 249-260

DOMENICO CANDELORO (*)

Alcuni teoremi di uniforme limitatezza (**) (***)

Some Theorems on Uniform Boundedness

SUMMARY. — Some Nikodym-type theorems are given, concerning the Uniform Boundedness principle for families of finitely additive group-valued measures, defined on a Boolean Algebra $\mathcal{A}$. Some of these results do not involve any hypothesis on $\mathcal{A}$, but make use of a suitable boundedness condition; the last theorem, on the other hand, requires only a separation condition on $\mathcal{A}$.

INTRODUZIONE

Negli ultimi anni, diversi autori si sono occupati di estendere il classico teorema di Nikodym (v. [9]) sull'uniforme limitatezza di una famiglia di misure: in [1] si può trovare una panoramica dei lavori meno recenti, e fondamentalmente limitati al caso vettoriale. Tuttavia, vale la pena di menzionare l'articolo di Landers e Rogge, [5], dove si ottiene la prima estensione per il caso di misure a valori in un gruppo topologico. Ultimamente, invece, si è principalmente esaminato il caso di misure finitamente additive, definite su un'algebra $\mathcal{A}$ e a valori in un gruppo topologico: ricordiamo qui [2], [3], [4], [6], [7], [8], [10].

Nello stesso assetto si colloca questa ricerca. In una prima fase, senza imporre condizioni sull'algebra $\mathcal{A}$, proviamo il teorema in particolari ipotesi di limitatezza, formulate in modo da coincidere con quelle usuali, nel caso numerabilmente additivo. In una seconda fase, seguendo l'orientamento generale degli ultimi lavori sull'argomento (v. ad es. [8], [10]), cerchiamo condizioni su $\mathcal{A}$, sotto le quali sia ancora valido l'enunciato classico: la condizione qui trovata, una variante della « proprietà (f) » di Moltò ([6]), è formulata in modo

(*) Dipartimento di Matematica dell'Università, Perugia.
(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.A.F.A. del C.N.R.
(***) Memoria presentata il 16 ottobre 1984 da Giuseppe Scorza Dragoni, uno dei XL.

ISSN-0392-4106

da estendere, oltre alla stessa condizione (f), anche quella di « completezza subsequenziale » (v. [3]).

Ringrazio sentitamente i proff. G. Letta e C. Vinti, per avermi seguito e consigliato durante la stesura di questo lavoro.

1. - Preliminari

Sia G un gruppo abeliano topologico separato, il cui elemento neutro viene indicato con 0.

Denoteremo poi con $\mathfrak{I}(0)$ una base d'intorni, chiusi e simmetrici, dello 0 in G.

Se U è un intorno di 0, e k è un intero positivo, indicheremo con kU l'insieme

$$\{u_1 + \ldots + u_k : (u_1, \ldots, u_k) \in U^k\}.$$

1.1. Definizioni: Se B è un generico sottoinsieme di G, e U è un intorno di 0, diremo che B è *U-limitato* se esiste un intero positivo k per cui si abbia $B \subset kU$.

Diremo inoltre che B è *limitato* se esso è U-limitato, per qualsiasi elemento $U \in \mathfrak{I}(0)$.

In tutto il seguito, $\mathcal{A}$ designa una fissata algebra d'insiemi, avente Ω come elemento massimo.

1.2. Definizioni: Diremo *massa* (a valori in G) ogni funzione finitamente additiva $m: \mathcal{A} \to G$; se $\mathcal{A}$ è una σ-algebra, e m è numerabilmente additiva, diremo ovviamente che m è una *misura*. Data una massa $m: \mathcal{A} \to G$, diremo che essa è *esaustiva* se, per ogni successione (H_n) di elementi di $\mathcal{A}$, a due a due disgiunti, risulta

$$\lim_{n \to \infty} m(H_n) = 0 .$$

Se $m: \mathcal{A} \to G$ è una massa generica, e B è un qualunque elemento di $\mathcal{A}$, porremo

$$m^*(B) = \{m(A): A \in \mathcal{A}, A \subset B\} .$$

2. - Il teorema di Nikodym

In [9] si prova la seguente estensione del classico teorema di Nikodym, sull'uniforme limitatezza delle misure.

