HANS-JÖRG REIFFEN (*)

Metrische Grössen in C^q-Räumen (**)

SUMMARY. — We define geometrical quantities for differentiables spaces with charts in Banach spaces and discuss the relations between metrics and generalized Finsler structures. The theory is applied to complex spaces.

§ 0. EINLEITUNG

In den letzten zehn Jahren ist die Klasse der Räume, auf denen Analysis betrieben wird, erheblich erweitert worden ([1], [15]). Dementsprechend können Konzeptionen der Differentialgeometrie und Differentialtopologie in allgemeineren Bereichen entwickelt werden.

Diese Arbeit ist geometrisch orientiert. Mit Hilfe von Atlanten werden in § 1 C^q-Räume definiert. Es ist eine sehr allgemeine Klasse von Räumen, die einer differentialgeometrischen Betrachtungsweise zugängig sind. Sie bildet den Rahmen für Begriffsbildungen wie Tangentenvektor, Längenmessung, etc. Analog zu [16] werden in § 2 verschiedene Tangentialräume eingeführt. Natürlich kann man weitergehende Aussagen nur für Räume mit speziellerer Struktur erwarten, etwa für solche, wie sie Ramis in [9] betrachtet.

Als Tangentialräume hat man i.a. nur Kegel; es ist deshalb sinnvoll, analog zu [3], einen allgemeineren Längenbegriff einzuführen, nämlich den des Betrages. Dieser Begriff wird auch durch das Studium der invarianten Metriken der Funktionentheorie nahegelegt sowie durch das in § 4 entwickelte Konzept der differenzierbaren Metriken.

In § 5 werden komplexe Räume untersucht. Komplexe Räume sind Finslersche Räume. In tangentiell reduzierten Punkten mit isolierter Singularität des Tangentialkegels sind sie in einem schwachen Sinne infinitesimal-geodätisch. Der Begriff der starken infinitesimalen Geodäsie liefert ein Regularitätskriterium.

Die vorliegende Arbeit schliesst in ihren Bezeichnungsweisen an [12] an.

§ 1. DER BEGRIFF DES C^q-RAUMES

Wir übertragen Definition 58.1 in [12] auf den Fall von Banachräumen.

DEFINITION 1.1. *Es seien* V, V' $\mathbf{K}$-*Banachräume und* M *eine (nichtleere) Teilmenge von* V. *Eine Abbildung* $h : M \to V'$ *heisst* ($\mathbf{K}$—) *analytisch bzw. eine* C^q-*Abbildung* ($\mathbf{K} = \mathbf{R}$, $q \in \mathbf{N} \cup (\infty)$) *bzw. holomorph* ($\mathbf{K} = \mathbf{C}$), *wenn es zu*

(*) Matematisches Institut der Universität, Osnabrück-(Germania)

(**) Memoria presentata dall'Accademico dei XL BENIAMINO SEGRE il 17-6-75.

jedem Punkt $x \in \mathrm{M}$ *eine Umgebung* U *in* V *mit einer* **K**-*analytischen bzw.* q-*mal stetig differenzierbaren bzw. holomorphen Abbildung* $\hat{h} : \mathrm{U} \to \mathrm{V}'$ *gibt, so dass gilt* $h \mid \mathrm{M} \cap \mathrm{U} = \hat{h} \mid \mathrm{M} \cap \mathrm{U}$. *Ein solches* $\hat{h}$ *nennen wir eine lokale Fortsetzung von* h *in* U.

R-*analytische Abbildungen nennen wir auch* C^{ω}-*Abbildungen und* **C**-*analytische, also holomorphe Abbildungen* C^{h}-*Abbildungen.*

Die Übertragung von 58.4 in [12] ist selbstverständlich, ebenso die der *lokalen Diffeomorphismusbegriffe.*

Im folgenden sei mit $\mathfrak{A}$ eine Unterkategorie der Kategorie $\mathfrak{B}$ der Banachräume bezeichnet. Von besonderem Interesse sind die Kategorien $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{E}$ der Hilberträume bzw. endlichdimensionalen Vektorräume.

Mit q bezeichnen wir ein Element aus $\overline{\mathbf{N}} := \mathbf{N} \cup \{\infty, \omega, h\}$.

Definition 1.2. X *sei ein parakompakter topologischer Raum. Ein* C^{q}-*Atlas* $\mathfrak{A}$ *von* X (*mit Karten in der Kategorie* $\mathfrak{A}$) *ist eine Kollektion von Tripeln* $(\mathrm{U}, u, \mathrm{M})$, *für die folgendes gilt:*

(1) *Für alle* $(\mathrm{U}, u, \mathrm{M})$ *aus* $\mathfrak{A}$ *ist* U *eine offene Teilmenge von* X, M *eine* (*beliebige*) *Teilmenge eines Banachraumes* V (*der Kategorie* $\mathfrak{A}$) *und* $u : \mathrm{U} \to \mathrm{M}$ *ein Homöomorphismus.*

(2) *Die offenen Mengen* U, $(\mathrm{U}, u, \mathrm{M})$ *aus* $\mathfrak{A}$, *überdecken den Raum* X.

(3) *Für alle* $(\mathrm{U}, u, \mathrm{M})$, $(\mathrm{U}', u', \mathrm{M}')$ *aus* $\mathfrak{A}$ *ist* $\mathrm{U} \cap \mathrm{U}' = \emptyset$ *oder* $u' \circ u^{-1} : u(\mathrm{U} \cap \mathrm{U}') \to u'(\mathrm{U} \cap \mathrm{U}')$ *ein* C^{q}-*Diffeomorphismus.*

X, *versehen mit dem Atlas* $\mathfrak{A}$, *heisst ein* C^{q}-*Raum* (*mit Karten in der Kategorie* $\mathfrak{A}$).

Für viele Überlegungen ist die Forderung der Parakompaktheit in 1.2 nicht notwendig.

Jeder metrisierbare topologische Raum ist auf einfache Weise ein C^{h}-Raum (Lemma 6.4 in [7]); jeder C^{h}-Raum ist metrisierbar (Theorem 1 in [7]). Für die Klasse der parakompakten topologischen Räume fallen also die Begriffe "metrisierbar" und "mit einem C^{h}-Atlas versehbar" zusammen.

Definition 1.3. *Sei* X *ein* C^{q}-*Raum* (*mit Karten in* $\mathfrak{A}$). *Ist* U *eine offene Teilmenge von* X, M *eine Teilmenge eines Banachraumes* V (*der Kategorie* $\mathfrak{A}$) *und* $u : \mathrm{U} \to \mathrm{M}$ *ein Homöomorphismus, so heisst* $(\mathrm{U}, u, \mathrm{M})$ *eine* C^{q}-*Karte auf* X (*in der Kategorie* $\mathfrak{A}$), *wenn* $(\mathrm{U}, u, \mathrm{M})$ *mit allen* $(\mathrm{U}', u', \mathrm{M}')$ *aus dem Atlas* $\mathfrak{A}$ *verträglich ist, d.h. wenn* $u' \circ u^{-1}$ *für alle* $(\mathrm{U}', u', \mathrm{M}')$ *aus* $\mathfrak{A}$ *mit* $\mathrm{U} \cap \mathrm{U}' \neq \emptyset$ *ein* C^{q}-*Diffeomorphismus ist.*

Für alle $x \in \mathrm{U}$ *heisst* $(\mathrm{U}, u, \mathrm{M})$ *eine Karte zu* x.

