LAURA BADER (*)

Isomorfismo di H-anelli semplici e artiniani (**)  

On simple Z-ternary algebras with minimum condition for one-sided ideals.

Summary. — By using the classifications given by F. Bartolozzi, G. Panella [1] and L. Propera [6], we find some characteristic conditions so that two simple artinian Hestenes ternary rings come to be isomorphic.

1. Introduzione


Successivamente, sono stati classificati gli H-anelli semplici e artiniani (a destra e a sinistra), provando che esauriscono (a meno di isomorfismi) le seguenti classi:

Classe A (F. Bartolozzi e G. Panella [1]): Siiano $k$ un corpo, $\tau$ un suo antiautomorfismo involutorio, $V$ e $W$ $k$-spazi vettoriali (sinistri$^2$), non

(*) Istituto Matematico «Renato Caccioppoli», via Mezzocannone 8, 80134 Napoli. L’autore appartiene al G.N.S.A.G.A. in qualità di borsista del C.N.R.

(**) Memoria presentata dal socio C. Miranda il 10 febbraio 1979.

(1) I numeri in [ ] si riferiscono alla bibliografia in fine della presente Nota.

(2) Se $G(+) \equiv$ gruppo abeliano e $f, q$ sono elementi di $\text{End}(G)$, decidiamo di definire $f q$ con la posizione $x (f g) = (x f) g$ se $x \in G$ e di strutturare $G(+) \equiv k$-spazio vettoriale (sinistro) $T$ fissando un antiomorfismo $k \rightarrow \text{End}(G)$ del corpo $k$ all'anello End$(G)$, che manda l’identità nell’identità. Con tali convenzioni, e indicando con $ax$ l’elemento di $G$ trasformato del suo elemento $x$ con l’immagine in $\text{End}(G)$ di $a \in k$, ha senso la scrittura $axp$ e $p$ è applicazione $k$-lineare da $T$ a un $k$-spazio vettoriale.
nulli e) finitamente generati, \( b : V \times V \rightarrow k \) e \( g : W \times W \rightarrow k \) forme sesquilineari (a destra, relative a \( \tau e \)) non degeneri che se non sono hermitiane risultano contemporaneamente alternanti. Appartiene alla classe A l’H-anello il cui gruppo additivo sostegno è \( R = \text{Hom}_k (V,W) \) e la cui operaione ternaria è definita dall’applicazione \( R \times R \times R \rightarrow R \) nella quale \( (p, q, t) \rightarrow pq^* t \) se \( p, q, t \in R \), ove \( q^* \in \text{Hom}_k (W,V) \) (aggiunto a sinistra di \( q \) rispetto ad \( b \) e \( g \)) è individuato dalla pretesa \( b \langle v, wq^* \rangle = g \langle vq, w \rangle \) se \( v \in V \) e \( w \in W \). Scriviamo \( R = k (\tau, n, m, b, g) \), avendo posto \( n = \dim V \) e \( m = \dim W \).

**Classe B (L. Profera [6]):** Siano \( k \) un corpo, \( V \) e \( W \) \( k \)-spazi vettoriali (sinistri, non nulli e) finitamente generati. Appartiene alla classe B l’H-anello il cui gruppo additivo sostegno è \( R = \text{Hom}_k (V,W) \oplus \text{Hom}_k (W,V) \) e la cui operaione ternaria è definita dall’applicazione \( R \times R \times R \rightarrow R \) nella quale \( ((p_1, p_2), (q_1, q_2), (t_1, t_2)) \rightarrow (t_1 q_1 p_1, t_2 q_2 p_2) \) se \( p_1, q_1, t_1 \in \text{Hom}_k (V,W) \) e \( p_2, q_2, t_2 \in \text{Hom}_k (W,V) \). Se \( \dim V = n \) e \( \dim W = m \) scriviamo \( R = k (n,m) \).

In questa Nota forniamo condizioni caratteristiche per l’isomorfismo di H-anelli semplici e artiniani; perciò, tenuto conto che un H-anello di classe A non è mai isomorfo ad un H-anello di classe B (\(^3\)), dimostriamo i seguenti teoremi.

**Teorema 1.** — Gli H-anelli di classe A, \( R = k (\tau, n, m, h, g) \) e \( R' = k' (\tau', n', m', h', g') \), sono isomorfi se, e solo se, \( n = n' \), \( m = m' \) ed esistono un isomorfismo \( \varphi : k \rightarrow k' \) dal corpo \( k \) sopra il corpo \( k' \), \( \mu : V' \rightarrow V \) e \( \rho : W' \rightarrow W \) applicazioni biettive semilineari rispetto a \( \varphi^{-1} \), \( a \in k' (a \neq 0) \), tali che \( h' (x,y) = h (x\mu, y\mu)^g \) a se \( x, y \in V' \) e \( g' (x,y) = g (x\rho, y\rho)^g \) a se \( x, y \in W' \).

**Teorema 2.** — Gli H-anelli di classe B, \( R = k (n, m) \) e \( R' = k' (n', m') \), sono isomorfi se, e solo se, \( n = n' \), \( m = m' \) e il corpo \( k \) è isomorfo oppure antiisomorfo all’albero \( k' \).

In relazione al teorema 1, si noti che se \( k = k' \) e se \( k \) è corpo commutativo privo di automorfismi non identici, l’isomorfismo di \( R \) con \( R' \) equivale alla pretesa che l’applicazione lineare \( \mu \) sia una similitudine dalla geometria (hermitiana o simplettica) \( (V', h') \) alla geometria \( (V, h) \) o che \( p \) risulti una similitudine dalla geometria \( (W', g') \) alla geometria \( (W, g) \); anzi, il fattore di similitudine è un medesimo elemento del corpo commutativo \( k \). Si noti anche che se \( b, g \) sono forme alternanti (e perciò \( k \) è corpo commutativo) e se \( k = k' \), il teorema 1 garantisce che l’H-anello \( R \), a meno di isomorfismi, risulta indipendente da \( b \) e \( g \); ossia in questo caso, \( R \) è definito da \( k, n, m \).

