Rendiconti
Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL
Memorie di Matematica
98° (1979-80), Vol. IV, fasc. 2, pagg. 13-24.

LAURA BADER (*)

Isomorfismo di H-anelli semplici e artiniani (**)

On simple Z-ternary algebras with minimum condition for one-sided ideals.

SUMMARY. — *By using the classifications given by* F. BARTOLOZZI, G. PANELLA [1] *and* L. PROFERA [6], *we find some characteristic conditions so that two simple artinian* HESTENES *ternary rings come to be isomorphic.*

1. INTRODUZIONE

Gli anelli ternari associativi di secondo tipo (H-anelli), studiati da O. LOOS [5] (1), sono stati introdotti da R. A. STEPHENSON [7] che ha adottato una definizione desunta da due lavori di M. R. HESTENES ([3], [4]). Mentre R. A. STEPHENSON si è preoccupato di trasportare ad un H-anello il concetto di primitività e di stabilire un analogo del ben noto teorema di densità relativo ad anelli associativi e primitivi, O. LOOS ha fornito, tra l'altro, una classificazione degli H-anelli semplici il cui gruppo additivo sostegno è spazio vettoriale di dimensione finita sopra un corpo commutativo F e per i quali l'operazione ternaria, che struttura quel gruppo ad H-anello, risulta F-trilineare.

Successivamente, sono stati classificati gli H-anelli semplici e artiniani (a destra e a sinistra), provando che esauriscono (a meno di isomorfismi) le seguenti classi:

CLASSE A (F. BARTOLOZZI e G. PANELLA [1]): Siano k un corpo, τ un suo antiautomorfismo involutorio, V e W k-spazi vettoriali (sinistri (2), non

(*) Istituto Matematico « Renato Caccioppoli », via Mezzocannone 8, 80134 Napoli. L'autore appartiene al G.N.S.A.G.A. in qualità di borsista del C.N.R.

(**) Memoria presentata dal socio C. MIRANDA il 10 febbraio 1979.

(1) I numeri in [ ] si riferiscono alla bibliografia in fine della presente Nota.

(2) Se G(+) è gruppo abeliano e f, q sono elementi di End(G), decidiamo di definire fq con la posizione $x(fq) = (xf)\,q$ se $x \in$ G e di strutturare G(+) a k-spazio vettoriale (sinistro) T fissando un antiomomorfismo $k \to$ End(G) dal corpo k all'anello End(G), che manda l'identità nell'identità. Con tali convenzioni, e indicando con ax l'elemento di G trasformato del suo elemento x con l'immagine in End(G) di $a \in k$, ha senso la scrittura axp se p è applicazione k-lineare da T a un k-spazio vettoriale.

ISSN-0370-3460

nulli e) finitamente generati, $h: V \times V \to k$ e $g: W \times W \to k$ forme sesquilineari (a destra, relative a τ e) non degeneri che se non sono hermitiane risultano contemporaneamente alternanti. Appartiene alla classe A l'H-anello il cui gruppo additivo sostegno è $R = \mathrm{Hom}_k(V, W)$ e la cui operazione ternaria è definita dall'applicazione $R \times R \times R \to R$ nella quale $(p, q, t) \to pq^*t$ se $p, q, t \in R$, ove $q^* \in \mathrm{Hom}_k(W, V)$ (aggiunto a sinistra di q rispetto ad h e g) è individuato dalla pretesa $h(v, wq^*) = g(vq, w)$ se $v \in V$ e $w \in W$. Scriveremo $R = k(\tau, n, m, h, g)$, avendo posto $n = dim_k V$ e $m = dim_k W$.

Classe B (L. Profera [6]): Siano k un corpo, V e W k-spazi vettoriali (sinistri, non nulli e) finitamente generati. Appartiene alla classe B l'H-anello il cui gruppo additivo sostegno è $R = \mathrm{Hom}_k(V, W) \oplus \mathrm{Hom}_k(W, V)$ e la cui operazione ternaria è definita dall'applicazione $R \times R \times R \to R$ nella quale $((p_1, p_2), (q_1, q_2), (t_1, t_2)) \to (t_1 q_2 p_1, p_2 q_1 t_2)$ se $p_1, q_1, t_1 \in \mathrm{Hom}_k(V, W)$ e $p_2, q_2, t_2 \in \mathrm{Hom}_k(W, V)$. Se $dim_k V = n$ e $dim_k W = m$ scriveremo $R = k(n, m)$.

In questa Nota forniamo condizioni caratteristiche per l'isomorfismo di H-anelli semplici e artiniani; perciò, tenuto conto che un H-anello di classe A non è mai isomorfo ad un H-anello di classe B (3), dimostriamo i seguenti teoremi.

Teorema 1. — *Gli* H-*anelli di classe* A, $R = k(\tau, n, m, h, g)$ *e* $R' = k'(\tau', n', m', h', g')$, *sono isomorfi se, e solo se,* $n = n'$, $m = m'$ *ed esistono un isomorfismo* $\varphi: k \to k'$ *dal corpo* k *sopra il corpo* k', $\mu: V' \to V$ *e* $\rho: W' \to W$ *applicazioni biettive semilineari rispetto a* φ^{-1}, $a \in k'$ $(a \neq 0)$, *tali che* $h'(x, y) = h(x\mu, y\mu)^{\varphi} a$ *se* $x, y \in V'$ *e* $g'(x, y) = g(x\rho, y\rho)^{\varphi} a$ *se* $x, y \in W'$.

Teorema 2. — *Gli* H-*anelli di classe* B, $R = k(n, m)$ *e* $R' = k'(n', m')$, *sono isomorfi se, e solo se,* $n = n'$, $m = m'$ *e il corpo* k *è isomorfo oppure antiisomorfo al corpo* k'.

In relazione al teorema 1, si noti che se $k = k'$ e se k è corpo commutativo privo di automorfismi non identici, l'isomorfismo di R con R' equivale alla pretesa che l'applicazione lineare μ sia una similitudine dalla geometria (hermitiana o simplettica) (V', h') alla geometria (V, h) o che ρ risulti una similitudine dalla geometria (W', g') alla geometria (W, g); anzi, il fattore di similitudine è un medesimo elemento del corpo commutativo k. Si noti anche che se h, g sono forme alternanti (e perciò k è corpo commutativo) e se $k = k'$, il teorema 1 garantisce che l'H-anello R, a meno di isomorfismi, risulta indipendente da h e g; ossia in questo caso, R è definito da k, n, m.