Das System aller C^{q}-Karten auf X (in der Kategorie $\mathfrak{B}$) heisst die *Struktur* von X. Wir sehen zwei Atlanten als *gleichwertig* an, wenn sie dieselbe Struktur definieren.

Es ist klar, was man unter C^q-*Abbildungen*, C^q-*Diffeomorphismen* zwischen C^q-Räumen zu verstehen hat.

Von besonderem Interesse sind die Mannigfaltigkeiten; das sind C^q-Räume, bei denen jeder Punkt eine reguläre Karte besitzt.

DEFINITION 1.4. *Sei* X *ein* C^q-*Raum. Eine Karte* (U , u , M) *auf* X *heisst regulär, wenn* M *eine offene Teilmenge des Banachraumes* V *ist. Die Punkte aus* U *heissen reguläre Punkte.*

1.5. *Sei* X *ein* C^q-*Raum* ($q \geq 1$) *und* $x \in$ X *ein regulärer Punkt. Dann gilt für jede* C^q-*Karte* (U , u , M) *zu* x, *dass* M *in einer Umgebung von* $u(x)$ *eine* C^q-*Untermannigfaltigkeit von* V (*im Sinne von* [6]) *ist.*

Beweis: Sei (U', u', M') eine reguläre Karte zu x. Wir dürfen annehmen, dass U = U' ist. Sei $h := u' \circ u^{-1}$, $h' : u \circ u'^{-1}$. Wir dürfen annehmen, dass h eine lokale Fortsetzung $\hat{h}$ in eine offene Obermenge G von M besitzt. Es gilt: $\hat{h} \circ h' = id_{M'}$, $h' \circ \hat{h} \mid M = id_M$, woraus folgt, dass h' eine Immersion ([6]) in $u'(x)$ ist.

C^ω-bzw. C^ω-Räume nennen wir auch (**R**—bzw. **C**—) *analytische Räume*.

DEFINITION 1.6. *Sei* X *ein analytischer Raum und* $x \in$ X. X *heisst in* x *analytisch-abgeschlossen* (*kurz: abgeschlossen*), *wenn es eine analytische Karte* (U , u , M) *zu* x *gibt, für die* M *die Nullstellenmenge einer Banachraum-wertigen analytischen Abbildung* f : G → W *auf einer offenen Obermenge* G *von* M *in* V *ist.*

(1) *Können die Karte und* f *so gewählt werden, dass* W *endlichdimensional ist, so heisst* X *in* x *abgeschlossen von endlicher Definition.*

(2) *Können die Karte und* f *so gewählt werden, dass* V *endlichdimensional ist, so heisst* X *in* x *abgeschlossen von endlicher Dimension.*

Abgeschlossen nennen wir analytische Räume, die in jedem Punkt abgeschlossen sind. In ähnlicher Weise sprechen wir von *abgeschlossenen Räumen endlicher Definition* und *endlicher Dimension.*

Jeder kompakte metrische Raum kann mit der Struktur eines abgeschlossenen analytischen Raumes versehen werden ([2]). Eine speziellere Struktur besitzen die abgeschlossenen **C**-analytischen Räume endlicher Definition ([9]). Abgeschlossene komplex-analytische Räume endlicher Definition nennen wir kurz *Ramissche Räume.*

1.7. *Sei* X *ein analytischer Raum und* $x \in$ X. *Ist* X *in* x *abgeschlossen von endlicher Dimension, so ist* X *in* x *abgeschlossen von endlicher Definition. Genauer: Sind* (U , u , M), G , f , W *gemäss* 1.6 (2), *so ist* M *eine analytische Menge in* G *im klassischen Sinne.*

Beweis: Es sei

$$A := \{ g : G \to \mathbf{K} : g \text{ analytisch}, \; g \mid M = 0 \}$$

und

$$M' := \{ y \in G : g(y) = 0 \quad \forall g \in A \}.$$

Dann ist M = M'.

Wir betrachten die gerichtete Menge

$$I := \{a \subset A : a \text{ endlich}\}.$$

Dann sind die Mengen

$$M_a := \{y \in G : g(y) = 0 \quad \forall g \in a\}$$

analytische Teilmengen von G mit der Eigenschaft

$$M' = \cap \{M_a : a \in I\}.$$

Daraus folgt die Behauptung.

Die abgeschlossenen analytischen Räume endlicher Dimension sind also genau die analytischen Räume im klassischen Sinne. Abgeschlossene komplex-analytische Räume endlicher Dimension nennen wir kurz *Serresche Räume*.

Analog zu 1.6 könnte man einen Abgeschlossenheitsbegriff auch für C^q-Räume mit $q \leq \infty$ definieren. Dass man damit jedoch keine interessante Raumklasse auszeichnet, zeigt die Tatsache, dass jede lokal abgeschlossene Teilmenge eines separablen Hilbertraumes Nullstellenmenge einer C^∞-Funktion ist.

Im weiteren untersuchen wir nur C^q-Räume mit $q \geq 1$. Solche Räume sind insbesondere C^1-Räume.

Für C^1-Räume ist der Begriff des stetig differenzierbaren, kurz: *glatten*, Weges definiert. Wir verfeinern die Konzeption des Wegzusammenhanges.

Definition 1.8. *Sei X ein C^1-Raum. X heisst C^1-zusammenhängend, wenn je zwei Punkte aus X durch einen stückweise glatten Weg (Definition analog* 42.14 *in* [12]) *verbunden werden können.*

Besitzt jeder Punkt aus X eine Umgebungsbasis aus C^1-zusammenhängenden offenen Mengen, so heisst X lokal C^1-zusammenhängend.

In 1.8 könnte man sich übrigens auf glatte Wege beschränken.

Satz 1.9. *Jeder Ramissche Raum ist lokal C^1-zusammenhängend.*

Der Beweis ergibt sich mit Standardschlüssen aus Théorème II.3.2.2., Seite 71 in [9].

Jeder Ramissche Raum ist sogar *lokal* " *C^∞-zusammenhängend* " und darüberhinaus in folgendem Sinne *lokal* " *holomorph-zusammenhängend* ":

1.10. *Sei X ein zusammenhängender Ramisscher Raum. Dann gibt es zu zwei Punkten $x, y \in X$ stets eine Kette $x = x_0, x_1, \cdots, x_n = y$ von paarweise verschiedenen Punkten aus X und dazu holomorphe Abbildungen $f_0, \cdots, f_{n-1}$ des Einheitskreises* $K(0;1)$ *in* **C** *in den Raum X mit der Eigenschaft:* $x_k, x_{k+1} \in$ Bild f_k *für* $k = 0, \cdots, n-1$.

§ 2. Kegel, Tangentenkegel

Definition 2.1. *Eine Menge* K, *versehen mit einer Abbildung*

$$\mathrm{skal}: \mathrm{K}\times\mathrm{K} \to \mathrm{K} \quad , \quad (a, x) \mapsto ax \, ,$$

heisst ein Kegel, wenn gilt:

(1) $a(bx) = (ab)\,x \quad \forall a, b \in \mathrm{K}, x \in \mathrm{X}$,

(2) $1\,x = x \quad \forall x \in \mathrm{K}$.