La Nota è suddivisa in due parti (nn. 2 e 3) dedicate alla dimostrazione dei teoremi che abbiamo enunciati.

\(^3\) Poiché il primo è privo di ideali bilateri effettivi ed il secondo ne possiede esattamente due, precisamente \( \text{Hom}_k (V,W) \) e \( \text{Hom}_k (W,V) \).
2. Dimostrazione del teorema 1

Stabiliamo, innanzitutto, i lemmi 1-6, conservando il simbolismo adottato nell’enunciato del teorema 1.

Lema 1. — Se D (risp. S) è ideale destro (risp. sinistro) minimale dell’H-anello R = k (τ, n, m, h, g) esistono d ∈ D e s ∈ S atti a fornire al sottogruppo k₁ = Ds*d del gruppo additivo sostegno di R una struttura di corpo k₁ (+, o) con l’operazione aob = as*b se a, b ∈ k₁. Il corpo k₁ è isomorfo al corpo k.

Dimostrazione (⁴). Per il lemma 5 di [1], è sufficiente dimostrare l’isomorfismo dei corpi k₁ e k. Notoriamente ([1]; lemma 1 e corollario 1) risulta D = {f ∈ R / Hf = (o)}, risp. S* = {q* / q ∈ R e Uq* = (o)}, con H iperpiano di V, risp. U iperpiano di W. (o) ⊅ k₁ = Ds*d comorta Ws* = <ν>, Vd = <w>, V = <v> ⊕ H per opportuni v ∈ V e w ∈ W; essendo d (in virtù del lemma citato all’inizio della dimostrazione) identità del corpo k₁ è vd = dw, us* = sv con δ ∈ k per i quali s δ = 1. Se a ∈ k₁, risulta Ha = (o), va = αw con α ∈ k definito da a e si individua l’applicazione k₁ → k, a → α se a ∈ k₁, che è, banalmente, un monomorfismo di corpi. È un isomorfismo, poiché se p ∈ D è definito con la presa Hp = (o) e wp = δxw essendo x ∈ k, è c = ps*d ∈ k₁, wc = δxsegue = δxw e c → δx = x in quel monomorfismo.

Lema 2. — Se esiste un isomorfismo χ dall’H-anello R = k (τ, n, m, h, g) su l’H-anello R’ = k’ (τ’, n’, m’, h’, g’) risulta n = n’, m = m’ ed i corpi k e k’ sono isomorfi.

Dimostrazione. E’ n = n’, risp. m = m’, poiché n, risp. m, rappresenta la lunghezza massima delle catene strettamente discendenti di ideali destri, risp. sinistri, dell’H-anello R ([1]; lemma 1) e χ è isomorfismo di H-anelli. Inoltre, il corpo k₁ = k₁ (+, o), isomorfo al corpo k ed oggetto del lemma 1, si costruisce a partire da D, S con D (risp. S) ideale destro (risp. sinistro) minimise di D e da d ∈ D, s ∈ S, ed ha sostegno k₁ = Ds*d; anzi ([1]; lemmi 3 e 5) s e d definiscono un corpo k₁ di tipo dovuto se, e solo se, xd*s = x e ds*y = y quando x ∈ S e y ∈ D. Poiché tutte le precedenti pretese sono invarianti sotto l’azione di χ, è individuato, stante il lemma 1, un corpo k₁ (+, o), k’ ⊆ R’, a partire da (D)χ, da (s)χ ∈ (S)χ e da (d)χ ∈ (D)χ, che è isomorfo al corpo k’; la restrizione di χ a k₁ è, ovviamente, un isomorfismo dal corpo k₁ al corpo k’.

Lema 3. — Se w* ∈ W, v* ∈ V si ponga H₁ = {v ∈ V / h (v, v*) = (o)}, D₁ = {f ∈ R / H₁f = (o)}, S₁ = {f ∈ R / Vf ⊆ <w*>}. Siano w*, w* ∈ W − {o} e v*, v* ∈ V − {o}: si ha g (w*, w*) = 0 se e solo se S₁S₁S₁ = (o), h (v*, v*) = 0.

(⁴) D (risp. S) è ideale destro (risp. sinistro) dell’H-anello R se è sottogruppo del gruppo additivo sostegno di R e se risulta DR*R ⊆ D (risp. RR*S ⊆ S).
se e solo se $D_i D_i^* D_i = (0)$. In conseguenza, se esiste un isomorfismo $\chi$ dall'\textit{H-anello $R = k (\tau, n, m, h, g)$ sopra l'\textit{H-anello $R' = k' (\tau', n', m', h', g')$, la forma sesquilineare $h$, risp. $g$, è alternante se e solo se la forma sesquilineare $h'$, risp. $g'$, è alternante.}

\textbf{Dimostrazione.} Il corollario 1 di [1] garantisce $S_\pi = \{ f^* / f \in S_\pi \} = \{ f^* / f \in R \text{ e } U_f f^* = (0) \}$, essendo $U_f$ il sottospazio di $W$ $g$-ortogonale a $\langle w^\delta \rangle$. $S_\pi S_\pi S_\pi S_\pi = (0)$ equivale a $V S_\pi S_\pi S_\pi = (0)$, ossia a $w^\delta S_\pi S_\pi = (0)$ che significa esattamente $w^\delta \in U_f$, cioè $g (w^\delta, w^\delta) = 0$. Analogamente, sempre per il corollario citato, $D_i D_i^* D_i = (0)$ equivale a $b (v', v') = 0$. Poiché quanto già stabilito trae la nozione di vettore di $W$ isotropo rispetto ad $b$, risp. di $W$ isotropo rispetto a $g$, in una condizione che è invariante sotto l'azione dell'isomorfismo $\chi$, il lemma è compiutamente dimostrato.