La Nota è suddivisa in due parti (nn. 2 e 3) dedicate alla dimostrazione dei teoremi che abbiamo enunciati.

(3) Poiché il primo è privo di ideali bilateri effettivi ed il secondo ne possiede esattamente due, precisamente $\mathrm{Hom}_k(V, W)$ e $\mathrm{Hom}_k(W, V)$.

2. Dimostrazione del teorema 1

Stabiliamo, innanzitutto, i lemmi 1-6, conservando il simbolismo adottato nell'enunciato del teorema 1.

Lemma 1. — *Se* D *(risp.* S) *è ideale destro (risp. sinistro) minimale dell'*H*-anello* $R = k(\tau, n, m, h, g)$ *esistono* $d \in D$ *e* $s \in S$ *atti a fornire al sottogruppo* $k_1 = Ds^*d$ *del gruppo additivo sostegno di* R *una struttura di corpo* $k_1(+, o)$ *con l'operazione* $a o b = as^*b$ *se* $a, b \in k_1$. *Il corpo* k_1 *è isomorfo al corpo* k.

Dimostrazione [4]. Per il lemma 5 di [1], è sufficiente dimostrare l'isomorfismo dei corpi k_1 e k. Notoriamente ([1]; lemma 1 e corollario 1) risulta $D = \{f \in R \,/\, Hf = (o)\}$, risp. $S^* = \{q^* \,/\, q \in R \text{ e } Uq^* = (o)\}$, con H iperpiano di V, risp. U iperpiano di W. $(o) \neq k_1 = Ds^*d$ comporta $Ws^* = \langle v \rangle$, $Vd = \langle w \rangle$, $V = \langle v \rangle \oplus H$ per opportuni $v \in V$ e $w \in W$; essendo d (in virtù del lemma citato all'inizio della dimostrazione) identità del corpo k_1 è $vd = \delta w$, $ws^* = \sigma v$ con $\delta, \sigma \in k$ per i quali $\sigma\delta = 1$. Se $a \in k_1$ risulta $Ha = (o)$, $va = \alpha w$ con $\alpha \in k$ definito da a e si individua l'applicazione $k_1 \to k$, $a \to \sigma\alpha$ se $a \in k_1$, che è, banalmente, un monomorfismo di corpi. È un isomorfismo, poiché se $p \in D$ è definito con la pretesa $Hp = (o)$ e $vp = \delta x w$ essendo $x \in k$, è $c = ps^*d \in k_1$, $vc = \delta x \sigma \delta w = \delta x w$ e $c \to \sigma\delta x = x$ in quel monomorfismo.

Lemma 2. — *Se esiste un isomorfismo* χ *dall'*H*-anello* $R = k(\tau, n, m, h, g)$ *sopra l'*H*-anello* $R' = k'(\tau', n', m', h', g')$ *risulta* $n = n'$, $m = m'$ *ed i corpi* k *e* k' *sono isomorfi.*

Dimostrazione. E' $n = n'$, risp. $m = m'$, poiché n, risp. m, rappresenta la lunghezza massima delle catene strettamente discendenti di ideali destri, risp. sinistri, dell'H-anello R ([1]; lemma 1) e χ è isomorfismo di H-anelli. Inoltre, il corpo $k_1 = k_1(+, o)$, isomorfo al corpo k ed oggetto del lemma 1, si costruisce a partire da D, S con D (risp. S) ideale destro (risp. sinistro) minimale di R e da $d \in D$, $s \in S$, ed ha sostegno $k_1 = Ds^*d$; anzi ([1]; lemmi 3 e 5) s e d definiscono un corpo k_1 di tipo dovuto se, e solo se, $xd^*s = x$ e $ds^*y = y$ quando $x \in S$ e $y \in D$. Poiché tutte le precedenti pretese sono invarianti sotto l'azione di χ, è individuato, stante il lemma 1, un corpo $k'_1(+, o)$, $k'_1 \subseteq R'$, a partire da $(D)\chi$, da $(s)\chi \in (S)\chi$ e da $(d)\chi \in (D)\chi$, che è isomorfo al corpo k'_1; la restrizione di χ a k_1 è, ovviamente, un isomorfismo dal corpo k_1 al corpo k'_1.

Lemma 3. — *Se* $w^\alpha \in W$, $v^i \in V$ *si ponga* $H_i = \{v \in V \,/\, h(v, v^i) = o\}$, $D_i = \{f \in R \,/\, H_i f = (o)\}$, $S_\alpha = \{f \in R \,/\, Vf \subseteq \langle w^\alpha \rangle\}$. *Siano* $w^\alpha, w^\beta \in W - \{o\}$ *e* $v^i, v^t \in V - \{o\}$: *si ha* $g(w^\alpha, w^\beta) = o$ *se e solo se* $S_\alpha S_\beta^* S_\alpha = (o)$, $h(v^i, v^t) = o$

[4] D (risp. S) è ideale destro (risp. sinistro) dell'H-anello R se è sottogruppo del gruppo additivo sostegno di R e se risulta $DR^*R \subseteq D$ (risp. $RR^*S \subseteq S$).

se e solo se $D_i D_t^* D_i = (0)$. *In conseguenza, se esiste un isomorfismo* χ *dall'H-anello* $R = k(\tau, n, m, h, g)$ *sopra l'H-anello* $R' = k'(\tau', n', m', h', g')$, *la forma sesquilineare* h, *risp.* g, *è alternante se e solo se la forma sesquilineare* h', *risp.* g', *è alternante.*

Dimostrazione. Il corollario 1 di [1] garantisce $S_\beta^* = \{f^* \,/\, f \in S_\beta\} = \{f^* \,/\, f \in R$ e $U_\beta f^* = (0)\}$, essendo U_β il sottospazio di W g-ortogonale a $<w^\beta>$. $S_\alpha S_\beta^* S_\alpha = (0)$ equivale a $VS_\alpha S_\beta^* S_\alpha = (0)$, ossia a $w^\alpha S_\beta^* S_\alpha = (0)$ che significa esattamente $w^\alpha \in U_\beta$, cioè $g(w^\alpha, w^\beta) = 0$. Analogamente, sempre per il corollario citato, $D_i D_t^* D_i = (0)$ equivale a $h(v^i, v^t) = 0$. Poiché quanto già stabilito traduce la nozione di vettore di V isotropo rispetto ad h, risp. di W isotropo rispetto a g, in una condizione che è invariante sotto l'azione dell'isomorfismo χ, il lemma è compiutamente dimostrato.