Ist K ein topologischer Raum und skal stetig, so heisst K ein *topologischer Kegel*. Ist K ein C^q-Raum und skal eine C^q-Abbildung – man versehe dabei $\mathrm{K}\times\mathrm{K}$ mit der kanonischen C^q-Struktur –, so heisst K ein C^q-*Kegel*.

Definition 2.2. *Sei* K *ein Kegel. Die Menge*

$$\mathrm{K}^0 := \{x \in \mathrm{K} : ax = x \quad \forall a \in \mathrm{K}\}$$

$$= \{0 \cdot x \quad : x \in \mathrm{K}\}$$

heisst die Spitze des Kegels K.

Ist K^0 *einpunktig, so heisst* K *spitz*.

Jeder Kegel kann über seiner Spitze nach spitzen Kegeln *gefasert* werden.

Definition 2.3. *Sei* K *ein Kegel. Das Multiplizieren mit Null, also die Abbildung*

$$\varkappa : \mathrm{K} \to \mathrm{K}^0 \quad , \quad x \mapsto 0 \cdot x$$

heisst die Projektion des Kegels.

Ist $\mathrm{M} \subset \mathrm{K}^0$, *so heisst*

$$\mathrm{K}\,|\,\mathrm{M} := \varkappa^{-1}(\mathrm{M})$$

die Beschränkung von K *auf* M.

Ist $x \in \mathrm{K}^0$, *so heisst*

$$\mathrm{K}_x := \mathrm{K}\,|\,\{x\} = \varkappa^{-1}(\{x\})$$

die Faser des Kegels über x.

Für $\mathrm{M} \subset \mathrm{K}^0$ ist $(\mathrm{K}\,|\,\mathrm{M})^0 = \mathrm{M}$. Insbesondere sind die Fasern spitze Kegel.

Ist K ein topologischer Kegel, so ist $\varkappa$ stetig und $(\mathrm{K}, \varkappa, \mathrm{K}^0)$ ein Faserraum. Ist K ein Hausdorffraum, so sind K^0 und die Fasern abgeschlossene Teilmengen von K.

Definition 2.4. *Es seien* K *und* K' *Kegel. Eine Abbildung* $k : \mathrm{K} \to \mathrm{K}'$ *heisst ein Homomorphismus, wenn gilt:*

$$k(ax) = ak(x) \quad \forall a \in \mathrm{K}, x \in \mathrm{K}\, .$$

k heisst *Isomorphismus*, wenn k bijektiv und k, k^{-1} Homomorphismen sind. Offenbar sind bijektive Homomorphismen bereits Isomorphismen.

Im Falle topologischer Kegel bzw. C^q-Kegel verlangen wir von Homomorphismen, dass sie zusätzlich stetig bzw. C^q-Abbildungen sind.

Es ist klar, was man unter einem *Unterkegel* zu verstehen hat. Wir verzichten auf eine explizite Definition.

Für jeden Kegel K haben wir in natürlicher Weise den Begriff des Faserproduktes

$$\mathrm{K} \oplus \mathrm{K} := \{(x, y) \in \mathrm{K}^2 : \varkappa(x) = \varkappa(y)\}.$$

Definition 2.5. *Ein Kegel* K, *versehen mit einer Abbildung*

$$\mathrm{add} : \mathrm{K} \oplus \mathrm{K} \to \mathrm{K}, (x, y) \mapsto x + y,$$

heisst ein linearer Kegel, wenn add *und* skal *auf jeder Faser* $\mathrm{K}_x, x \in \mathrm{K}^0$, *die Struktur eines* $\mathbf{K}$*-Vektorraumes erzeugen.*

Ist K ein topologischer Kegel und add stetig, so heisst K ein *topologischer linearer Kegel.* Ist K ein C^q-Raum und add eine C^q-Abbildung – man versehe dabei $\mathrm{K} \oplus \mathrm{K}$ mit der kanonischen C^q-Struktur –, so heisst K ein *linearer* C^q*-Kegel.*

Auf eine präzise Definition der Begriffe des *Homomorphismus linearer Kegel* und des *Unterkegels eines linearen Kegels,* die sich von selber verstehen, sei verzichtet.

2.6. *Sei* K *ein abgeschlossener analytischer Kegel. Dann sind* K^0 *und die Fasern* $\mathrm{K}_x, x \in \mathrm{K}^0$, *abgeschlossene analytische Räume.*

Im Falle abgeschlossener komplex-analytischer Kegel endlicher Dimension ist eine genaue Charakterisierung mit Hilfe homogener Potenzreihen möglich (vgl. [11]).

Eine zentrale Beispielklasse für Kegel bilden die Tangentenkegel (vgl. [16]).

Definition 2.7. *Sei* M *eine (nichtleere) Teilmenge eines* $\mathbf{K}$*-Banachraumes* V *und* x *ein Punkt aus* M. *Ein Vektor* $v \in \mathrm{V}$ *heisst*

ein Tangentenvektor in x *an* M, *wenn es eine Folge* (x_n) *in* M *und eine Folge* (c_n) *in* $\mathbf{K}$ *gibt mit*

$$x_n \to x \ , \ c_n(x_n - x) \to v \, ;$$

ein s–Tangentenvektor in x *an* M, *wenn es Folgen* $(x_n), (x_n')$ *in* M *und eine Folge* (c_n) *in* $\mathbf{K}$ *gibt mit*

$$x_n \to x \ , \ x_n' \to x \ , \ c_n(x_n \to x_n') \to v \, ;$$

ein a–Tangentenvektor der Klasse C^q, $q \geq 1$, *in* x *an* M, *wenn für jeden* C^q*-Funktionskeim* f *in* x *mit* $f \mid \mathrm{M} = 0$ *gilt*

$$d_x f(v) = 0 \, .$$

Offenbar sind alle Tangentenvektoren s–Tangentenvektoren, und gemäss 2.8 sind alle s–Tangentenvektoren a–Tangentenvektoren. Die Tangentenvektoren und die s-Tangentenvektoren in x bilden spitze Kegel

$$\mathrm{C}(\mathrm{M}, x) \text{ bzw. } s\mathrm{C}(\mathrm{M}, x)$$

mit der Spitze 0; die a-Tangentenvektoren der Klasse C^q, $q \geq 1$, bilden einen Unterbanachraum

$$\mathrm{T}^q(\mathrm{M}, x)$$

von V.

2.8. *Seien* M, M′ *Teilmengen von* **K**–*Banachräumen* V, V′ *und sei* $h: \mathrm{M} \to \mathrm{M}'$ *eine* C^1-*bzw. holomorphe Abbildung. Ausserdem sei* $x \in \mathrm{M}$, $x' := h(x)$, *und* $\hat{h}: \mathrm{U} \to \mathrm{V}'$ *sei eine lokale stetig* **K**-*differenzierbare Fortsetzung von* h *in eine offene Umgebung* U *von* x *in* V. *Ist* $v \in \mathrm{V}$ *ein* s–*Tangentenvektor an* M *in* x, *so ist* $d_x \hat{h}(v)$ *ein* s–*Tangentenvektor an* M′ *in* x'. *Er ist unabhängig von der Wahl der lokalen Fortsetzung* $\hat{h}$ *von* h. *Ist* v *ein Tangentenvektor, so auch* $d_x \hat{h}(v)$.