\textbf{Lemma 4.} — Siano $\chi$ un isomorfismo dall'\textit{H-anello $R = k (\tau, n, m, h, g)$ sopra l'\textit{H-anello $R' = k' (\tau', n', m', h', g')$, $B (W) = \{ v^1, ..., v^m \}$ una base di $V$, $B (W') = \{ v'^1, ..., v'^n \}$ una base di $W$ e si ponga $H_i = \langle v^i, ..., v^m \rangle$ (5), $D_i = \{ f \in R / \text{H.f} = (0) \}$, $S_i = \{ f \in R / \text{V.f} \subseteq \langle w^\delta \rangle \}$ se $i \in \{ 1, ..., m \}$. Risulta $D_i S_i D_i' = \{ f' \in R' / \text{H'.f'} = (0) \}$ con $H_i$ opportuno iperpiano di $V'$, $S_i \chi = S_i' = \{ f' \in R' / \text{V'.f'} \subseteq \langle w'^\delta \rangle \}$, con $w'^\delta$ opportuno vettore non nullo di $W'$, $B (W') = \{ v'^1, ..., v'^n \}$ è base di $W'$, $B (W') = \{ v^1, ..., v^m \}$ è base di $W$, $B (V') = \{ v'^1, ..., v'^n \}$ è base di $V'$. $w'^\delta \in H'_i$ se $v'_i \neq v^i \in H'_1 \cap ... \cap H'_i \cap ... \cap H'_n$. In tali condizioni $B (V')$ risp. $B (W')$, è base $h'$-ortogonale, risp. $g'$-ortogonale (oppure $h'$-simplettica, risp. $g'$-simplettica) se e solo se $B (V)$, risp. $B (W)$, è base $h$-ortogonale, risp. $g$-ortogonale (oppure $h$-simplettica, risp. $g$-simplettica) (6).

\textbf{Dimostrazione.} È $D_i' = \{ f' \in R' / \text{H'.f'} = (0) \}$ per il lemma 1 di [1], poiché $D_i$ è ideale minimale di $R$ e $\chi$ è isomorfismo di $\textit{H}$-anelli. $R = D_1 + ... + D_n$ (a livello di gruppo additivo) comporta $R' = D'_1 + ... + D'_n$, quindi $\bigcap_{i=1}^n H'_i = (0)$ ed essendo $n = n'$ per il lemma 2, esiste $v'^i \in \Pi'_1 \cap ... \cap \Pi'_i \cap ... \cap \Pi'_n$ con $v'^i \neq 0$. $B (V') = \{ v'^1, ..., v'^n \}$ è parte libera di $V'$, anzi è una sua base (poiché $n = n'$). Analogamente, si prova che $B (W')$ è base di $W'$. Si supponga, ora, che $B (V)$ sia base $h$-ortogonale di $V$, quindi $b (v^i, v^i) = 0$ se $i \neq t (i, t = 1, ..., n)$ che significa, per il lemma 3, $D_i D_i^* D_i = (0)$. Tale condizione equivale a prenderdere che il prodotto, in $R'$, degli elementi $x', y', z'$ con $x', z' \in D'_1$ e $y' \in D'_i$ sia nullo ossia, sempre per il lemma 3, $b' (v'^i, v'^i) = 0$ che significa: $B (V')$ è base $h'$-ortogonale di $V$. Analogamente si discute il caso in cui $B (V)$ sia base $b$-simplettica di $V$, oppure $B (W)$ sia base $g$-ortogonale o $g$-simplettica di $W$.

(5) $\bigcap$ indica cancellazione.

(6) $B (V)$ $h$-ortogonale signifca $b (v^i, v^i) = 0$ se $i \neq t (i, t = 1, ..., n)$, mentre $B (V)$ $b$-simplettica signifca $(n = 2s e) b (v^i, v^i) = 0$ se $(i, t) \neq (2p-1, 2p) (p = 1, ..., s)$; quindi non si preteende $b (v^{2s-p}, v^{2p}) = 1$. 
Lemma 5. — Si consideri l’H-anello \( R = k (\tau, n, m, h, g) \), siano \( B (V) = \{v^1, \ldots, v^n\} \) una base di \( V, B (W) = \{w^1, \ldots, w^m\} \) una base di \( W \) e \( k_{n,m} \) indichi il gruppo additivo delle matrici ad elementi in \( k \) aventi \( n \) righe e \( m \) colonne. Se \( p \in R \) e \( v_p = \sum_{a=1}^{n} p_a v^a \) \( (p_a \in k) \) si individua \( P = \| p_a \| \in k_{n,m} \) (i indice di riga, \( \alpha \) indice di colonna). L’applicazione \( \chi : R \to k_{n,m}, p \to P \), è isomorfismo additivo e risulta \( (pq^a)^t \chi = PCQ^ST \) se \( p, q, t \in R \), essendo \( Q^a = \| q_a^a \| \in k_{m,n} \) (7), \( C = \| g (w^a, w^a) \| \in k_{m,m} \) e \( S^{-1} = \| h (v^a, v^a) \| \in k_{n,n} \).