2.1. Teorema: *Sia $\mathcal{A}$ una σ-algebra, e siano $\{m_i\}_{i \in I}$ misure definite su $\mathcal{A}$, e a valori in G. Se, per ogni elemento $A \in \mathcal{A}$, è limitato in G l'insieme*

$$\{m_i(A): i \in I\} ,$$

allora è limitato anche l'insieme

$$\bigcup_{i\in I} m_i^+(\Omega).$$

Stabiliremo ora alcune estensioni di questo teorema al caso finitamente additivo, senza imporre ipotesi sull'algebra A.

2.2. Definizioni: Sia $\{m_i\}_{i\in I}$ una famiglia di masse, definite su A e a valori in G. Diremo che le m_i hanno la *proprietà* (H) se, per ogni successione (H_n) di elementi di A, a due a due disgiunti, è limitato in G l'insieme

$$\bigcup_{n\in\mathbf{N}} \{m_i(H_n) \colon i \in I\}.$$

Diremo invece che le masse m_i hanno la *proprietà* (B) se, per ogni successione decrescente (B_n) di elementi di A, è limitato in G l'insieme

$$\bigcup_{n\in\mathbf{N}} \{m_i(B_n) \colon i \in I\}.$$

2.3. Proposizione: *La condizione* (H) *implica la* (B).

Dimostrazione: Sia (B_n) una successione decrescente in A, e sia U un generico elemento di $\mathfrak{I}(0)$. Procedendo per assurdo, ammettiamo che non sia U-limitato l'insieme

$$\bigcup_{n\in\mathbf{N}} \{m_i(B_n) \colon i \in I\}.$$

Tuttavia, la condizione (H) comporta ovviamente che, per ogni elemento A di A, è limitato l'insieme $\{m_i(A) \colon i \in I\}$. Dunque, esisterà un intero positivo k_1, tale che si abbia:

$$\{m_i(B_1) \colon i \in I\} \subset k_1 U. \tag{1}$$

A causa di quanto supposto per assurdo, esistono anche un intero $n_1 > 1$ e un indice $i_1 \in I$ tali da aversi $m_{i_1}(B_{n_1}) \notin 2k_1 U$.

In virtù di (1), e della simmetria di U, ciò implica la relazione

$$m_{i_1}(B_1 \setminus B_{n_1}) \notin k_1 U.$$

D'altra parte, esisterà un intero $k_2 > k_1$, tale da aversi

$$\{m_i(B_{n_1}) \colon i \in I\} \subset k_2 U. \tag{2}$$

Ancora, sfruttando l'ammissione fatta per assurdo, troveremo un indice $i_2 \in I$ e un intero $n_2 > n_1$ in modo che risulti $m_{i_2}(B_{n_2}) \notin 2k_2 U$, da cui, per la (2), $m_{i_2}(B_{n_1} \setminus B_{n_2}) \notin k_2 U$.

Così procedendo, troveremo successioni strettamente crescenti (n_h) e (k_h) di interi positivi, e una successione (i_h) in I, soddisfacenti alla relazione

$$(3)\qquad m_{i_h}(B_{n_{h-1}} \setminus B_{n_h}) \notin k_h U\,, \qquad \text{per } h \in \mathbf{N}\,.$$

Ma gli insiemi $(B_{n_{h-1}} \setminus B_{n_h})$ sono a due a due disgiunti, e allora la (3) contraddice alla condizione (H).

Necessariamente, quindi, l'insieme $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} \{m_i(B_n) \colon i \in I\}$ risulta U-limitato. Per l'arbitrarietà di U, segue l'asserto.

Benchè sia vera, non proviamo ora l'equivalenza tra le due proprietà, perchè essa risulterà evidente più avanti.