Beweis: Seien (x_n), (x'_n) Folgen in $\mathrm{M} \cap \mathrm{U}$ und (c_n) eine Folge in **K** mit

$$x_n \to x \ , \ x'_n \to x \ , \ c_n(x_n - x'_n) \to v \,.$$

Wir dürfen U als konvex annehmen und haben dann:

$$h(x_n) - h(x'_n) = \left(\int_0^1 \mathrm{d}_{x'_n + t(x_n - x'_n)} \hat{h} \, \mathrm{d}t \right) (x_n - x'_n) \,,$$

$$d_x \hat{h}(v) = \lim c_n (h(x_n) - h(x'_n)) \,.$$

2.9. *Seien unter den Voraussetzungen von* 2.8 h, $\hat{h}$ C^q–*Abbildungen*, $q \geq 1$. *Ist* $v \in \mathrm{V}$ *ein* a–*Tangentenvektor der Klasse* C^q *an* M *in* x, *so ist* $d_x \hat{h}(v)$ *ein* a–*Tangentenvektor der Klasse* C^q *an* M′ *in* x'. *Er ist ebenfalls unabhängig von der Wahl der lokalen Fortsetzung* $\hat{h}$ *von* h.

Beweis: Offenbar ist nur der Unabhängigkeitsbeweis von Interesse. Wir gehen indirekt vor und nehmen an, dass es eine Fortsetzung $\hat{\hat{h}}$ auf U gibt mit

$$v' := d_x \hat{h}(v) - d_x \hat{\hat{h}}(v) \neq 0 \,.$$

Nach dem Satz von Hahn-Banach existiert eine stetige Linearform L auf V′ mit $\mathrm{L}(v') \neq 0$. Für $f := \mathrm{L} \circ (\hat{h} - \hat{\hat{h}})$ gilt: $f \mid \mathrm{M} \cap \mathrm{U} = 0$, $d_x f(v) \neq 0$. Widerspruch!

Definition 2.10. *Sei* M *eine Teilmenge eines* **K**–*Banachraumes* V. *Die Kegel*

$$\mathrm{C}(\mathrm{M}) := \{(x, v) \in \mathrm{M} \times \mathrm{V} : v \text{ Tangentenvektor in } x \text{ an } \mathrm{M}\} \,,$$

$$s\mathrm{C}(\mathrm{M}) := \{(x, v) \in \mathrm{M} \times \mathrm{V} : v \ s\text{-Tangentenvektor in } x \text{ an } \mathrm{M}\} \,,$$

$$\mathrm{T}^q(\mathrm{M}) := \{(x, v) \in \mathrm{M} \times \mathrm{V} : v \ a\text{-Tangentenvektor der Klasse } \mathrm{C}^q \text{ in } x \text{ an } \mathrm{M}\}$$

heissen Tangentenkegel bzw. s–*Tangentenkegel bzw. Tangentialraum der Klasse* C^q *an* M.

Aufgrund von 2.8 und 2.9 kann man die in 2.10 definierten Kegel in natürlicher Weise auch auf C^q-Räumen X, $q \geq 1$, einführen. Jede C^q-Abbildung h zwischen C^q-Räumen induziert eine Abbildung dh zwischen diesen Kegeln.

Die Tangentialräume sind lineare Kegel. Wir denken uns C^q-Räume stets mit den Tangentialräumen der Klasse C^q versehen und verzichten dann auf die Angabe von q.

Wir identifizieren im folgenden die Spitze der Kegel 2.10 stets mit dem zugrundeliegenden Raum.

Ist X ein Serrescher Raum, so sind $s\mathrm{C}(\mathrm{X})$ und $\mathrm{T}(\mathrm{X})$ abgeschlossene komplex-analytische Kegel endlicher Dimension. Jedoch ist $\mathrm{C}(\mathrm{X})$ i.a. nicht analytisch-abgeschlossen. Allerdings sind die Fasern von $\mathrm{C}(\mathrm{X})$ für Serresche Räume X einfach zu beschreibende komplex-analytische Kegel.

Ist $w : \leq a, b \geq \to \mathrm{X}$ ein glatter Weg in einem C^1-Raum X, so ist $w'(t)$ für alle $t \in \leq a, b \geq$ ein Tangentenvektor. Vektoren dieser Art nennen wir *Geschwindigkeitsvektoren*. Sie bilden einen Unterkegel von $\mathrm{C}(\mathrm{X})$.

Definition 2.11. *Sei* X *ein* C^1-Raum. *Mit* $\mathrm{C}'(\mathrm{X})$ *bezeichnen wir den Kegel der Geschwindigkeitsvektoren.*

Für C^q-Räume X, $1 \leq q \leq \omega$, $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, haben wir folgende Kette von Kegeln:

$$\mathrm{C}'(\mathrm{X}) \subset \mathrm{C}(\mathrm{X}) \subset s\mathrm{C}(\mathrm{X}) \subset \mathrm{T}^2(\mathrm{X}) \subset \cdots \subset \mathrm{T}^q(\mathrm{X}).$$

C^h-Räume X sind spezielle C^ω-Räume. Für die verschiedenen Kegel bzgl. **R** bzw. **C** bestehen folgende Beziehungen:

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{C}_{\mathbf{C}}(\mathrm{X}) & \subset & s\mathrm{C}_{\mathbf{C}}(\mathrm{X}) & \subset & \mathrm{T}^h(\mathrm{X}) \\ \cup & & \cup & & \cup \\ \mathrm{C}_{\mathbf{R}}(\mathrm{X}) & \subset & s\mathrm{C}_{\mathbf{R}}(\mathrm{X}) & \subset & \mathrm{T}^\omega(\mathrm{X}). \end{array}$$

Ist X ein Serrescher Raum, so ist $\mathrm{C}_{\mathbf{C}}(\mathrm{X}) = \mathrm{C}'(\mathrm{X})$, insbesondere $\mathrm{C}_{\mathbf{C}}(\mathrm{X}) = \mathrm{C}_{\mathbf{R}}(\mathrm{X})$.

Sei X ein C^h-Raum und $w : \mathrm{K}(0; r) \to \mathrm{X}$ eine holomorphe Abbildung auf einem Kreis um 0 mit dem Radius r in **C**. Dann ist $w'(0)$ ein spezieller Geschwindigkeitsvektor, sogenannter *holomorpher Geschwindigkeitsvektor*.

Definition 2.12. *Sei* X *ein* C^h*-Raum. Mit* $\mathrm{C}^*(\mathrm{X})$ *bezeichnen wir den Kegel der holomorphen Geschwindigkeitsvektoren an* X.

Für C^h-Räume X gelten folgende Inklusionen:

$$\begin{array}{c} \mathrm{C}_{\mathbf{C}}(\mathrm{X}) \\ \cup \\ \mathrm{C}^*(\mathrm{X}) \subset \mathrm{C}'(\mathrm{X}). \end{array}$$

Die von uns angegebenen Kegel von Tangentenvektoren – im folgenden zusammenfassend kurz *Tangentialkegel* genannt – besitzen eine ausgezeichnete Struktur, die wir nun hervorheben.