Dimostrazione. Se \( w^a q^a = \sum_{s=1}^{n} x^a_s v^s \) \( (x^a_s \in k) \), \( g (v^a, w^a) = h (v^a, w^a q^a) \) fornisce \( \sum_{s=1}^{n} q^a_s g (w^a, w^a) = \sum_{s=1}^{n} h (v^a, v^a) \) \( (x^a_s)^* \). Poiché \( h \) è non degenerale, esiste \( s \in k_{n,n} \) tale che \( S^{-1} = \| h (v^a, v^a) \| \) e sì ha \( QC = S^{-1}X^* \) con \( X = \| x^a_s \| \in k_{m,n} \); se \( h \) e \( g \) sono hermitiane, risp. alternanti, \( C^* = C \) e \( (S^{-1})^* = S^{-1} \) risp. \( C^* = -C \) e \( (S^{-1})^* = -S^{-1} \) mentre l’eventuale « caso misto » fornisce ancora la prima coppia di eguaglianze poiché, allora, \( k \) è corpo commutativo di caratteristica due e \( v \) è l’automorfismo identico di \( k \). Ne deriva \( CQ^* = XS^{-1}, X = CQ^*S \). Da qui segue ovviamente il lemma.

Lemma 6. — Considerati gli H-anelli \( R = k (\tau, n, m, h, g) \) e \( R' = k' (\tau', n', m', h', g') \) si supponga \( n = n' \), \( m = m' \) ed esista un isomorfismo \( \Psi : k \to k' \) dal corpo \( k \) sopra il corpo \( k' \). Con \( \psi : V \to V', \pi : W \to W' \) applicazioni biettive semilineari rispetto a \( \Psi \) si ponga \( \tilde{h} (x, y) = h' (xV, yV)^{v^1} \) se \( x, y \in V \) e \( \tilde{g} (x, y) = g' (x\pi, y\pi)^{v^1} \) se \( x, y \in W \). È definito, così, l’H-anello di classe A \( R = k (\tilde{\tau}, n, m, h, g) \) che ha sostegno \( R = \text{Hom}_k (V, W) = R \) e per il quale \( x^a = (x^a)^{v^1} \) se \( x \in k \); gli H-anelli \( R' \) e \( R \) sono isomorfi.

Dimostrazione. Se \( p \in R' = \text{Hom}_k (V', W') \), \( \tilde{p} = \nu p \nu^{-1} \) è elemento di \( R = \text{Hom}_k (V, W) = R \) (si ricordi, \( \nu p = ((\nu \nu) p) \nu^{-1} \) se \( v \in V \)) e l’applicazione \( R' \to R, p \to \nu p \nu^{-1} \), è isomorfismo additivo da \( R' \) sopra \( R \). Per definizione, \( pq^a t \to \nu pq^a t \nu^{-1} \) se \( p, q, t \in R' \) e rimane da provare \( \nu pq^a t \nu^{-1} = (\nu p \nu^{-1}) (\nu t \nu^{-1}) \) (ove la soprakilometria indica aggiunzione rispetto a \( \tilde{g} \) e \( \tilde{h} \)) ossia \( q^a = \nu p^{-1} (\nu q^a \nu^{-1}) \). Essendo \( \tilde{g} (xVq^{-1}, y) = \tilde{h} (x, y) \) \( (x V q^{-1}) \) se \( x \in V, y \in W \), con \( x' = xv \in V' \) e \( y' = y \pi \in W' \) si ha, per definizione di \( \tilde{h} \) e \( \tilde{g} \), \( g^* (x', y')^{v^1} = h^* (x', y')^{v^1} (\nu q^{-1}) \) \( (v^{-1} \nu^{-1}) \), che è quanto si doveva dimostrare.

Stabiliti i lemmi 1-6, a conclusione del presente numero desumiamo da essi la

Dimostrazione del teorema 1. — Supponendo, innanzitutto, che gli H-anelli \( R \) e \( R' \) siano isomorfi, perverremo alle conclusioni che debbono discendere da

(7) Il prodotto tra matrici, ora e nel seguito, si esegue righe per colonne; se \( X \in k_{n,m} \), \( X^t \) indica la sua matrice trasposta.
tale ipotesi. Per il lemma 2, deve essere \( n = n', m = m' \) e i corpi \( k \) e \( k' \) devono essere isomorfi. Ne deriva, in virtù del lemma 6, tenuto conto della definizione delle forme sesquilineari \( h \) e \( g \) (hermitiane o alternanti) data nell’enunciato di quel lemma, che non è restrittivo supporre \( k = k', V = V', W = W' \) ossia, a livello insiemistico, \( R = \text{Hom}_k(V, W) = R' \). Siano \( B(V) = \{ v^1, \ldots, v^p \} \), risp. \( B(W) = \{ w^1, \ldots, w^q \} \), una base di \( V \), risp. \( W \), e si fissino le basi \( B'(V) = \{ v'^1, \ldots, v'^p \} \) di \( V \), risp. \( B'(W) = \{ w'^1, \ldots, w'^q \} \) di \( W \), tra quelle definite, nel senso del lemma 4, dal dato isomorfismo dall’H-anello \( R \) sopra l’H-anello \( R' \). Tenuto conto del lemma 5, con tali dati l’isomorfismo da \( R \) sopra \( R' \) definisce un’applicazione \( f : k_{n, m} \to k_{n, m'} \) che è un automorfismo additivo e nella quale

\[
(1) \quad (X SY \ast Z f) = (X f) \Gamma (Y f) \Sigma (Z f) \text{ se } X, Y, Z \in k_{n, m}
\]

avendo posto \( C = \| g(w^a, w^b) \|, \Gamma = \| g'(w'^a, w'^b) \| \in k_{m, n} \) e \( S^{-1} = \| h(v', v') \| \), \( \Sigma^{-1} = \| h'(v'^i, v'^i) \| \in k_{n, n} \) mentre la sopraforma indica trasformazione degli elementi della matrice \( Y f \) con \( \tau' \) e trasposizione della matrice così ottenuta. Dalla (1) perverremo alla tesi discutiamo le seguenti due possibilità.