Lemma 4. — *Siano* χ *un isomorfismo dall'H-anello* $R = k(\tau, n, m, h, g)$ *sopra l'H-anello* $R' = k'(\tau', n', m', h', g')$, $B(V) = \{v^1, \ldots, v^n\}$ *una base di* V, $B(W) = \{w^1, \ldots, w^m\}$ *una base di* W *e si ponga* $H_i = <v^1, \ldots, \widehat{v^i}, \ldots, v^n>$ (5), $D_i = \{f \in R \,/\, H_i f = (0)\}$, $S_\alpha = \{f \in R \,/\, Vf \subseteq <w^\alpha>\}$ *se* $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\alpha \in \{1, \ldots, m\}$. *Risulta* $(D_i)\chi = D'_i = \{f' \in R' \,/\, H'_i f' = (0)\}$ *con* H'_i *opportuno iperpiano di* V', $(S_\alpha)\chi = S'_\alpha = \{f' \in R' \,/\, V'f' \subseteq <w'^\alpha>\}$, *con* w'^α *opportuno vettore non nullo di* W', $B(W') = \{w'^1, \ldots, w'^m\}$ *è base di* W', $B(V') = \{v'^1, \ldots, v'^n\}$ *è base di* V' *se* $0 \neq v'^i \in H'_1 \cap \ldots \cap \widehat{H'_i} \cap \ldots \cap H'_n$. *In tali condizioni* B(V'), *risp.* B(W'), *è base* h'*-ortogonale, risp.* g'*-ortogonale (oppure* h'*-simplettica, risp.* g'*-simplettica) se e solo se* B(V), *risp.* B(W), *è base* h*-ortogonale, risp.* g*-ortogonale (oppure* h*-simplettica, risp.* g*-simplettica)* (6).

Dimostrazione. È $D'_i = \{f' \in R' \,/\, H'_i f' = (0)\}$ per il lemma 1 di [1], poiché D_i è ideale minimale di R e χ è isomorfismo di H-anelli. $R = D_1 \oplus \ldots \oplus D_n$ (a livello di gruppo additivo) comporta $R' = D'_1 \oplus \ldots \oplus D'_n$, quindi $\bigcap_{i=1}^{n} H'_i = (0)$ ed essendo $n = n'$ per il lemma 2, esiste $v'^i \in H'_1 \cap \ldots \cap \widehat{H'_i} \cap \ldots \cap H'_n$ con $v'^i \neq 0$: $B(V') = \{v'^1, \ldots, v'^n\}$ è parte libera di V', anzi è una sua base (poiché $n = n'$). Analogamente, si prova che B(W') è base di W'. Si supponga, ora, che B(V) sia base h-ortogonale di V, quindi $h(v^i, v^t) = 0$ se $i \neq t$ $(i, t = 1, \ldots, n)$ che significa, per il lemma 3, $D_i D_t^* D_i = (0)$. Tale condizione equivale a pretendere che il prodotto, in R', degli elementi x', y', z' con $x', z' \in D'_i$ e $y' \in D'_t$ sia nullo ossia, sempre per il lemma 3, $h'(v'^i, v'^t) = 0$ che significa: B(V') è base h'-ortogonale di V'. Analogamente si discute il caso in cui B(V) sia base h-simplettica di V, oppure B(W) sia base g-ortogonale o g-simplettica di W.

(5) $\widehat{\ }$ indica cancellazione.

(6) B(V) h-ortogonale significa $h(v^i, v^t) = 0$ se $i \neq t$ $(i, t = 1, \ldots, n)$, mentre B(V) h-simplettica significa $(n = 2s$ e$)\, h(v^i, v^t) = 0$ se $\{i, t\} \neq \{2p-1, 2p\}$ $(p = 1, \ldots, s)$; quindi *non* si pretende $h(v^{2p-1}, v^{2p}) = 1$.

LEMMA 5. — *Si consideri l'H-anello* $R = k(\tau, n, m, h, g)$, *siano* $B(V) = \{v^1, ..., v^n\}$ *una base di* $V, B(W) = \{w^1, ..., w^m\}$ *una base di* W *e* $k_{n,m}$ *indichi il gruppo additivo delle matrici ad elementi in* k *aventi* n *righe e* m *colonne. Se* $p \in R$ *e* $v^i p = \sum_{\alpha=1}^{m} p^i_\alpha w^\alpha$ $(p^i_\alpha \in k)$ *si individua* $P = \| p^i_\alpha \| \in k_{n,m}$ (i *indice di riga,* α *indice di colonna). L'applicazione* $\chi : R \to k_{n,m}, p \to P$, *è isomorfismo additivo e risulta* $(pq^*t)\chi = PCQ^*ST$ *se* $p, q, t \in R$, *essendo* $Q^* = {}^t\| (q^i_\alpha)^\tau \| \in k_{m,n}$ (7), $C = \| g(w^\alpha, w^\beta) \| \in k_{m,m}$ *e* $S^{-1} = \| h(v^i, v^t) \| \in k_{n,n}$.

Dimostrazione. Se $w^\alpha q^* = \sum_{s=1}^{n} x^\alpha_s v^s$ $(x^\alpha_s \in k)$, $g(v^i q, w^\alpha) = h(v^i, w^\alpha q^*)$ fornisce $\sum_{\beta=1}^{m} q^i_\beta\, g(w^\beta, w^\alpha) = \sum_{s=1}^{n} h(v^i, v^s)\ (x^\alpha_s)^\tau$. Poiché h è non degenere, esiste $S \in k_{n,n}$ tale che $S^{-1} = \| h(v^i, v^s) \|$ e si ha $QC = S^{-1}X^*$ con $X = \| x^\alpha_s \| \in k_{m,n}$; se h e g sono hermitiane, risp. alternanti, $C^* = C$ e $(S^{-1})^* = S^{-1}$. risp. ${}^tC = -C$ e ${}^t(S^{-1}) = -S^{-1}$ mentre l'eventuale « caso misto » fornisce ancora la prima coppia di eguaglianze poiché, allora, k è corpo commutativo di caratteristica due e τ è l'automorfismo identico di k. Ne deriva $CQ^* = XS^{-1}$, $X = CQ^*S$. Da qui segue ovviamente il lemma.