DEFINITION 2.13. *Es seien* X *ein topologischer Raum,* V, V' *Banachräume und* K, K' *Unterkegel von* $X \times V, X \times V'$ *mit* X *(genauer:* $X \times \{0\}$*) als Spitze. Ein Homomorphismus* $\Phi : K \to K'$ *heisst quasilinear, wenn es zu jedem Punkt* $x \in K^0$ *eine Umgebung* U *und eine stetige Abbildung* $\varphi : U \to L(V, V')$ *in den Raum der stetigen linearen Abbildungen von* V *in* V' *gibt, so dass für alle* $(y, v) \in K \cap (U \times V)$ *gilt:* $\Phi(y, v) = (y, \varphi(y) v)$.

Ist der Raum X in 2.13 ein C^q–Raum und ist Φ ein C^q–Homomorphismus, so heisst Φ C^q-*quasilinear*, wenn die Abbildungen φ in 2.13 als C^q–Abbildungen gewählt werden können.

DEFINITION 2.14. *Sei* K *ein topologischer Kegel. Ein Einfachheitsatlas* $\mathfrak{R}$ *von* K *(mit Karten in der Kategorie* $\mathfrak{A}$*) ist eine Kollektion von Tripeln* (U, Φ, C), *für die folgendes gilt:*

(1) *Für alle* (U, Φ, C) *aus* $\mathfrak{R}$ *ist* U *eine offene Teilmenge der Spitze von* K, C *ein Unterkegel eines Kegel* $U \times V$, *wobei* V *ein Banachraum (der Kategorie* $\mathfrak{A}$*) ist, und* $\Phi : K \mid U \to C$ *ein topologischer Kegelisomorphismus mit* $\Phi \mid U = \mathrm{id}_U$.

(2) *Die Mengen* U, (U, Φ, C) *aus* $\mathfrak{R}$, *überdecken* K^0.

(3) *Für alle* (U, Φ, C), (U', Φ', C') *aus* $\mathfrak{R}$ *ist* $U \cap U' = \emptyset$ *oder der Isomorphismus*

$$\Phi' \circ \Phi^{-1} : \Phi(K \mid U \cap U') \to \Phi'(K \mid U \cap U')$$

ist quasilinear.

K, *versehen mit* $\mathfrak{R}$, *heisst ein einfacher Kegel (mit Karten in* $\mathfrak{A}$*).*

Ist der Kegel K in 2.14 ein C^q–Kegel, so heisst $\mathfrak{R}$ ein C^q–*Einfachheitsatlas*, wenn die Abbildungen Φ C^q–Diffeomorphismen und die Abbildungen $\Phi' \circ \Phi^{-1}$ C^q–quasilinear sind. Unter *einfachen* C^q–*Kegeln* verstehen wir stets solche mit einem C^q–Einfachheitsatlas.

Offenbar sind die Tangentialkegel von C^q–Räumen, $q \geq 1$, in natürlicher Weise einfache C^{q-1}–Kegel.

Beschäftigen wir uns mit linearen Kegeln, so sei in 2.14 natürlich stets vorausgesetzt, dass die Abbildungen Φ Isomorphismen linearer Kegel sind. In diesem Sinne sind die Tangentialräume einfache lineare Kegel.

Es ist klar, was man unter *Karten* auf einfachen Kegeln zu verstehen hat. Wir verzichten auf eine präzise Definition. Ist (U, Φ, C) eine Karte und $x \in U$, so heisst (U, Φ, C) eine Karte zu x.

DEFINITION 2.15. *Ein einfacher Kegel heisst einfach–abgeschlossen (häufig kurz: abgeschlossen), wenn es zu jedem Punkt* $x \in K^0$ *eine Karte* (U, Φ, C) *gibt, so dass* C *eine abgeschlossene Teilmenge von* $U \times V$ *ist.*

Der Begriff der Abgeschlossenheit ist nicht abhängig von der Wahl der Karte.

2.16. *Sei* K *ein abgeschlossener einfacher Kegel und* (U, Φ, C) *eine Karte von* K. *Dann ist* C *eine abgeschlossene Teilmenge von* $U \times V$.

Beweis: Ist (U', Φ, C') eine Karte gemäss 2.15 und $\tilde{U} := U \cap U' \neq \emptyset$, so gibt es o.B.d.A. eine stetige Abbildung $\varphi : \tilde{U} \to L(V, V')$, welche $\Phi' \circ \Phi^{-1}$ gemäss 2.13 beschreibt. Die Abbildung $\psi : \tilde{U} \times V \to \tilde{U} \times V'$, $\psi(x, v) := (x, \varphi(x)v)$, ist stetig; also ist $\psi^{-1}(\Phi'(K \mid \tilde{U})) = \Phi(K \mid \tilde{U})$ abgeschlossene Teilmenge von $\tilde{U} \times V$.

2.17. *Für jeden* C^1– *bzw.* C^a–*Raum* X *ist* $sC(X)$ *einfach-abgeschlossen.*

Beweis: Wir dürfen davon ausgehen, dass X eine Teilmenge eines Banachraumes V ist und betrachten Folgen (x_m) in X, (v_m) in V mit:

$$v_m \in sC(X, x_m) \quad , \quad x_m \to x \in X \quad , \quad v_m \to v \in V .$$

In X bzw. **K** existieren Folgen (x_{mn}), (x'_{mn}) bzw. (c_{mn}) mit:

$$x_{mn} \to x_m \quad , \quad x'_{mn} \to x_m \quad , \quad c_{mn}(x_{mn} - x'_{mn}) \to v_m .$$

Zu jedem $m \in \mathbf{N}$ gibt es einen Index n_m, so dass für $y_m := x_{mn_m}$, $y'_m := x'_{mn_m}$, $d_m := c_{mn_m}$ gilt ($\|\cdot\|$ sei Norm von V):

$$\| y_m - x_m \| < \frac{1}{m+1} \;,\quad \| y'_m - x'_m \| < \frac{1}{m+1} \;,\quad \| d_m (y_m - y'_m) - v_m \| < \frac{1}{m+1} .$$

Dann folgt:

$$y_m \to x \quad , \quad y'_m \to x \quad , \quad d_m (y_m - y'_m) \to v .$$

Trivialerweise ist für jeden C^a-Raum X der Kegel $T(X)$ einfach-abgeschlossen; jedoch kann man sehr leicht Beispiele mit nicht abgeschlossenem Kegel $C(X)$ angeben.

§ 3. Beträge, Längenmessung

Definition 3.1. *Sei* K *ein Kegel. Ein Semibetrag ist eine Abbildung* $\beta : K \to \mathbf{R}_+$ *mit der Eigenschaft*

$$\beta(ax) = |a| \, \beta(x) \quad \forall a \in \mathbf{K} ,\ x \in K .$$

Gilt für alle $x \in K$, $x \notin K^0$, $\beta(x) > 0$, *so heisst* β *ein Betrag.*

Beispiele für Semibeträge sind die "*infinitesimale Carathéodory-Metrik*",

$$\gamma : T(X) \to \mathbf{R}_+ ,$$

die wie in [10] auf den Tangentialräumen Serrescher Räume definiert werden kann, sowie die "*infinitesimale Kobayashi-Metrik*"

$$\varkappa : C^*(X) \to \mathbf{R}_+ ,$$

die wie in [14] auf den holomorphen Geschwindigkeitskegeln von C^a-Räumen definiert werden kann.