2.4. Lemma: *Supponiamo che, sulla medesima algebra* $\mathcal{A}$, *sia definita una famiglia di masse* $\{m_i\}_{i \in I}$, *a valori in* G, *e soddisfacente alla condizione* (B). *Siano poi* $A \in \mathcal{A}$, $U \in \mathfrak{I}(0)$, $j \in I$ *e* $h \in \mathbf{N}$, *elementi tali da aversi*

$$m_j(A) \notin hU\,.$$

Allora esistono un sottoinsieme $B \subset A$, $B \in \mathcal{A}$, *due interi* h' *e* k, *con* $h' > h$ *e* $k > h$, *e un indice* $j' \in I$, *in modo che si abbia*

$$m_{j'}(B) \notin h' U\,, \quad e \quad \bigcup_{i \in I} m_i^+(B) \subset kU\,.$$

Dimostrazione: Se $\bigcup_{i \in I} m_i^+(A)$ è U-limitato, l'asserto è ovvio. Altrimenti, vi saranno un indice $j_1 \in I$, e un sottoinsieme $B_1 \subset A$, $B_1 \in \mathcal{A}$, tali da verificare

$$m_{j_1}(B_1) \notin (h+1)U\,.$$

Se $\bigcup_{i \in I} m_i^+(B_1)$ è U-limitato, l'asserto è provato. Altrimenti, si può determinare un insieme $B_2 \subset B_1$, $B_2 \in \mathcal{A}$, e un indice $j_2 \in I$, tali che si abbia

$$m_{j_2}(B_2) \notin (h+2)U\,.$$

Procedendo sempre allo stesso modo, prima o poi la costruzione ci condurrà ad un insieme $B_m \subset A$, $B_m \in \mathcal{A}$, tale che $\bigcup_{i \in I} m_i^+(B_m)$ sia U-limitato, altrimenti si verrebbe a contraddire la (B).

2.5. Proposizione: *Sia data, sull'algebra* $\mathcal{A}$, *una famiglia di masse* $\{m_i\}_{i \in I}$, *verificanti la condizione* (H). *Allora è limitato l'insieme*

$$\bigcup_{i \in I} m_i^+(\Omega).$$

DIMOSTRAZIONE: Sia $U \in \mathfrak{Z}(0)$, e proviamo che $\bigcup_{i \in I} m_i^+(\Omega)$ è U-limitato. Se $m_i(A) \in U$ per ogni $i \in I$ e ogni $A \in \mathcal{A}$, l'asserto è banale. Supponiamo perciò che, per qualche insieme $A_1 \in \mathcal{A}$, e qualche indice $j_1 \in I$, si abbia $m_{j_1}(A_1) \notin U$.

Per il Lemma 2.4, esistono un insieme $H_1 \in \mathcal{A}$, $H_1 \subset A_1$, un indice $i_1 \in I$ e un intero $k_1 > 1$, tali che si abbia

$$m_{i_1}(H_1) \notin U, \quad \text{e} \quad \bigcup_{i \in I} m_i^+(H_1) \subset k_1 U.$$

Ora, se l'insieme $\bigcup_{i \in I} m_i^+(\Omega \setminus H_1)$ è U-limitato, la dimostrazione è terminata. Altrimenti, esisteranno un insieme $A_2 \in \mathcal{A}$, disgiunto da H_1, e un indice $j_2 \in I$, in modo che si abbia

$$m_{j_2}(A_2) \notin 2U.$$

Applicando ancora 2.4, troveremo un insieme $H_2 \in \mathcal{A}$, $H_2 \subset A_2$, un indice $i_2 \in I$ e un intero k_2 tali da aversi

$$m_{i_2}(H_2) \notin 2U, \quad \text{ma} \quad \bigcup_{i \in I} m_i^+(H_2) \subset k_2 U.$$

Ragionando allo stesso modo, se non risulta limitato l'insieme

$$\bigcup_{i \in I} m_i^+[\Omega \setminus (H_1 \cup H_2)],$$

troveremo un insieme $H_3 \in \mathcal{A}$, disgiunto da $H_1 \cup H_2$, un indice $i_3 \in I$ e un intero positivo k_3, per i quali risulti

$$\bigcup_{i \in I} m_i^+(H_3) \subset k_3 U, \quad \text{e} \quad m_{i_3}(H_3) \notin 3U.$$