**Prima possibilità**: \( h \) e \( g \) sono forme hermitiane e non sono alternanti. In tal caso, \( B(V) \), risp. \( B(W) \), si può supporre base \( b \)-ortogonale, risp. \( g \)-ortogonale, e, per il lemma 4, la medesima eventualità si presenta per \( B'(V) \) e \( B'(W) \). Ne deriva che tutti e soli gli elementi non nulli che compaiono in \( C, \Gamma, S^{-1}, \Sigma^{-1} \) sono quelli delle loro diagonali principali e possiamo porre \( C = \text{diag}(c_1, \ldots, c_m), \Gamma = \text{diag}(\gamma_1, \ldots, \gamma_m), S^{-1} = \text{diag}(s_{1-1}, \ldots, s_{n-1}), \Sigma^{-1} = \text{diag}(\sigma_{1-1}, \ldots, \sigma_{n-1}) \), con \( c_a, \gamma_a, s_t, \sigma_t \) elementi non nulli del corpo \( k (\alpha = 1, \ldots, m; i = 1, \ldots, n) \); gli elementi \( c_a, s_t \) sono fissati da \( \tau \), e \( \gamma_a, \sigma_t \) sono fissati da \( \tau' \). Con le notazioni del lemma 4, se \( p \in D_i \cap S_i \) è \( p \chi \in D_i \cap S_i \) e, stante il lemma 5, \( p \) individua la matrice \( P = xe^a_i \in k_{n, m} \) (con \( x \in k \) in riga \( i \), colonna \( \alpha \) e zero altrove) in relazione alle basi \( B(V) \), \( B(W) \), mentre \( p \chi \), sempre per quel lemma, si rappresenta, in relazione alle basi \( B'(V) \) e \( B'(W) \), con la matrice \( (xe^a_i)E^a_i \in k_{m, n} \), essendo \( f_a : k \to k, x \to xe^a_i \) se \( x \in k \), un automorfismo additivo. Ossia nel senso della (1), risulta \( (xe^a_i)E^a_i = (xe^a_i)E^a_i \) e con \( X = xe^a_i, Y = ye^b_i, Z = ze^c_i \in k_{n, m} (x, y, z \in k; i, j, \alpha, \beta, \gamma \in \{ 1, 2, \ldots, m \}; i, s, t \in \{ 1, 2, \ldots, n \} \), la (1) fornisce \( (xcyx'z's)\gamma^a_i E^a_i = (xcyx'z's)\gamma^a_i E^a_i \) e la (2) con \( x = x^t = x^c_i = z = z^t = z^c_i = 1 \) si trova \( 1 = F^a_i \gamma^a_i (F^a_i)^{-1} \). Poniendo \( 1f_a = F^a_i, F^a_i \neq 0, e \) si individua l’automorfismo additivo \( \Phi^a : k \to k \) nel quale \( x\Phi^a_i = (xe^a_i)(F^a_i)^{-1} \) per la (2) con \( i = t \) e \( y = 1 \) fornisce \( x\Phi^a_i = x\Phi^a_i : \) l’automorfismo del corpo \( k \). In conseguenza, la (2) con \( i = t \) e \( y = 1 \) fornisce \( x\Phi^a_i = x\Phi^a_i : \) l’automorfismo del corpo \( k \) è indipendente da \( \alpha \) e si può porre \( \Phi^a_i = \Phi^a = \Phi^a_i = \Phi^a_i \) e la (2),
con \( i = r \), si scrive \((c_s \varphi^i) [(y^i) \varphi^i] (s_1 \varphi^i) = F^i_s \gamma_s (F^i_s)^\varphi (y \varphi^i)^\varphi \sigma_i\). Si può, pertanto, definire (si ponga \( y = 1 \)):

\[
(3) \quad a^i = (s_1 \varphi^i) \sigma_i^{-1} = (c_s^{-1} \varphi^i) F^i_s \gamma_s (F^i_s)^\varphi
\]

e, poiché \((s_1 \varphi^i) \sigma_i^{-1}\) non dipende da \( \alpha \), deve risultare

\[
(4) \quad (y^i) \varphi^i = a^i (y \varphi^i)^\varphi (a^i)^{-1} \text{ se } y \in k.
\]

A questo punto, si ponga \( \varphi^i = \varphi \), \( a^i = a \); la (3) fornisce, per \( i = 1 \), \( (c_s \varphi) \sigma_i \equiv F^i_s \gamma_s (F^i_s)^\varphi \) che significa \( g (w^i, w^i)^\varphi \sigma_i = F^i_s \gamma_s (w^i, w^i)^\varphi \sigma_i \). Poiché \( B (W) \), risp. \( B^i (W) \), è base \( g \)-ortogonale, risp. \( g^i \)-ortogonale, si ha, in conseguenza, \( g (w^i, w^i)^\varphi \sigma_i = g' (F^i_s w^i, F^i_s w^i)^\varphi \sigma_i \), \( \alpha, \beta \in \{1, 2, \ldots, m\} \). Sia ora, \( \rho : W \to W \) l'applicazione (bietttiva) semilineare rispetto a \( \varphi^{-1} \) definita con la pretesa \( w^\rho = (F^i_s w^i) \rho (\alpha = 1, 2, \ldots, m) \); posto \( w^\rho = F^i_s w^i \) è, quindi,

\[
g (w^\rho, w^\rho)^\varphi \sigma_i = g' (w^\rho, w^\rho)^\varphi \sigma_i.
\]

La (4) si traduce in

\[
(5) \quad (y^i) \varphi^i = a^i (y \varphi^i)^\varphi (a^i)^{-1} \text{ se } y \in k.
\]

L'ultima relazione, moltiplicata a destra per \( y^i \) fornisce, per somma,

\[
x (x^i, y^i)^\varphi \sigma_i = g' (x^i, y^i)^\varphi \sigma_i \quad \text{se} \quad i = 1, \ldots, n,
\]

e si conclude che (4), per \( i = 1 \), garantisce \( (y^i \varphi^i)^\varphi \sigma_i = a y^i \).