γ ist eine stetige Funktion und induziert auf jeder Faser eine Seminorm.
Es ist unbekannt, ob $\varkappa$ (für "vernünftige" Räume X) stetig ist. Ausserdem ist unbekannt, ob $\varkappa$ für Mannigfaltigkeiten auf jeder Faser eine Seminorm induziert.

3.2. *Jeder einfache Kegel mit parakompakter Spitze besitzt in natürlicher Weise stetige Betragsfunktionen.*

Beweis: Sei $\mathfrak{R}$ ein Einfachheitsatlas des Kegels wie in 2.14. Wir dürfen annehmen, dass $\{U : (U, \Phi, C) \in \mathfrak{R}\}$ eine lokal-endliche Überdeckung der Spitze ist. Ist dann (f_U) eine zugehörige stetige Partition der Eins und $\|\cdot\|_V$ die Norm von V, so ist $\Sigma f_U \|\cdot\|_V$ eine stetige Betragsfunktion auf K.

Gemass 3.2 gibt es insbesondere auf den Tangentialkegeln von C^r-Räumen stetige Beträge.

Definition 3.3. *Ein Semibetrag auf einem linearen Kegel heisst Seminorm, wenn er auf den Fasern Seminormen liefert. Erhält man auf den Fasern Normen, so sprechen wir von einer Norm.*

Die gemäss 3.3 konstruierten Beträge sind offenbar Normen, wenn ein einfacher linearer Kegel vorliegt. Insbesondere gibt es auf den Tangentialräumen von C^r-Räumen stetige Normen.

Definition 3.4. *Sei* K *ein linearer Kegel. Ein Semiskalarprodukt ist eine Abbildung*

$$\sigma : K \oplus K \rightarrow \mathbf{K},$$

deren Beschränkungen auf die Fasern positiv semidefinite Sesquilinearformen sind. Sind die Beschränkungen auf die Fasern positiv definit (also Skalarprodukte), so heisst σ *ein Skalarprodukt.*

Die gemäss 3.2 konstruierten Beträge stammen offenbar von einem Skalarprodukt her, wenn ein linearer Kegel vorliegt, der einfach von der Kategorie $\mathfrak{H}$ der Hilberträume ist. Insbesondere gibt es auf den Tangentialräumen von C^r-Räumen mit Karten in $\mathfrak{H}$ stetige Skalarprodukte.

Auf einfachen Kegeln ist es möglich, beschränkte und stark definite Semibeträge auszuzeichnen.

Definition 3.5. *Sei* β *ein Semibetrag auf einem einfachen Kegel* K. β *heisst*

(1) *beschränkt, wenn es zu jedem Punkt* $x \in K^*$ *eine Karte* (U, Φ, C) *sowie eine Konstante* $A > 0$ *gibt mit*

$$\beta(v) \leq A \|\Phi(v)\| \quad \forall v \in K \,|\, U ;$$

(2) *stark definit, wenn es zu jedem Punkt* $x \in K^*$ *eine Karte* (U, Φ, C) *sowie eine Konstante* $a > 0$ *gibt mit*

$$\beta(v) \geq a \|\Phi(v)\| \quad \forall v \in K \,|\, U$$

($\|\cdot\|$ *Norm des zu* C *gehörigen Banachraumes*).

Stark definite Semibeträge sind Beträge.

Die Begriffe der Beschränktheit und der starken Definitheit hängen nicht von der Wahl der Karte ab. Man zeigt mit Standardschlüssen:

3.6. *Seien* K *ein einfacher Kegel,* β *ein Semibetrag auf* K, $x \in K^0$ *und* (U, Φ, C) *eine Karte zu* x. *Dann gilt:*

Ist β *beschränkt, so gibt es eine Umgebung* U' *von* x *in* U, *so dass* $(U', \Phi \mid (K \mid U'), \Phi(K \mid U'))$ *mit einer geeigneten Konstanten* $A > 0$ *der Bedingung* 3.5 (1) *genügt.*

Ist β *stark definit, so gibt es eine Umgebung* U' *von* x *in* U, *so dass* $(U', \Phi \mid (K \mid U'), \Phi(K \mid U'))$ *mit einer geeigneten Konstanten* $a > 0$ *der Bedingung* 3.5 (2) *genügt.*

Die gemäss 3.2 konstruierten Beträge sind beschränkt und stark definit. Allgemeiner gilt:

3.7. *Jeder stetige Semibetrag auf einem einfachen Kegel ist beschränkt.*

Der einfache Beweis sei dem Leser überlassen.

Ist K ein abgeschlossener einfacher linearer Kegel und β eine stark definite und beschränkte Norm auf K, so sind alle Halme Banachräume und β induziert die Topologie in den Halmen.

Definition 3.8. *Ein Semibetrag* β *auf einem einfachen Kegel* K *heisst gleichmässig, wenn es zu jedem Punkt* $x \in K^0$ *eine Karte* (U, Φ, C) *und eine Konstante* $\Lambda > 0$ *mit folgender Eigenschaft gibt:*

Zu jeder Zahl $r > 0$ *gibt es eine Umgebung* U' *von* x *in* U, *so dass gilt*

$$|\beta \circ \Phi^{-1}(x, v) - \beta \circ \Phi^{-1}(x', v')| \leq r(\|v\| + \|v'\|) + \Lambda \|v - v'\|$$

$$\forall (x, v), (x', v') \in \Phi(K \mid U').$$

Der Begriff der Gleichmässigkeit hängt nicht von der Wahl der Karte ab.

3.9. *Sei* β *ein gleichmässiger Semibetrag auf einem einfachen Kegel* K *und* $x \in K^0$. *Dann gibt es zu jeder Karte* (U, Φ, C) *zu* x *eine Konstante* $\Lambda > 0$, *derart dass* 3.8 *gilt.*

Offenbar sind gleichmässige Semibeträge stets stetig. Die stark definiten gleichmässigen Normen auf Vektorraumbündeln sind genau die Finslerstrukturen im Sinne von [8].

Definition 3.10. *Sei* K *ein einfacher Kegel. Unter einem Finslerbetrag auf* K *verstehen wir einen stark definiten gleichmässigen Betrag auf* K.

Die Theorie vereinfacht sich im Fall der Kategorie $\mathfrak{C}$ der endlichdimensionalen Vektorräume.

3.11. *Der Kegel* K *sei einfach von der Kategorie* $\mathfrak{C}$ *und abgeschlossen;* K^n *erfülle das erste Abzählbarkeitsaxiom. Dann gilt:*

(1) *Jeder stetige Betrag auf* K *ist stark definit.*

(2) *Ist* K *linear, so ist jede stetige Seminorm auf* K *gleichmässig, also jede stetige Norm eine Finslernorm.*

Beweis: O.B.d.A. ist K Unterkegel eines Kegels der Form $X \times \mathbf{K}^n$, $X = K^q$.