Così procedendo, ad un passo N troveremo, necessariamente, che l'insieme $\bigcup_{i \in I} m_i^+(\Omega \setminus (H_1 \cup ... \cup H_N))$ è U-limitato, altrimenti si verrebbe a costruire una successione d'insiemi (H_n), a due a due disgiunti, per i quali non è limitato l'insieme

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{m_i(H_n) : i \in I\}.$$

Ciò conclude la dimostrazione.

Così com'è formulata, la Proposizione 2.5 non è un'estensione autonoma di 2.1: è vero che le ipotesi di 2.5 sono soddisfatte tutte le volte che lo sono quelle di 2.1, ma per provare questo fatto occorre sfruttare lo stesso Teorema 2.1. Per ottenere un'estensione autonoma, introdurremo una nuova proprietà, essenzialmente equivalente alla (H), ma in certi casi molto più evidente.

2.6. Definizione: Sia $\{m_i\}_{i\in I}$ una famiglia di masse esaustive, definite su $\mathcal{A}$, e a valori in un gruppo completo G. Diremo che esse godono della *proprietà* (L) se, per ogni successione decrescente (B_n) di elementi di $\mathcal{A}$, risulta limitato in G l'insieme

$$\left\{\lim_{n\to\infty} m_i(B_n)\colon i\in I\right\}.$$

(L'esistenza dei limiti, qui, è garantita dall'esaustività delle masse e dalla completezza di G).

Si noti che, qualora $\mathcal{A}$ sia una σ-algebra, e le m_i siano misure, la condizione (L) è automaticamente verificata, non appena siano soddisfatte le ipotesi di 2.1.

2.7. Teorema: *Nelle ipotesi che le masse m_i siano esaustive, e il gruppo G sia completo, le condizioni (H), (B), (L) sono tutte equivalenti.*

Dimostrazione: Abbiamo già provato che (H) implica (B), ed è chiaro anche che (B) implica (L). Basterà dunque dimostrare che (L) implica (H).

Sia allora $\{m_i\}_{i\in I}$ una famiglia di masse esaustive, tali che valga la (L), e sia (H_n) una successione di elementi di $\mathcal{A}$, a due a due disgiunti. Denotiamo ora con U un generico elemento di $\mathfrak{I}(0)$, e con (U_n) una successione decrescente in $\mathfrak{I}(0)$, in modo che si abbia:

$$U_0=U\,,\quad U_n+U_n\subset U_{n-1}\,,\qquad \text{per ogni } n\in\mathbf{N}\,.$$

Supponiamo, per assurdo, che l'insieme $\bigcup_{n\in\mathbf{N}}\{m_i(H_n)\colon i\in I\}$ non sia U-limitato. Senza perdita di generalità, possiamo supporre di essere nella situazione seguente:

$$I=\mathbf{N}\,,\quad \text{e}\quad m_n(H_n)\notin nU\,.$$

Poniamo poi, per ogni intero n,

$$A_n=\Omega\diagdown\bigcup_{i<n}H_i\,.$$

È chiaro che $H_n\subset A_n$ per ogni n, e che (A_n) è una successione decrescente in $\mathcal{A}$. Per la (L), esiste allora un intero $k>1$, in modo che risulti

$$(\circ)\qquad \left\{\lim_{n\to\infty} m_i(A_n)\colon i\in I\right\}\subset(k-1)\,U_1\,.$$

Poniamo $j_1=k+1$, e sia N_1 un intero positivo, per cui risulti

$$\{m_i(H_{j_1})\colon i\in I\}\subset N_1U_1\,.$$

Per le ipotesi fatte, e per la $(\circ)$, è possibile costruire una successione di coppie

(j_q, N_q) di interi positivi, tali che sia:

(1) $\{m_i(H_{i_q}) : i \in I\} \subset N_q U_1$ per ogni $q > 1$;

(2) $j_{q+1} > j_q + N_q$ per ogni $q > 1$;

(3) $m_{i_q}(A_j) \in k U_1$ per $j > j_{q+1}$, e $q > 1$;

(4) $m_{i_q}(H_j) \in U_q$ per ogni $j > j_q$, $h = 1, \dots, q-1$, e $q > 1$.