Per concludere, la (2) calcolata per \( i = 1, \alpha = \gamma, y = 1 \) fornisce \((c_s \varphi^i) (s_1 \varphi^i) (z \varphi^i) F^i_s = F^i_s \gamma_s (F^i_s)^\varphi \sigma_i (z \varphi^i) \sigma_i = F^i_s \gamma_s (F^i_s)^\varphi \sigma_i \). Per la (3), ciò significa \( (F^i_s)^\varphi \sigma_i = (a^i)^{-1} (s_1^{-1} \varphi^i) \sigma_i = F^i_s \gamma_s (F^i_s)^\varphi \sigma_i \). Tutte le somme di ciò e della (3) si trova \( s_1^{-1} \equiv \left[ (s_1^{-1} \varphi^i) \sigma_i \right] (c_s^{-1} \varphi^i) F^i_s \gamma_s (F^i_s)^\varphi \sigma_i \gamma_s (F^i_s)^\varphi \sigma_i \). E le somme con \( s_1^{-1} \equiv \left[ (F^i_s (F^i_s)^{-1} \varphi^i) \sigma_i \right] (c_s^{-1} \varphi^i) F^i_s \gamma_s (F^i_s)^\varphi \sigma_i \gamma_s (F^i_s)^\varphi \sigma_i \) e la relazione cui siamo pervenuti garantisce \( b\' (v^i, v^i) = d^i b (v^i, v^i) d^i \) per \( i = 1, \ldots, n \). Da qui, se \( \mu : V \to V \) è l'applicazione (bietttiva) semilineare rispetto a \( \varphi^{-1} \) definita con la pretesa \( v^i \mu = v^i \mu \) \( i = 1, 2, \ldots, n \) si ricava, come in precedenza per \( g \) e \( g' \), \( b\' (x, y) = b (x \mu, y \mu) \) a quando \( x, y \in V \).

Seconda possibilità: \( h \) e \( g \) sono forme alternanti (quindi \( k \) è corpo commutativo e \( \tau, \tau' \) sono il suo automorfismo identico). In tal caso \( B (V) \), risp. \( B^i (W) \), si può sostituire base \( h \)-simplettica, risp. \( g \)-simplettica, e, per il lemma 4, la medesima eventualità si presenta per \( B' (V) \) e \( B^i (W) \); inoltre, moltiplicando per opportuni scalari i vettori di \( B (V) \) e \( B^i (W) \), si può richiedere \( h (v^i, v^i+1) = 1 \) e \( b' (v^i, v^i+1) = 1 \) se \( i \) è intero dispari. Se \( \varphi \) è un qualsiasi automorfismo di \( k \) e \( a \) è un qualsiasi elemento non nullo di \( k \), sia \( \mu : V \to V \) l'applicazione (bietttiva) semilineare rispetto a \( \varphi^{-1} \) definita ponendo \( v^i \mu = (a_i) \varphi v^i \) se \( i \) è dispari e \( v^i \mu = v^i \mu \) quando \( i \) è pari \((i = 1, 2, \ldots, n)\); risulta \( b' (v^i, v^i) = b (v^i, v^i) \mu \) a se \( i, j = 1, 2, \ldots, n \), da cui segue \( b' (x, y) = b (x \mu, y \mu) \mu \) a se \( x, y \in V \).
niera analoga si prova quanto dovuto relativamente alle forme $g$ e $g'$. Da notare l'arbitrarità dell'automorfismo $\varphi$ del corpo $k$ e di $a$ elemento non nullo di $k$.

Terza possibilità: $b$ è forma hermitiana e $g$ è forma alternante (o viceversa; in tal caso $k$ è corpo commutativo di caratteristica due e $\tau, \tau'$ sono l'automorfismo identico di $k$). Per quanto già provato si può pensare $b$ hermitiana non alternante. Si supponga la base $B (V)$ $b$-ortogonale e la base $B (W)$ $g$-simplettica; per il lemma 4, $B' (V)$ è $b'$-ortogonale e $B' (W)$ è $g'$-simplettica. Ne segue che tutti e soli gli elementi non nulli che compaiono in $S^{-1}$ e $\Sigma^{-1}$ sono quelli delle diagonalì principali e possiamo porre $S^{-1} = \text{diag} (s_i^{-1}, ..., a_{n}^{-1})$ e $\Sigma^{-1} = \text{diag} (\sigma_{i}^{-1}, ..., \sigma_{n}^{-1})$. Ad ogni applicazione $p \in D_i \cap S_i$, risp. $p_{X_i} \in D_i X_i \cap S_i X_i, (\alpha = 1, 2)$ rimane associata, stante il lemma 5 ed analogamente a quanto precisato nella dimostrazione della prima possibilità, la matrice $P = x E_i, \text{ risp. } \bar{P} = (x f_i(a)) E_i$, e si individua l'automorfismo additivo $f_i : k \rightarrow k, x \rightarrow x f_i(a) \text{ se } x \in k$. Calcolando la (1) relativamente a $p \in D_i \cap S_i, q \in D_i \cap S_i, t \in D_i \cap S_i (i, j = 1, 2, ..., n)$, risulta, in analogia alla (5):

\[(xy_1 y_2) \psi_1 = (x \psi_1) \gamma (y \psi_2) F_1 y_2 \sigma_1 (z \psi_1) F_1\]