LEMMA 6. — *Considerati gli H-anelli* $R = k(\tau, n, m, h, g)$ *e* $R' = k'(\tau', n', m', h', g')$ *si supponga* $n = n'$, $m = m'$ *ed esista un isomorfismo* $\psi : k \to k'$ *dal corpo* k *sopra il corpo* k'. *Con* $\nu : V \to V', \pi : W \to W'$ *applicazioni biettive semilineari rispetto a* ψ *si ponga* $\bar{h}(x, y) = h'(x\nu, y\nu)^{\psi^{-1}}$ *se* $x, y \in V$ *e* $\bar{g}(x, y) = g'(x\pi, y\pi)^{\psi^{-1}}$ *se* $x, y \in W$. *È definito, così, l'H-anello di classe A* $\bar{R} = k(\bar{\tau}, n, m, \bar{h}, \bar{g})$ *che ha sostegno* $\bar{R} = \mathrm{Hom}_k(V, W) = R$ *e per il quale* $x^{\bar{\tau}} = ((x^\psi)^{\tau'})^{\psi^{-1}}$ *se* $x \in k$; *gli H-anelli* R' *e* $\bar{R}$ *sono isomorfi.*

Dimostrazione. Se $p \in R' = \mathrm{Hom}_{k'}(V', W')$, $\bar{p} = \nu p \pi^{-1}$ è elemento di $\bar{R} = \mathrm{Hom}_k(V, W) = R$ (si ricordi, $v\bar{p} = ((v\nu)p)\pi^{-1}$ se $v \in V$) e l'applicazione $R' \to \bar{R}$, $p \to \nu p \pi^{-1}$, è isomorfismo additivo da R' sopra $\bar{R}$. Per definizione, $pq^*t \to \nu pq^*t\pi^{-1}$ se $p, q, t \in R'$ e rimane da provare $\nu pq^*t\pi^{-1} = (\nu p\pi^{-1})(\pi q^*\nu^{-1})(\nu t\pi^{-1}) = (\nu p\pi^{-1})\,\overline{(\nu q\pi^{-1})}\,(\nu t\pi^{-1})$ (ove la sopralineatura indica aggiunzione rispetto a $\bar{g}$ e $\bar{h}$) ossia $q^* = \pi^{-1}\,\overline{(\nu q\pi^{-1})}\,\nu$. Essendo $\bar{g}(x\nu q\pi^{-1}, y) = \bar{h}(x, y\,\overline{(\nu q\pi^{-1})})$ se $x \in V$ e $y \in W$, con $x' = x\nu \in V'$ e $y' = y\pi \in W'$ si ha, per definizione di $\bar{h}$ e $\bar{g}$, $g'(x'q, y')^{\psi^{-1}} = h'(x', y'\pi^{-1}\,\overline{(\nu q\pi^{-1})}\,\nu)^{\psi^{-1}}$, che è quanto si doveva dimostrare.

Stabiliti i lemmi 1-6, a conclusione del presente numero desumiamo da essi la

Dimostrazione del teorema 1. — Supponendo, innanzitutto, che gli H-anelli R e R' siano isomorfi, perverremo alle conclusioni che debbono discendere da

(7) Il prodotto tra matrici, ora e nel seguito, si esegue righe per colonne; se $X \in k_{n,m}$, ${}^tX$ indica la sua matrice trasposta.

tale ipotesi. Per il lemma 2, deve essere $n = n'$, $m = m'$ e i corpi k e k' devono essere isomorfi. Ne deriva, in virtù del lemma 6, tenuto conto della definizione delle forme sesquilineari $\bar{h}$ e $\bar{g}$ (hermitiane o alternanti) data nell'enunciato di quel lemma, che non è restrittivo supporre $k = k'$, $V = V'$, $W = W'$ ossia, a livello insiemistico, $R = \mathrm{Hom}_k(V, W) = R'$. Siano $B(V) = \{v^1, \dots, v^n\}$, risp. $B(W) = \{w^1, \dots, w^m\}$, una base di V, risp. W, e si fissino le basi $B'(V) = \{v'^1, \dots, v'^n\}$ di V, risp. $B'(W) = \{w'^1, \dots, w'^m\}$ di W, tra quelle definite, nel senso del lemma 4, dal dato isomorfismo dall'H-anello R sopra l'H-anello R'. Tenuto conto del lemma 5, con tali dati l'isomorfismo da R sopra R' definisce un'applicazione $f : k_{n,m} \to k_{n,m}$ che è un automorfismo additivo e nella quale

$$(1) \qquad (XCY^*SZ)f = (Xf)\,\Gamma\,\overline{(Yf)}\,\Sigma\,(Zf) \quad \text{se } X, Y, Z \in k_{n,m}$$

avendo posto $C = \| g(w^\alpha, w^\beta) \|$, $\Gamma = \| g'(w'^\alpha, w'^\beta) \| \in k_{m,m}$ e $S^{-1} = \| h(v^i, v^t) \|$, $\Sigma^{-1} = \| h'(v'^i, v'^t) \| \in k_{n,n}$ mentre la sopralineatura indica trasformazione degli elementi della matrice Yf con τ' e trasposizione della matrice così ottenuta. Dalla (1) perverremo alla tesi discutendo le seguenti tre possibilità.