Poniamo allora, per ogni $q > 1$,

$$B_q = H_{i_1} \cup \dots \cup H_{i_q} \cup A_{i_{q+1}}.$$

È facile controllare che gli insiemi B_q costituiscono una successione decrescente in A. Inoltre, se p e q sono interi positivi, con $p < q$, si ha

$$m_{i_p}(H_{i_p}) = m_{i_p}(B_q) - m_{i_p}(H_{i_1} \cup \dots \cup H_{i_{p-1}} \cup H_{i_{p+1}} \cup \dots \cup H_{i_q} \cup A_{i_{q+1}}),$$

e l'ultimo termine, a causa di (1), (3), (4), è contenuto in

$$(k + N_1 + N_2 + \dots + N_{p-1}) U_1 + U_{p+1} + \dots + U_q \subset$$
$$\subset (1 + k + N_1 + \dots + N_{p-1}) U_1 \subset j_p U_1,$$

(l'ultima inclusione valendo per (2)); pertanto, se fosse $m_{i_p}(B_q) \in j_p U_1$, avremmo $m_{i_p}(H_{i_p}) \in j_p U$, il che non può essere. Dunque, per $p < q$, è $m_{i_p}(B_q) \notin j_p U_1$, e quindi, fissato p, sarà

$$\lim_{q \to \infty} m_{i_p}(B_q) \notin j_p U_1.$$

Poichè i numeri j_p costituiscono una successione strettamente crescente, questo fatto contrasta con la (L), applicata alla successione (B_q). Essendo pervenuti ad un assurdo, dobbiamo concludere che l'insieme $\bigcup_{n \in N} \{m_i(H_n) : i \in I\}$ è U-limitato, e pertanto si ha l'asserto.

A questo punto, 2.5 e 2.7 permettono di formulare la seguente autonoma estensione di 2.1.

2.8. Corollario: *Nelle ipotesi del Teorema 2.7, se le masse $(m_i)_{i \in I}$ godono della proprietà (L), è limitato in G l'insieme*

$$\bigcup_{i \in I} m_i^+(\Omega).$$

3. - La proprietà di Nikodym

Proveremo qui un'estensione del Teorema 2.1, lasciando formalmente inalterata l'ipotesi di limitatezza delle masse, ma imponendo qualche condizione speciale sull'algebra A.

3.1. Definizione: Diremo che un'algebra $\mathcal{A}$ possiede la *proprietà di Nikodym* se, comunque si scelgano un gruppo topologico G e una famiglia $\{m_i\}_{i\in I}$ di masse esaustive, definite su $\mathcal{A}$ e a valori in G, dalla limitatezza degli insiemi $\{m_i(A): i\in I\}$, per ogni $A\in\mathcal{A}$, segue quella dell'insieme $\bigcup_{i\in I} m_i^+(\Omega)$.

Non tutte le algebre posseggono la proprietà di Nikodym (v. [10]).

Tra le varie condizioni trovate finora, che assicurano la proprietà di Nikodym, le più generali sembrano essere le seguenti:

(SCP) (v. [3]): «per ogni successione (H_n) di elementi di $\mathcal{A}$, a due a due disgiunti, esiste una sottosuccessione, che ammetta estremo superiore in $\mathcal{A}$».