con $x, y, z \in k, c = g (w, w', w'')$, $\gamma = g' (w, w')$, $F_1 = f_1 x P = 0$ e $\varphi_i : k \rightarrow k, x \rightarrow (x f_i(a)) (F_1 a)^{-1}$ se $x \in k$; come in precedenza si prova che $\varphi_i$ è automorfismo di $k$. Posto in (5) $y = c^{-1} g^{-1}, s_i^{-1}$, si ha $\varphi_i = \gamma [c^{-1} g^{-1}] F_2 \sigma_{i} (z \psi_i) F_1$, e, per $z = 1, 1 = \gamma [(c^{-1} g^{-1}) \psi_i] F_2 \sigma_{i} F_1$, dunque $\varphi_i = \psi_i$; con metodo simile, la (5) scritta con $z = c^{-1} g^{-1}, i = j$ dà $\varphi_i = \psi_i$: si potrà quindi porre, per $\alpha = 1, 2$ e $i = 1, 2, ..., n$, $\varphi_i = \varphi$. Analogamente alla (5), risulta $(xy_1 y_2) \psi_2 F_2 = (x \psi_1) F_1 \gamma (y \psi_2) F_2 \sigma_{i} F_2 F_1$, e, con $x = y = z = 1$, si ha $(c \varphi)(s \varphi) F_2 = F_1 \gamma F_2 \sigma_{i} F_2$; posto in (5) $x = y = z = 1$, si trova $(c \varphi)(s \varphi) = \gamma F_2 \sigma_{i} F_1$ e, confrontando con la precedente uguaglianza, si ricava $F_1 = F_1 \gamma F_2 \sigma_{i} F_2$ e si individua $T = F_1 (F_2)^{-1} = F_1 (F_2)^{-1}$. Se $a = (c^{-1} \varphi) \gamma T = \sigma_1^{-1} (s_1^{-1} \varphi)(c^{-1} \varphi) \gamma F_2 F_1 = (s_1^{-1} \varphi) (c^{-1} \varphi) \gamma T (F_2)^{-1} a (F_2)^{-1}$ o anche, esplicitando, $b' (F_2 v', F_2 v') = b' (v', v') a$, con $a, \gamma T$ e $\sigma_1^{-1}$ tali che $b' (x, y) = b (x \mu, y \mu)^{a}$ se $x, y \in V$. Infine, poiché $g$ e $g'$ sono forme alternanti, le argomentazioni svolte nella dimostrazione della seconda possibilità, ripetute per l'automorfismo $\varphi$ e lo scalare $a$ ora definiti, consentono di concludere la dimostrazione della terza possibilità.

Per completare la dimostrazione del teorema occorre stabilire che se risulta $n = n', m = m'$ ed esistono un isomorfismo $\varphi$ dal corpo $k$ sopra il corpo $k'$, $\mu : V' \rightarrow V$ e $p : W' \rightarrow W$ applicazioni biettive semi-lineari rispetto a $\varphi^{-1}, a \in k$ ($a \neq 0$) tali che $b' (x, y) = b (x \mu, y \mu)^{a}$ se $x, y \in V'$ e $g' (x, y) = g (x \mu, y \mu)^{a}$ se $x, y \in W'$, allora gli H-anelli di classe $A R = k (\tau, n, m, h, g)$ è $R' = k' (\tau', n', m', h', g')$ sono isomorfi. Poiché $\chi : R \rightarrow R', p \rightarrow \mu \rho^{-1}$ se $p \in R$, è isomorfismo additivo da $R$ sopra $R'$, è sufficiente provare che risulta, con $p, q, t \in R$, $\mu pq t \rho^{-1} = (\mu pq \rho^{-1}) (pq \rho^{-1}) (\mu pq \rho^{-1}) (\mu pq \rho^{-1})$ (la sopralineaatura significa aggiunzione rispetto ad $b'$ e $g'$), ovvero $\rho^{-1} \mu pq \rho^{-1} = q\ast$. Per pro-
varlo, siano \( x \in V' e y \in W' \); da
\[
b'(x, y (\mu \rho^{-1})) = g' (x (\mu \rho^{-1}), y)
\]
segue
\[
b(x \mu, y (\mu \rho^{-1}) \rho) = g(x \mu, y \rho)
\]
e, posto \( v = x \mu \in V \) e \( w = y \rho \in W \), si ha
\[
b(v \mu \omega^{-1}, (\mu \rho^{-1}) \omega) = g(v \mu, w) = b(v, w) = b'(v, w)\]
che è quanto si doveva dimostrare.

3. Dimostrazione del teorema 2

I lemmi 7-9 precederanno la dimostrazione del teorema 2; faremo riferimento al simbolismo precisato nell’enunciato del teorema.

**Lemma 7.** — Siano \( D \) (risp. \( S \)) un ideale destro (risp. sinistro) minimale dell’H-anello \( R = k(n, m) \) contenuto in \( \text{Hom}_k(W, V) \) (risp. \( \text{Hom}_m(V, W) \)). Esistono \( d \in D \) e \( s \in S \) atti ad individuare il sottogruppo \( k_1 = Dsd \) del gruppo additivo sostegno di \( R \) e a fornirgli una struttura di corpo \( k_1 (+, 0) \) con l’operazione \( a \circ b = ab \) se \( a, b \in k_1 \). Il corpo \( k_1 \) è isomorfo al corpo \( k \).

**Dimostrazione.** Per il lemma 5 di [6] è sufficiente stabilire l’isomorfismo dei corpi \( k_1 \) e \( k \). Perciò si possono usare le argomentazioni della dimostrazione del lemma 1, tenuto conto che nel caso attuale risulta ([6]; dimostrazione del teorema 2) \( D = \{ (o, \rho) \in R / U_{\rho} = (o) \} \) con \( U_{\rho} \) primo di \( W \) e \( S = \{ (q, o) \in R / H_q = (o) \} \) con \( H_q \) iperprimo di \( V \).