Prima possibilità: h e g sono forme hermitiane e non sono alternanti. In tal caso, $B(V)$, risp. $B(W)$, si può supporre base h-ortogonale, risp. g-ortogonale, e, per il lemma 4, la medesima eventualità si presenta per $B'(V)$ e $B'(W)$. Ne deriva che tutti e soli gli elementi non nulli che compaiono in C, Γ, S^{-1}, Σ^{-1} sono quelli delle loro diagonali principali e possiamo porre $C = \mathrm{diag}(c_1, \dots, c_m)$, $\Gamma = \mathrm{diag}(\gamma_1, \dots, \gamma_m)$, $S^{-1} = \mathrm{diag}(s_1^{-1}, \dots, s_n^{-1})$, $\Sigma^{-1} = \mathrm{diag}(\sigma_1^{-1}, \dots, \sigma_n^{-1})$, con c_α, γ_α, s_i, σ_i elementi non nulli del corpo k ($\alpha = 1, \dots, m$; $i = 1, \dots, n$); gli elementi c_α, s_i sono fissati da τ, e γ_α, σ_i sono fissati da τ'. Con le notazioni del lemma 4, se $p \in D_i \cap S_\alpha$ è $p\chi \in D_i\chi \cap S_\alpha\chi$ e, stante il lemma 5, p individua la matrice $P = xE^i_\alpha \in k_{n,m}$ (con $x \in k$ in riga i, colonna α e zero altrove) in relazione alle basi $B(V)$, $B(W)$, mentre $p\chi$, sempre per quel lemma, si rappresenta, in relazione alle basi $B'(V)$ e $B'(W)$, con la matrice $(xf^i_\alpha)\,E^i_\alpha \in k_{n,m}$, essendo $f^i_\alpha : k \to k$, $x \to xf^i_\alpha$ se $x \in k$, un automorfismo additivo. Ossia nel senso della (1), risulta $(xE^i_\alpha)f = (xf^i_\alpha)E^i_\alpha$ e con $X = xE^i_\alpha$, $Y = yE^s_\beta$, $Z = zE^t_\gamma \in k_{n,m}$ ($x, y, z \in k$; $\alpha, \beta, \gamma \in \{1, 2, \dots, m\}$; $i, s, t \in \{1, 2, \dots, n\}$), la (1) fornisce $(xc_\alpha y^\tau s_t z)f^i_\gamma = (xf^i_\alpha)\,\gamma_\alpha\,(yf^t_\alpha)^{\tau'}\,\sigma_t\,(zf^t_\gamma)$. Ponendo $1f^i_\alpha = F^i_\alpha$, è $F^i_\alpha \neq 0$, e si individua l'automorfismo additivo $\varphi^i_\alpha : k \to k$ nel quale $x\varphi^i_\alpha = (xf^i_\alpha)(F^i_\alpha)^{-1}$ se $x \in k$, $1\varphi^i_\alpha = 1$ e dalla precedente relazione si ottiene

$$(2) \qquad [(xc_\alpha y^\tau s_t z)\varphi^i_\gamma]\,F^i_\gamma = (x\varphi^i_\alpha)\,F^i_\alpha\,\gamma_\alpha\,(F^t_\alpha)^{\tau'}(y\varphi^t_\alpha)^{\tau'}\,\sigma_t\,(z\varphi^t_\gamma)\,F^t_\gamma.$$

Da (2), con $y = s_t^{-1} c_\alpha^{-1}$, $\alpha = \gamma$, $t = i$, $z = x = 1$ si trova $1 = F^i_\alpha \gamma_\alpha (F^i_\alpha)^{\tau'}\,[s_i^{-1} c_\alpha^{-1} \varphi^i_\alpha]^{\tau'} \sigma_i$; tenendo conto di ciò, e ponendo $y = s_i^{-1} c_\alpha^{-1}$, $\alpha = \gamma$, $t = i$ se ne deduce $(xz)\,\varphi^i_\alpha = (x\varphi^i_\alpha)\,(z\varphi^i_\alpha)$, ossia φ^i_α è automorfismo del corpo k. In conseguenza, la (2) con $i = t$ e $y = 1$ fornisce $x\varphi^i_\gamma = x\varphi^i_\alpha$: l'automorfismo φ^i_α del corpo k è indipendente da α e si può porre $\varphi^i_\alpha = \varphi^i_\gamma = \varphi^i$ e la (2), con $i = t$, si scrive $(c_\alpha \varphi^i)\ [(y^\tau)\ \varphi^i]\ (s_1 \varphi^i) = F^i{}_\alpha \gamma_\alpha (F^i{}_\alpha)^{\tau'} (y\varphi^i)^{\tau'} \sigma_i$. Si può, pertanto, definire (si ponga $y = 1$):

$$a^i = (s_i\varphi^i)\ \sigma_i^{-1} = (c_\alpha^{-1}\ \varphi^i)\ F^i{}_\alpha \gamma_\alpha\ (F^i{}_\alpha)^{\tau'} \tag{3}$$

e, poiché $(s_i\ \varphi^i)\ \sigma_i^{-1}$ non dipende da α, deve risultare

$$(y^\tau)\ \varphi^i = a^i\ (y\ \varphi^i)^{\tau'}\ (a^i)^{-1} \quad \text{se } y \in k. \tag{4}$$

A questo punto, si ponga $\varphi^1 = \varphi$, $a^1 = a$; la (3) fornisce, per $i = 1$, $(c_\alpha\varphi)\ a = F^1{}_\alpha \gamma_\alpha (F^1{}_\alpha)^{\tau'}$ che significa $g\ (w^\alpha, w^\alpha)^\varphi\ a = F^1{}_\alpha\, g'\ (w'^\alpha, w'^\alpha)\ (F^1{}_\alpha)^{\tau'} = g'(F^1{}_\alpha\, w'^\alpha, F^1{}_\alpha\, w'^\alpha)$. Poiché B (W), risp. B′ (W), è base g-ortogonale, risp. g'-ortogonale, si ha, in conseguenza, $g\ (w^\alpha, w^\beta)^\varphi\ a = g'\ (F^1{}_\alpha\, w'^\alpha, F^1{}_\beta\, w'^\beta)$ se $\alpha, \beta \in \{1, 2, ..., m\}$. Sia, ora, $\rho : W \to W$ l'applicazione (biettiva) semilineare rispetto a φ^{-1} definita con la pretesa $w^\alpha = (F^1{}_\alpha\, w'^\alpha)\ \rho\ (\alpha = 1, 2, ..., m)$; posto $w''^\alpha = F^1{}_\alpha\, w'^\alpha$ è, quindi, $g\ (w''^\alpha\rho, w''^\beta\rho)^\varphi\ a = g'\ (w''^\alpha, w''^\beta)$ che, con $x = \sum_{\alpha=1}^{m} x_\alpha w''^\alpha \in W$, moltiplicata a sinistra per x_α, per somma dà $g\ (x\rho, w''^\beta\rho)^\varphi\ a = g'\ (x, w''^\beta)$. Si consideri $y = \sum_{\beta=1}^{m} y_\beta w''^\beta \in W$; l'ultima relazione, moltiplicata a destra per $y_\beta^{\tau'}$ fornisce, per somma, $g\ (x\rho, y\rho)^\varphi\ a = g'\ (x, y)$ se si tiene conto che la (4), per $i = 1$, garantisce $\{[(y_\beta\varphi^{-1})^\tau]\varphi\}\ a = a y_\beta^{\tau'}$.