(f) (v. [6]): «per ogni coppia (H_n), (F_n) di successioni in $\mathcal{A}$, per le quali si abbia $H_n\cap H_k=F_n\cap F_k=\emptyset$ per $n\neq k$, e $H_n\cap F_k=\emptyset$ per ogni n e k, esiste una successione d'interi positivi (n_j), tali da aversi:

(1) esiste un elemento $A\in\mathcal{A}$, contenente H_{n_j} per ogni j, e disgiunto da F_k per ogni k;

(2) per ogni sottoinsieme P di N, esiste un elemento A_P di $\mathcal{A}$, contenente ogni H_{n_j} con $j\in P$, e disgiunto dagli altri H_{n_j}».

Sia la condizione (f) che la (SCP) implicano la proprietà (f_1), che ora introdurremo.

3.2. Definizione: Diremo che l'algebra $\mathcal{A}$ gode della *proprietà* (f_1) se, per ogni coppia (H_n), (F_n) di successioni in $\mathcal{A}$, soddisfacenti alle condizioni:

$$H_n\cap H_k=F_n\cap F_k=\emptyset \text{ per } n\neq k, \quad \text{e} \quad H_n\cap F_k=\emptyset \text{ per ogni } n, k,$$

esistono una parte infinita P di N, e un elemento H di $\mathcal{A}$, in modo tale da aversi $H_k\subset H$ per ogni $k\in P$, e inoltre

$$H\cap H_k=H\cap F_n=\emptyset \text{ per ogni } n, \text{ e per } k\notin P.$$

La seguente proposizione è pressochè immediata.

3.3. Proposizione: *Supponiamo che l'algebra $\mathcal{A}$ goda della proprietà* (f_1). *Data una successione (H_n) di elementi di $\mathcal{A}$, a due a due disgiunti, esistono un'infinità numerabile di parti infinite di* N, (P_k), *e una successione (B_k) in $\mathcal{A}$, verificanti le relazioni*:

$$P_k\cap P_j=B_k\cap B_j=\emptyset \text{ per } k\neq j\,; \quad H_n\subset B_k \text{ per ogni } n\in P_k,\ k\in\mathrm{N}.$$

3.4. Lemma: *Sia $\mathcal{A}$ un'algebra che goda della proprietà* (f_1), *e sia (H_n) una successione di elementi di $\mathcal{A}$, a due a due disgiunti. Sia poi (P_k) una successione decrescente di parti infinite di* N, *che soddisfino alla seguente condizione*:

$$\min P_k\notin P_{k+1}, \ \textit{per ogni } k>1.$$

Sia infine (F_k) *una successione decrescente di elementi di* A, *tale da aversi, per ogni* k, $H_p \subset F_k$, *per* $p \in P_k$.

Allora, denotato con p_k *il minimo elemento di* P_k *per ogni* k, *esistono una successione crescente* (k_j) *d'interi positivi, e un elemento* $F \in A$, *per i quali risulta, per ogni* j:

$$H_{p_{k_j}} \subset F, \quad e \quad F \setminus (H_{p_{k_1}} \cup \ldots \cup H_{p_{k_j}}) \subset F_{k_j+1}.$$

DIMOSTRAZIONE: Senza perdita di generalità, possiamo supporre che, per ogni k, risulti

$$F_{k+1} \cap H_p = \emptyset \text{ per } p < p_k. \tag{1}$$

Poniamo poi, per ogni k,

$$D_k = F_k \setminus (F_{k+1} \cup H_{p_k}).$$

È evidente che ogni D_k è un elemento di A, e che i D_k sono a due a due disgiunti. Inoltre, in virtù della (1), risulta

$$D_k \cap H_{p_n} = \emptyset, \text{ per ogni } n \text{ e ogni } k.$$

Applicando la (f_1) alle successioni (H_{p_k}) e (D_k), troveremo una sottosuccessione $(H_{p_{k_j}})$ e un elemento $F \in A$, $F \subset F_1$, tali da aversi: $F \cap D_k = \emptyset$ per ogni k; $H_{p_{k_j}} \subset F$ per ogni j, e inoltre

$$F \cap H_{p_h} = \emptyset, \text{ quando } h \text{ non è del tipo } k_j.$$

Pertanto, per ogni j, risulta

$$F \setminus (H_{p_{k_1}} \cup \ldots \cup H_{p_{k_j}}) = F \setminus (H_{p_1} \cup H_{p_2} \cup \ldots \cup H_{p_{k_j}}).$$