(1) Sei $x \in X$. Dann ist ($|\cdot|$ sei Norm auf $\mathbf{K}^n$)

$$S := \{(x, \mathfrak{v}) \in K_x : |\mathfrak{v}| = 1\}$$

kompakt und $\inf \{\beta(x, \mathfrak{v}) : (x, \mathfrak{v}) \in S\} > 0$.

(2) Sei $x \in X$. Dann ist $\beta(x, \cdot)$ eine stetige Seminorm auf dem durch K_x definierten Unterbanachraum von $\mathbf{K}^n$. Also existiert ein $A > 0$ mit $\beta(x, \cdot) \leq A |\cdot|$. Wir gehen indirekt vor und finden eine Zahl $r > 0$, sowie Folgen $(x'_m, \mathfrak{v}'_m)$ in K, $(\mathfrak{v}_m)$ in $\mathbf{K}^n$ mit den Eigenschaften:

$(x, \mathfrak{v}_m) \in K$, $\max\{|\mathfrak{v}_m|, |\mathfrak{v}'_m|\} = 1$;

$x'_m \to x$, $\mathfrak{v}_m \to \mathfrak{v}$, $\mathfrak{v}'_m \to \mathfrak{v}'$;

$|\beta(x, \mathfrak{v}_m) - \beta(x'_m, \mathfrak{v}'_m)| > r(|\mathfrak{v}_m| + |\mathfrak{v}'_m|) + A|\mathfrak{v}_m - \mathfrak{v}'_m|$.

Es folgt: $|\beta(x, \mathfrak{v}) - \beta(x, \mathfrak{v}')| \geq r + A|\mathfrak{v} - \mathfrak{v}'|$. Widerspruch!

Wir wollen uns nun dem Problem der Längenmessung zuwenden.

Definition 3.12. *Sei* X *ein topologischer Raum und* $\mathfrak{N}$ *ein System von Wegen auf* X. *Wir nennen* $\mathfrak{N}$ *ein Netz, wenn für* $\mathfrak{N}$ *folgendes gilt:*

(1) *Für alle* $\mathfrak{w} : \leq a, b \geq \to X$ *aus* $\mathfrak{N}$ *und alle* C^1*-Diffeomorphismen* $\tau : \leq c, d \geq \to \leq a, b \geq$ *ist* $\mathfrak{w} \circ \tau$ *aus* $\mathfrak{N}$.

(2) *Für alle* $\mathfrak{w} : \leq a, b \geq \to X$ *aus* $\mathfrak{N}$ *und* $a < a' < b' < b$ *ist auch* $\mathfrak{w} \mid \leq a', b' \geq$ *aus* $\mathfrak{N}$.

(3) *Für alle* $\mathfrak{w} : \leq a, b \geq \to X$, $\tilde{\mathfrak{w}} : \leq b, c \geq \to X$ *aus* $\mathfrak{N}$ *mit* $\mathfrak{w}(b) = \tilde{\mathfrak{w}}(b)$ *ist auch* $\mathfrak{w} \vee \tilde{\mathfrak{w}} : \leq a, c \geq \to X$ *mit*

$$\mathfrak{w} \vee \tilde{\mathfrak{w}}(t) := \begin{cases} \mathfrak{w}(t) & t \in \leq a, b \geq \\ \tilde{\mathfrak{w}}(t) & t \in \leq b, c \geq \end{cases}$$

aus $\mathfrak{N}$.

Auf einem topologischen Raum bildet die Menge $\mathfrak{W}^0$ aller Wege ein Netz; auf einem C^1-Raum bildet die Menge $\mathfrak{W}^1$ aller stückweise glatten Wege ein Netz.

Wir verallgemeinern den Begriff des Wegzusammenhanges.

Definition 3.13. *Sei* $\mathfrak{N}$ *ein Netz auf einem topologischen Raum* X. $Y \subset X$ *heisst* $\mathfrak{N}$*-zusammenhängend, wenn es zu je zwei Punkten* $x, y \in Y$ *einen Weg* $\mathfrak{w} \in \mathfrak{N}$ *gibt, der* x *mit* y *in* Y *verbindet.*

Besitzt jeder Punkt aus X *eine Umgebungsbasis aus* $\mathfrak{N}$*-zusammenhängenden offenen Mengen, so heisst* X *lokal* $\mathfrak{N}$*-zusammenhängend.*

Definition 3.14. *Sei $\mathfrak{N}$ ein Netz auf einem topologischen Raum* X. *Unter einer Längenmessung auf $\mathfrak{N}$ verstehen wir eine Abbildung* $l : \mathfrak{N} \to \mathrm{R}_+$ *mit folgenden Eigenschaften:*

(1) *Für alle w und τ gemäss* 3.12 (1) *ist* $l(w \circ \tau) = l(w)$.

(2) *Sind w, $\tilde{w}$ aus $\mathfrak{N}$ gemäss* 3.12 (3), *so ist* $l(w \vee \tilde{w}) = l(w) + l(\tilde{w})$.

Unter einer Semimetrik D verstehen wir eine Funktion mit den Eigenschaften einer Metrik mit Ausnahme der Bedingung $\mathrm{D}(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$. Semimetriken definieren Längenmessungen.

Definition 3.15. *Sei* X *ein topologischer Raum und* D *eine (nicht notwendig stetige) Semimetrik auf* X. *Für* $w : \leq a, b \geq \to \mathrm{X}$ *aus* $\mathfrak{W}^0$ *sei*

$$\int_w \mathrm{D} := \sup \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{D}\left(w(a_{k+1}), w(a_k)\right) : a = a_0 < \cdots < a_n = b \right\}.$$

Dadurch wird eine Längenmessung $\int \mathrm{D} : \mathfrak{W}^0 \to \overline{\mathrm{R}}_+$ *definiert.* $\int \mathrm{D}$ *heisst das Integral über* D.

Messbare Semibeträge definieren Längenmessungen.

Definition 3.16. *Sei* X *ein* C^1*-Raum und* β *ein Semibetrag auf* $\mathrm{C}'(\mathrm{X})$. β *heisst messbar, wenn für alle stückweise glatten Wege* $w : \leq a, b \geq \to \mathrm{X}$ *die Funktion* $\beta \cdot w'$ *messbar ist. Wir setzen dann*

$$\int_w \beta := \int_a^b \beta \circ w' \, dt .$$

Dadurch wird eine Längenmessung $\int \beta : \mathfrak{W}^1 \to \mathrm{R}_+$ *definiert.* $\int \beta$ *heisst das Integral über* β.

Ist β stetig, so nimmt $\int \beta$ nur endliche Werte an.

Definition 3.17. *Ist unter den Voraussetzungen von* 3.16 *für alle* $w \in \mathfrak{W}^1$ $\int_w \beta < \infty$, *so heisst* β *summierbar.*

Es ist ein interessantes Problem, wann eine Längenmessung l auf einem Netz $\mathfrak{W}^1(\mathrm{X})$ eine Darstellung $l = \int \beta$, β messbarer Semibetrag auf $\mathrm{C}'(\mathrm{X})$, besitzt. Ist β stetig, so kann β aus $\int \beta$ durch Differentiation zurückgewonnen werden.