Per concludere, la (2) calcolata per $t = 1, \alpha = \gamma, y = 1$ fornisce $(c_\alpha\varphi^i)(s_1\varphi^i)(z\varphi^i)\ F^i{}_\alpha = F^i{}_\alpha \gamma_\alpha (F^1{}_\alpha)^{\tau'} \sigma_1\ (z\varphi)\ F^1{}_\alpha$ e, per la (3), ciò significa $(F^i{}_\alpha)^{\tau'}\ (a^i)^{-1}\ (s_1\varphi^i)\ (z\varphi^i)\ F^i{}_\alpha = (F^1{}_\alpha)^{\tau'} \sigma_1\ (z\varphi)\ F^1{}_\alpha$ che fornisce $z\varphi^i = F^i{}_\alpha (F^1{}_\alpha)^{-1} (z\varphi) F^1{}_\alpha (F^i{}_\alpha)^{-1}$. Tenuto conto di ciò e della (3) si trova $\sigma_i^{-1} = [(s_i^{-1})\ \varphi^i]\ (c_\alpha^{-1}\ \varphi^i)\ F^i{}_\alpha \gamma_\alpha\ (F^i{}_\alpha)^{\tau'} = F^i{}_\alpha (F^1{}_\alpha)^{-1}\ (s_i^{-1}\varphi)\ (c_\alpha^{-1}\varphi)\ F^1{}_\alpha \gamma_\alpha\ (F^i{}_\alpha)^{\tau'} = F^i{}_\alpha\ (F^1{}_\alpha)^{-1}\ (s_i^{-1}\varphi)\ a\ [(F^1{}_\alpha)^{-1}]^{\tau'}\ (F^i{}_\alpha)^{\tau'}$. Per (4), $a\,[F^i{}_\alpha\ (F^1{}_\alpha)^{-1}]^{\tau'} = \{[F^i{}_\alpha\ (F^1{}_\alpha)^{-1}]\ \varphi^{-1}\}^\tau\ \varphi a$ e la relazione cui siamo pervenuti garantisce $h'\ (v'^i, v'^i) = [d_i h\ (v^i, v^i)\ d_i^\tau]^\varphi\ a$ se $d_i = [F^i{}_\alpha\ (F^1{}_\alpha)^{-1}]\ \varphi^{-1}$ che, con $v''^i = d_i v^i$, fornisce $h'\ (v'^i, v'^i) = h\ (v''^i, v''^i)^\varphi\ a$. Da qui, se $\mu : V \to V$ è l'applicazione (biettiva) semilineare rispetto a φ^{-1} definita con la pretesa $v''^i = v'^i\mu$ $(i = 1, 2, ..., n)$ si ricava, come in precedenza per g e g', $h'\ (x, y) = h(x\mu, y\mu)^\varphi\ a$ quando $x, y \in V$.

Seconda possibilità: h e g sono forme alternanti (quindi k è corpo commutativo e τ, τ' sono il suo automorfismo identico). In tal caso B (V), risp. B (W), si può supporre base h-simplettica, risp. g-simplettica, e, per il lemma 4, la medesima eventualità si presenta per B′ (V) e B′ (W); inoltre, moltiplicando per opportuni scalari i vettori di B (V) e B′ (V), si può richiedere $h\ (v^i, v^{i+1}) = 1$ e $h'\ (v'^i, v'^{i+1}) = 1$ se i è un intero dispari. Se φ è un qualsiasi automorfismo di k e a è un qualsiasi elemento non nullo di k, sia $\mu : V \to V$ l'applicazione (biettiva) semilineare rispetto a φ^{-1} definita ponendo $v'^i\mu = (a^{-1})\varphi^{-1}\ v^i$ se i è dispari e $v'^i\mu = v^i$ quando i è pari $(i = 1, 2, ..., n)$; risulta $h'\ (v'^i, v'^j) = h(v'^i\mu, v'^j\mu)^\varphi\ a$ se $i, j = 1, 2, ..., n$, da cui segue $h'\ (x, y) = h\ (x\mu, y\mu)^\varphi\ a$ se $x, y \in V$. In maniera analoga si prova quanto dovuto relativamente alle forme g e g'. Da notare l'arbitrarietà dell'automorfismo φ del corpo k e di a elemento non nullo di k.

Terza possibilità: h è forma hermitiana e g è forma alternante (o viceversa; in tal caso k è corpo commutativo di caratteristica due e τ, τ' sono l'automorfismo identico di k). Per quanto già provato si può pensare h hermitiana non alternante. Si supponga la base $B(V)$ h-ortogonale e la base $B(W)$ g-simplettica; per il lemma 4, $B'(V)$ è h'-ortogonale e $B'(W)$ è g'-simplettica. Ne segue che tutti e soli gli elementi non nulli che compaiono in S^{-1} e Σ^{-1} sono quelli delle diagonali principali e possiamo porre $S^{-1} = \mathrm{diag}\,(s_1^{-1}, \dots, s_n^{-1})$ e $\Sigma^{-1} = \mathrm{diag}\,(\sigma_1^{-1}, \dots, \sigma_n^{-1})$. Ad ogni applicazione $p \in D_i \cap S_\alpha$, risp. $p\chi \in D_i\chi \cap S_\alpha\chi$, $(\alpha = 1, 2)$ rimane associata, stante il lemma 5 ed analogamente a quanto precisato nella dimostrazione della prima possibilità, la matrice $P = xE^i{}_\alpha$, risp. $\bar{P} = (xf^i{}_\alpha)E^i{}_\alpha$, e si individua l'automorfismo additivo $f^i{}_\alpha : k \to k$, $x \to xf^i{}_\alpha$ se $x \in k$. Calcolando la (1) relativamente a $p \in D_i \cap S_1$, $q \in D_j \cap S_2$, $t \in D_j \cap S_1$ $(i, j = 1, 2, \dots, n)$, risulta, in analogia alla (2):

$$(5) \qquad (xcys_jz)\,\varphi^i{}_1 = (x\varphi^i{}_1)\,\gamma\,(y\varphi^j{}_2)\,F^j{}_2\,\sigma_j\,(z\varphi^i{}_1)\,F^i{}_1$$