Per concludere la dimostrazione, basterà allora provare che, per ogni k, vale la relazione

$$F \setminus (H_{p_1} \cup \ldots \cup H_{p_k}) \subset F_{k+1}. \tag{2}$$

Si ha $F \setminus H_{p_1} = (F_1 \setminus H_{p_1}) \cap F$. Ma è $(F_1 \setminus H_{p_1}) \setminus F_2 = D_1$, e quindi

$$(F \setminus H_{p_1}) \setminus F_2 = F \cap D_1 = \emptyset.$$

Ciò prova la (2) nel caso $k = 1$.

Supponendo vera la (2) per un generico valore di k, con la stessa tecnica si prova che essa è vera anche per $k + 1$, e quindi la (2) vale in generale. Il lemma è così dimostrato.

Possiamo ora dimostrare il teorema principale di questo paragrafo.

3.5. Teorema: *Se $\mathcal{A}$ gode della proprietà (f_1), allora $\mathcal{A}$ possiede anche la proprietà di Nikodym.*

Dimostrazione: Sia $\{m_i\}_{i\in I}$ una famiglia di masse esaustive, definite su $\mathcal{A}$ e a valori nel gruppo G, in modo che risulti limitato ogni insieme del tipo

$$\{m_i(A)\colon i\in I\}\,, \qquad \text{con } A\in\mathcal{A}\,.$$

In virtù di 2.5, basterà provare che le m_i hanno la proprietà (H). Sia dunque (H_p) una successione di elementi di $\mathcal{A}$, a due a due disgiunti, e si fissi U in $\mathfrak{J}(0)$. Se l'insieme

$$\bigcup_{p\in\mathrm{N}}\{m_i(H_p)\colon i\in I\}$$

non fosse U-limitato, potremmo supporre, senza perdita di generalità, che sia $I=\mathrm{N}$, e

$$m_p(H_p)\notin pU\,, \qquad \text{per ogni } p\in\mathrm{N}\,.$$

Sia ora (U_p) una successione decrescente in $\mathfrak{J}(0)$, con $U_0=U$, e $U_p+U_p\subset\subset U_{p-1}$ per $p\geq 1$.

Usando la Proposizione 3.3, e l'esaustività di m_1, possiamo determinare un insieme infinito $P_1\subset\mathrm{N}$, e un elemento $F_1\in\mathcal{A}$, verificanti le relazioni

$$H_p\subset F_1 \text{ per ogni } p\in P_1\,; \quad \text{e} \quad m_1^+(F_1)\subset U_1\,.$$

Si ponga $p_1=\min P_1$, e sia N_1 un intero positivo tale che sia

$$\{m_i(H_{p_1})\colon i\in I\}\subset N_1U_1\,.$$

Utilizzando ancora 3.3, e l'esaustività di m_{p_1}, si troveranno un insieme infinito $P_2\subset P_1$, con $\min P_2>N_1+p_1$, e un insieme $F_2\in\mathcal{A}$, contenuto in F_1, e tale da aversi

$$H_p\subset F_2 \text{ per ogni } p\in P_2\,; \quad \text{e} \quad m_{p_1}^+(F_2)\subset U_2\,.$$

Poniamo $p_2=\min P_2$, e sia N_2 un intero positivo tale che sia

$$\{m_i(H_{p_2})\colon i\in I\}\subset N_2U_2\,.$$

Procedendo in questo modo, troveremo una successione decrescente (P_k) di parti infinite di N, una successione decrescente (F_k) di elementi di $\mathcal{A}$, e una successione (N_k) d'interi positivi, soddisfacenti alle condizioni:

(1) $$H_p \subset F_k \text{ per ogni } p \in P_k, \text{ e } k \geq 1;$$

(2) $$\{m_i(H_{p_k}) : i \in I\} \subset N_k U_1, \text{ per ogni } k \geq 1;$$

(3) $$m^+_{p_k}(F_{k+1}) \subset U_{k+1}, \text{ per ogni } k > 1;$$

(4) $$p_{k+1} > N_k + p_k, \text{ per ogni } k \geq 1,$$

(avendo denotato con p_k il minimo elemento di P_k, per ogni k).