**Lemma 8.** — Si consideri l’H-anello \( R = k(n, m) \); siano \( B(V) = \{ v^1, ..., v^n \} \) una base di \( V \), \( B(W) = \{ w^1, ..., w^m \} \) una base di \( W \) e \( k_{n,m} \) (risp. \( k_{m,n} \)) indichi il gruppo additivo delle matrici ad elementi in \( k \) aventi \( n \) righe ed \( m \) colonne (risp. \( m \) righe ed \( n \) colonne). Se \( (p, q) \in R \) e \( v^p = \sum_{s=1}^{m} p^s v^s, w^q = \sum_{j=1}^{n} q^j v^j (p_{s}, q_{j} \in k) \) si individuano \( P = \| p^s \| \in k_{n,m} \) e \( Q = \| q^j \| \in k_{m,n} \) (l’indice superiore è di riga). Allora, se si pone \( [(P, Q) (Q_1, Q_2) (T_1, T_2) \in (T, T_1, T_2)] \equiv (T, Q_1, Q_2, P_1, P_2, Q_1 T_2) \), attribuisce al gruppo \( k_{n,m} \oplus k_{m,n} \) una struttura di H-anello e \( \Theta : R \rightarrow k_{n,m} \oplus k_{m,n} \in (p, q) \rightarrow (P, Q) \) se \( (p, q) \in R \), è isomorfismo di H-anelli.

**Dimostrazione.** Ovvia.

**Lemma 9.** — Considerati gli H-anelli \( R = k(n, m) \) e \( R^* = k^*(n*, m*) \), si supponga che \( k^* \) sia il corpo opposto di \( k \) (°) e che risulti \( n_\ast = n, m_\ast = m \). Gli H-anelli \( R \) e \( R^* \) sono isomorfi.

**Dimostrazione.** Tenuto conto del lemma 8, è sufficiente osservare che l’ap-

\(^{(4)}\) Si definisce opposto del corpo \( k(+, \cdot) \) il corpo \( k^*(\perp, T) \) con \( k^* = k \) (a livello insiemistico), \( a \perp b = a + b \) e \( a \perp b = ba \) se \( a, b \in k \); l’applicazione \( k^* \rightarrow k, a \rightarrow a \) se \( a \in k \), è anti-isomorfismo di corpi.
applicazione $\xi' : k_{n,m} \oplus k_{m,n} \rightarrow k_{n,m} \oplus k_{m,n}$, $(P, Q) \rightarrow (P, Q)$ se $(P, Q) \in k_{n,m} \oplus k_{m,n}$ è isomorfismo di H-anelli.

Stabili i lemmi 7-9, concludiamo il presente numero con la

Dimostrazione del teorema 2. — Si supponga, innanzitutto, che esista un isomorfismo $\chi$ da $R$ sopra $R'$; allora $\text{Hom}_k(V, W) \chi$ è ideale bilatero effettivo di $R'$ (7) e quindi coincide con $\text{Hom}_{k'}(V', W')$ oppure con $\text{Hom}_{k'}(W', V')$, in quanto questi sono i sostegni di tutti e soli gli ideali bilateral effettivi di $R'$ ([61], teorema 2). Nel primo caso, cioè se $\text{Hom}_k(V, W) \chi = \text{Hom}_{k'}(V', W')$, è $n = n'$, risp. $m = m'$, poiché $n$, risp. $m$, rappresenta la lunghezza massima delle catene strettamente descendenze di ideali sinistri, risp. destri, di $R$ contenuti in $\text{Hom}_k(V, W)$; inoltre, con considerazioni analoghe a quelle svolte nel lemma 2 e tenuto conto del lemma 7, si prova che esiste un isomorfismo dal corpo $k$ sopra il corpo $k'$. Se invece risulta $\text{Hom}_k(V, W) \chi = \text{Hom}_{k'}(W', V')$ e se $R' = k_{n'}(n, m)$ ha, in riferimento a $R$, il significato preciso nell'enunciato del lemma 9, posto $\chi' = \xi \chi$ (l'isomorfismo $\xi : R' \rightarrow R$ si desuma dalla dimostrazione del lemma) si ha $\text{Hom}_{k'}(V, W) \chi' = \text{Hom}_{k'}(V', W')$; la precedente discussione ci assicura $n' = n = n$, $m' = m = m$ e che esiste un isomorfismo di $k$ sopra $k'$, e quindi un antisomorfismo di $k$ sopra $k'$.

Viceversa, se $n = n'$, $m = m'$ ed esiste un isomorfismo $\varphi$ di $k$ sopra $k'$, dette $\mu : V' \rightarrow V$ e $\rho : W' \rightarrow W$ due qualsiasi applicazioni biettive semilineari rispetto a $\varphi^{-1}$, l'applicazione $\chi : R' \rightarrow R'$, $(p, q) \rightarrow (\mu p \rho^{-1}, \rho q \mu^{-1})$ se $(p, q) \in R'$, è isomorfismo di H-anelli; se invece è $n = n'$, $m = m'$ ed i corpi $k$ e $k'$ sono antisomorfi, allora risulta $n = n = n'$, $m = m = m'$ ed esiste $\psi : k' \rightarrow k'$ isomorfismo di corpi. La precedente discussione ci assicura l'esistenza di un isomorfismo da $R'$ sopra $R'$ ed il lemma 9 completa la dimostrazione.

(7) Ossia, è ideale destro e sinistro di $R'$ e $R' \left(\text{Hom}_k(V, W) \chi\right) R' \subseteq \text{Hom}_k(V, W) \chi$. 


BIBLIOGRAFIA