con $x, y, z \in k$, $c = g\,(w^1, w^2)$, $\gamma = g'\,(w'^1, w'^2)$, $F^i{}_\alpha = 1f^i{}_\alpha \neq 0$ e $\varphi^i{}_\alpha : k \to k$, $x \to (xf^i{}_\alpha)\,(F^i{}_\alpha)^{-1}$ se $x \in k$; come in precedenza si prova che $\varphi^i{}_1$ è automorfismo di k. Posto in (5) $y = c^{-1}\,s_j^{-1}$, si ha $z\varphi^i{}_1 = \gamma\,[(c^{-1}\,s_j^{-1})\,\varphi^j{}_2]\,F^j{}_2\,\sigma_j\,(z\varphi^i{}_1)\,F^i{}_1$ e, per $z = 1$, $1 = \gamma\,[(c^{-1}\,s_j^{-1})\,\varphi^j{}_2]\,F^j{}_2\,\sigma_j\,F^i{}_1$, dunque $\varphi^i{}_1 = \varphi^j{}_1$; con metodo simile, la (5) scritta con $z = c^{-1}\,s_j^{-1}$, $i = j$ dà $\varphi^t{}_1 = \varphi^i{}_2$: si potrà quindi porre, per $\alpha = 1, 2$ e $i = 1, 2, \dots, n$, $\varphi^i{}_\alpha = \varphi$. Analogamente alla (5), risulta $(xcys_jz)\,\varphi^i{}_2\,F^i{}_2 = (x\varphi^i{}_1)\,F^i{}_1\,\gamma\,(y\varphi^j{}_2)\,F^j{}_2\,\sigma_j\,(z\varphi^i{}_2)\,F^i{}_2$ e, con $x = y = z = 1$, si ha $(c\varphi)(s_j\varphi)\,F^i{}_2 = F^i{}_1\,\gamma\,F^j{}_2\,\sigma_j\,F^i{}_2$; posto in (5) $x = y = z = 1$, si trova $(c\varphi)(s_j\varphi) = \gamma\,F^j{}_2\,\sigma_j\,F^i{}_1$ e, confrontando con la precedente uguaglianza, si ricava $F^i{}_1\,F^j{}_2 = F^i{}_1\,F^i{}_2$ e si individua $T = F^i{}_1\,(F^i{}_2)^{-1} = F^j{}_1\,(F^j{}_2)^{-1} \in k$. Se $a = (c^{-1}\varphi)\,\gamma\,T$ è $\sigma_i^{-1} = (s_i^{-1}\varphi)\,(c^{-1}\varphi)\,\gamma\,F^i{}_2\,F^i{}_1 = (s_i^{-1}\varphi)\,(c^{-1}\varphi)\,\gamma\,T\,(F^i{}_2)^2 = (s_i^{-1}\varphi)\,a\,(F^i{}_2)^2$ o anche, esplicitando, $h'\,(F^i{}_2\,v'^i, F^i{}_2\,v'^i) = h\,(v^i, v^i)^\varphi\,a$ e, con gli usuali ragionamenti, si stabilisce $h'\,(x, y) = h\,(x\mu, y\mu)^\varphi\,a$ se $x, y \in V$. Infine, poiché g e g' sono forme alternanti, le argomentazioni svolte nella dimostrazione della seconda possibilità, ripetute per l'automorfismo φ e lo scalare a ora definiti, consentono di concludere la dimostrazione della terza possibilità.

Per completare la dimostrazione del teorema occorre stabilire che se risulta $n = n'$, $m = m'$ ed esistono un isomorfismo φ dal corpo k sopra il corpo k', $\mu : V' \to V$ e $\rho : W' \to W$ applicazioni biettive semilineari rispetto a φ^{-1}, $a \in k$ $(a \neq 0)$ tali che $h'\,(x, y) = h\,(x\mu, y\mu)^\varphi\,a$ se $x, y \in V'$ e $g'\,(x, y) = g\,(x\rho, y\rho)^\varphi\,a$ se $x, y \in W'$, allora gli H-anelli di classe A $R = k\,(\tau, n, m, h, g)$ e $R' = k'\,(\tau', n', m', h', g')$ sono isomorfi. Poiché $\chi : R \to R'$, $p \to \mu p \rho^{-1}$ se $p \in R$, è isomorfismo additivo da R sopra R', è sufficiente provare che risulta, con $p, q, t \in R$, $\mu pq^*t\rho^{-1} = (\mu p\rho^{-1})(\rho q^*\mu^{-1})(\mu t\rho^{-1}) = (\mu p\rho^{-1})(\overline{\mu q\rho^{-1}})(\mu t\rho^{-1})$ (la sopralineatura significa aggiunzione rispetto ad h' e g'), ovvero $\rho^{-1}\overline{\mu q\rho^{-1}}\mu = q^*$. Per provario, siano $x \in V'$ e $y \in W'$; da $h'(x, y(\overline{\mu q \rho^{-1}})) = g'(x(\mu q \rho^{-1}), y)$ segue $h(x\mu, y(\overline{\mu q \rho^{-1}})\mu) = g(x\mu q, y\rho)$ e, posto $v = x\mu \in V$ e $w = y\rho \in W$, si ha $h(v, w\rho^{-1}(\overline{\mu q \rho^{-1}})\mu) = g(vq, w) = h(v, wq^*)$ che è quanto si doveva dimostrare.

3. Dimostrazione del teorema 2

I lemmi 7-9 precederanno la dimostrazione del teorema 2; faremo riferimento al simbolismo precisato nell'enunciato del teorema.

Lemma 7. — *Siano* D *(risp.* S*) un ideale destro (risp. sinistro) minimale dell'*H*-anello* $R = k(n, m)$ *contenuto in* $\mathrm{Hom}_k(W, V)$ *(risp.* $\mathrm{Hom}_k(V, W)$*). Esistono* $d \in D$ *e* $s \in S$ *atti ad individuare il sottogruppo* $k_1 = Dsd$ *del gruppo additivo sostegno di* R *ed a fornirgli una struttura di corpo* $k_1(+, \circ)$ *con l'operazione* $a \circ b = asb$ *se* $a, b \in k_1$. *Il corpo* k_1 *è isomorfo al corpo* k.

Dimostrazione. Per il lemma 5 di [6] è sufficiente stabilire l'isomorfismo dei corpi k_1 e k. Perciò si possono usare le argomentazioni della dimostrazione del lemma 1, tenuto conto che nel caso attuale risulta ([6]; dimostrazione del teorema 2) $D = \{(o, p) \in R \,/\, Up = (o)\}$ con U iperpiano di W e $S = \{(q, o) \in R \,/\, Hq = (o)\}$ con H iperpiano di V.