Essendo dunque soddisfatte le ipotesi del Lemma 3.4, esiste una sottosuccessione $(H_{p_{k_j}})$ ed un insieme $F \in A$, per cui risulta

$$H_{p_{k_j}} \subset F, \quad \text{e} \quad F \setminus (H_{p_{k_1}} \cup \ldots \cup H_{p_{k_j}}) \subset F_{k_j+1}, \text{ per ogni } j.$$

Sia ora N un intero positivo per cui si abbia

$$\{m_i(F) : i \in I\} \subset NU_1.$$

Fissato j, avremo:

$$m_i(F) = m_i(H_{p_{k_1}} \cup \ldots \cup H_{p_{k_{j-1}}}) + m_i(H_{p_{k_j}}) + m_i(F \setminus (H_{p_{k_1}} \cup \ldots \cup H_{p_{k_j}})),$$
per ogni $i \in I$;

In virtù della (2), si ha poi, per ogni $i \in I$,

$$m_i(H_{p_{k_1}} \cup \ldots \cup H_{p_{k_{j-1}}}) \in (N_1 + N_2 + \ldots + N_{p_{k_{j-1}}})U_1.$$

Infine, per la (3), si ha

$$m_{p_{k_j}}(F \setminus (H_{p_{k_1}} \cup \ldots \cup H_{p_{k_j}})) \in m^+_{p_{k_j}}(F_{k_j+1}) \subset U_{k_j+1} \subset U_1,$$

e quindi

$$m_{p_{k_j}}(H_{p_{k_j}}) \in (1 + N_1 + N_2 + \ldots + N_{p_{k_{j-1}}} + N)U_1 \subset (p_{k_j} + N)U_1.$$

Ora, per j abbastanza grande, è $p_{k_j} > N$, e quindi si ha

$$m_{p_{k_j}}(H_{p_{k_j}}) \in p_{k_j} U,$$

e ciò è assurdo. Il teorema pertanto è provato.

BIBLIOGRAFIA

[1] J. Diestel - J. J. Uhl, *Vector Measures*, A.M.S., Providence (1977).

[2] B. T. Faires, *On Vitali-Hahn-Saks-Nikodym type theorems*, Ann. Inst. Fourier, 26 (1976), 99-114.

[3] R. Haydon, *A non-reflexive Grothendieck space does not contain l_∞*, Israel J. Math., 40 (1981), 65-73.

[4] J. Kupka, *Uniform boundedness principles for regular Borel vector measures*, J. Austral. Math. Soc., 29 (1980), 206-218.

[5] D. Landers - L. Rogge, *The Hahn-Vitali-Saks and the uniform boundedness theorem in topological groups*, Manuscripta Math., 4 (1971), 351-359.

[6] A. Moltò, *On the Vitali-Hahn-Saks theorem*, Proc. Royal Soc. Edinburg, Sect. A, 90 (1981), 163-173.

[7] A. Moltò, *On uniform boundedness properties in exhausting additive set function spaces*, Proc. Royal Soc. Edinburgh, Sect. A, 90 (1981), 175-184.

[8] P. Morales, *Boundedness for uniform semigroup-valued set functions*, to appear in Lect. Notes Math. (1984).

[9] O. Nikodym, *Sur les familles bornées de fonctions parfaitement additives d'ensemble abstrait*, Monatsh. Math. Phys., 40 (1933), 418-426.

[10] W. Schachermayer, *On some classical measure-theoretic theorems for non-sigma-complete Boolean Algebras*, Dissertationes Math., 214 (1982).

Direttore responsabile: Prof. A. Ballio - Autorizz. Trib. di Roma n. 7269 dell'8-12-1959
« Monograf » - Via Collamarini, 5 - Bologna