Lemma 8. — *Si consideri l'*H*-anello* $R = k(n, m)$; *siano* $B(V) = \{v^1, \dots, v^n\}$ *una base di* V, $B(W) = \{w^1, \dots, w^m\}$ *una base di* W *e* $k_{n,m}$ *(risp.* $k_{m,n}$*) indichi il gruppo additivo delle matrici ad elementi in* k *aventi* n *righe ed* m *colonne (risp.* m *righe ed* n *colonne). Se* $(p, q) \in R$ *e* $v^i p = \sum_{\alpha=1}^{m} p^i_\alpha w^\alpha$, $w^\beta q = \sum_{j=1}^{n} q^\beta_j v^j$ $(p^i_\alpha, q^\beta_j \in k)$ *si individuano* $P = \| p^i_\alpha \| \in k_{n,m}$ *e* $Q = \| q^\beta_j \| \in k_{m,n}$ *(l'indice superiore è di riga). Allora, se si pone* $[(P_1, P_2)(Q_1, Q_2)(T_1, T_2)]\,\tilde{\omega} = (T_1 Q_2 P_1, P_2 Q_1 T_2)$, $\tilde{\omega}$ *attribuisce al gruppo* $k_{n,m} \oplus k_{m,n}$ *una struttura di* H*-anello e* $\Theta : R \to k_{n,m} \oplus k_{m,n}$, $(p, q) \to (P, Q)$ *se* $(p, q) \in R$, *è isomorfismo di* H*-anelli.*

Dimostrazione. Ovvia.

Lemma 9. — *Considerati gli* H*-anelli* $R = k(n, m)$ *e* $R_* = k_*(n_*, m_*)$, *si supponga che* k_* *sia il corpo opposto di* k [8] *e che risulti* $n_* = n$, $m_* = m$. *Gli* H*-anelli* R *e* R_* *sono isomorfi.*

Dimostrazione. Tenuto conto del lemma 8, è sufficiente osservare che l'ap-

(8) Si definisce opposto del corpo $k(+, \cdot)$ il corpo $k_*(\perp, \top)$ con $k_* = k$ (a livello insiemistico), $a \perp b = a + b$ e $a \top b = ba$ se $a, b \in k$; l'applicazione $k_* \to k$, $a \to a$ se $a \in k$, è antiisomorfismo di corpi.

plicazione $\xi' : k_{n,m} \oplus k_{m,n} \to k_{*n,m} \oplus k_{*m,n}$, $(P, Q) \to ({}^tQ, {}^tP)$ se $(P, Q) \in k_{n,m} \oplus k_{m,n}$, è isomorfismo di H-anelli.

Stabiliti i lemmi 7-9, concludiamo il presente numero con la

Dimostrazione del teorema 2. — Si supponga, innanzitutto, che esista un isomorfismo χ da R sopra R'; allora $\mathrm{Hom}_k(V, W)\chi$ è ideale bilatero effettivo di R' [9] e quindi coincide con $\mathrm{Hom}_{k'}(V', W')$ oppure con $\mathrm{Hom}_{k'}(W', V')$, in quanto questi sono i sostegni di tutti e soli gli ideali bilaterali effettivi di R' ([6], teorema 2). Nel primo caso, cioè se $\mathrm{Hom}_k(V, W)\chi = \mathrm{Hom}_{k'}(V', W')$, è $n = n'$, risp. $m = m'$, poiché n, risp. m, rappresenta la lunghezza massima delle catene strettamente discendenti di ideali sinistri, risp. destri, di R contenuti in $\mathrm{Hom}_k(V, W)$; inoltre, con considerazioni analoghe a quelle svolte nel lemma 2 e tenuto conto del lemma 7, si prova che esiste un isomorfismo dal corpo k sopra il corpo k'. Se invece risulta $\mathrm{Hom}_k(V, W)\chi = \mathrm{Hom}_{k'}(W', V')$ e se $R_* = k_*(n_*, m_*)$ ha, in riferimento a R, il significato precisato nell'enunciato del lemma 9, posto $\chi' = \xi\chi$ (l'isomorfismo $\xi : R_* \to R$ si desuma dalla dimostrazione di tale lemma) si ha $\mathrm{Hom}_{k_*}(V_*, W_*)\chi' = \mathrm{Hom}_{k'}(V', W')$; la precedente discussione ci assicura $n' = n_* = n$, $m' = m_* = m$ e che esiste un isomorfismo di k_* sopra k', e quindi un antiisomorfismo di k sopra k'.

Viceversa, se $n = n'$, $m = m'$ ed esiste un isomorfismo φ di k sopra k', dette $\mu : V' \to V$ e $\rho : W' \to W$ due qualsiasi applicazioni biettive semilineari rispetto a φ^{-1}, l'applicazione $\chi : R \to R'$, $(p, q) \to (\mu p \rho^{-1}, \rho q \mu^{-1})$ se $(p, q) \in R$, è isomorfismo di H-anelli; se invece è $n = n'$, $m = m'$ ed i corpi k e k' sono antiisomorfi, allora risulta $n_* = n = n'$, $m_* = m = m'$ ed esiste $\psi : k_* \to k'$ isomorfismo di corpi. La precedente discussione ci assicura l'esistenza di un isomorfismo da R_* sopra R' ed il lemma 9 completa la dimostrazione.

(9) Ossia, è ideale destro e sinistro di R' e $R'(\mathrm{Hom}_k(V, W)\chi)R' \not\subset \mathrm{Hom}_k(V, W)\chi$.

BIBLIOGRAFIA

[1] F. Bartolozzi e G. Panella (1977) — *Anelli ternari di Hestenes semplici, artiniani e privi di ideali bilateri effettivi*, « Ricerche Mat. », *26*, 255-275.

[2] N. Bourbaki (1959) — *Eléments de Mathématique.* Fascicule XXIV. *Algébre.* Chapitre 9. *Formes sesquilinéaires et formes quadratiques*, « Actualités Sci. Ind. », *1272*, Herman, Paris.

[3] M. R. Hestenes (1962) — *A ternary Algebra with Applicationes to Matrices and linear transformations*, « Arch. Rational Mech. Anal. », *11*, 138-194.

[4] M. R. Hestenes (1973) — *On a ternary algebra*, « Scripta Math. », *29*, 253-271.

[5] O. Loos (1972) — *Assoziative Tripelsysteme*, « Manuscripta Math. », *7*, 103-112.

[6] L. Profera (1977) — *Anelli ternari di Hestenes semplici e artiniani*, « Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur., Serie VIII », *62*, 292-299.

[7] R. A. Stephenson (1973) — *Jacobson structure theory for Hestenes ternary rings*, « Trans. Amer. Math. Soc. », *177*, 91-98.