Definition 3.18. *Sei $\mathfrak{H}$ ein Netz auf dem topologischen Raum* X *und* $l : \mathfrak{H} \to \overline{\mathrm{R}}_+$ *eine endliche Längenmessung, d.h.* $l(w) < \infty \; \forall w \in \mathfrak{H}$. *Ist* X $\mathfrak{H}$*-zusammenhänged, so sei für* $x, y \in \mathrm{X}$.

$$\inf l(x, y) := \inf \{ l(w) : w \in \mathfrak{N},\ w \text{ verbindet } x \text{ und } y \} .$$

Dadurch wird eine Semimetrik auf X *definiert.*

3.19. *Sei* V *ein Banachraum mit einer Norm* $\|\cdot\|$. *Dann gilt:*

$$\inf \int \|\cdot\| (x, y) = \| x - y \| \qquad \forall x, y \in V.$$

Der Beweis folgt sofort aus 4.18.

Im weiteren seien X ein C^1-zusammenhängender C^1-Raum und β ein summierbarer Semibetrag auf $C'(X)$. Dann ist $\inf \int \beta$ eine Semimetrik auf X. Wir studieren die Beziehungen zwischen der " natürlichen " Topologie auf X und der durch $\inf \int \beta$ definierten Topologie.

3.20. *Ist* β *stark definit, so erzeugt* $\inf \int \beta$ *eine feinere als die natürliche Topologie.*

Beweis: Sei x ein Punkt einer offenen Teilmenge U von X. Wir müssen um x eine $\inf \int \beta$-Kugel legen, die ganz in U enthalten ist.

O.B.d.A. gehört U zu einer Karte (U, u, M) von X mit $u(x) = 0$. Da X ein regulärer topologischer Raum ist, gibt es eine Umgebung U' von x, deren U-Abschluss mit ihrem X-Abschluss übereinstimmt.

M ist Teilmenge eines Banachraumes V mit der Norm $\|\cdot\|$. Wir dürfen annehmen, dass $u(U')$ der Durchschnitt von M mit einer Kugel um 0 vom Radius $r > 0$ ist. Ausserdem dürfen wir davon ausgehen, dass eine Konstante $C > 0$ existiert mit: $\beta(v) \geq C \| du(v) \| \; \forall v \in C'(U)$.

Ist $y \in X$, $y \notin U'$, so betrachte man einen stückweise glatten Weg $w : \leq a, b \geq \to X$, der x mit y verbindet. Sei $c \in \leq a, b \geq$ der kleinste Punkt mit der *Eigenschaft* $w(c) \notin U'$. Es gilt $\| u(w(c)) \| = r$ und weiter

$$\int_w \beta \geq \int_{w|\leq a, c\geq} \beta \geq C \int_a^c \| (u \circ w)' \| \, dt \geq C \cdot r.$$

Also ist $\inf \int \beta(x, y) \geq C \cdot r$ und der $\inf \int \beta$-Kreis um x mit dem Radius $C \cdot r$ in U' enthalten.

Zur Gewinnung gröberer Topologien als die natürliche benötigen wir die Konzeption des " metrisch einfachen " Raumes.

Definition 3.21. X *heisst metrisch einfach, wenn es zu jedem Punkt* $x \in X$ *eine Karte* (U, u, M), $M \subset V$, V *Banachraum mit Norm* $\|\cdot\|$, *gibt, welche folgende Eigenschaft besitzt:*

Zu jeder Zahl $r > 0$ *gibt es eine Umgebungsbasis von Umgebungen* U' *von* x *in* U, *derart dass bei Vorgabe von* U' *alle Punkte* y *einer in* U' *enthaltenen Umgebung* U'' *von* x *durch einen in* U' *verlaufenden stückweise glatten Weg* w *mit* x *verbunden werden können, für den* $\int_w \|\cdot\| < r$ *gilt.*

3.22. *Ist* X *metrisch einfach und* β *beschränkt, so erzeugt* inf $\int \beta$ *eine gröbere als die natürliche Topologie.*

Beweis: Es sei $x \in X$ und K die inf $\int \beta$-Kugel um x mit dem Radius $s > 0$. Wir müssen x als inneren Punkt von K bzgl. der natürlichen Topologie nachweisen.

Zu x gehört eine Karte (U, u, M) gemäss 3.21. Wir dürfen annehmen; dass $(U, (id, du), V)$ zusammen mit einer Konstanten $C > 0$ der Bedingung 3.5 (I) genügt. Zu $r := sC^{-1}$ betrachten wir Umgebungen U', U'' gemäss 3.21. Ist $y \in U''$ und w ein Weg gemäss 3.21, so gilt: $\int_w \beta \leq C \int_{u \circ w} \|\cdot\| < s$. Es folgt: $\inf \int \beta(x, y) < s$, $U'' \subset K$.

Es gilt die folgende Umkehrung von 3.22:

3.23. *Ist* β *stark definit und erzeugt* inf $\int \beta$ *die natürliche Topologie auf* X, *so ist* X *metrisch einfach.*

Beweis: Wir betrachten einen Punkt $x \in X$ und dazu eine Karte (U, u, M) wie im Beweis zu 3.20. Ist dann w ein stückweise glatter Weg in X, der in x anfängt und Punkte ausserhalb U' trifft, so ist

$$\int_w \beta \geq C \cdot r.$$

Wir geben uns nun eine Zahl $0 < s < r$ vor und betrachten die inf $\int \beta$-Kugel U'' um x mit dem Radius $C \cdot s$. U'' ist eine Umgebung von x. Ist $y \in U''$ und w ein stückweise glatter Weg in X, der x und y verbindet mit $\int_w \beta < C \cdot s$, so muss w in U' verlaufen, und es folgt weiter:

$$\int_{u \circ w} \|\cdot\| \leq C^{-1} \int_w \beta < s.$$

Da r und s beliebig klein gewählt werden können, ist 3.21 erfüllt.

DEFINITION 3.24. *Ein Finslerscher Raum ist ein metrisch einfacher* C^1*-zusammenhängender* C^1*-Raum zusammen mit einem Finslerbetrag auf seinem Geschwindigkeitskegel.*

Wir haben gezeigt, dass die Finslerstruktur auf einem Finslerschen Raum die natürliche Topologie des Raumes erzeugt.

§ 4. Differenzierbare Metriken

Im weiteren seien zunächst V ein $\mathbf{R}$-Banachraum mit der Norm $\|\cdot\|$, X eine Teilmenge von V und D eine Semimetrik auf X. Ausserdem sei $x \in$ X.

4.1. *Für einen Einheitsvektor v von* V *gilt:*

(1) $v \in \mathrm{C}(\mathrm{X}, x) \Longleftrightarrow$ *es existiert eine Folge* (x_n) *in* X *mit* $x_n \neq x$ $\forall n \in \mathbf{N}$, $x_n \to x$ *und*

$$\frac{x_n - x}{\|x_n - x\|} \to v \quad \textit{oder} \quad \frac{x - x_n}{\|x - x_n\|} \to v \,.$$

(2) $v \in s\mathrm{C}(\mathrm{X}, x) \Longleftrightarrow$ *es existieren Folgen* (x_n), (y_n) *in* X *mit* $x_n \neq y_n$ $\forall n \in \mathbf{N}$, $x_n \to x$, $y_n \to x$ *und*

$$\frac{x_n - y_n}{\|x_n - y_n\|} \to v \,.$$

Definition 4.2. *Sei v ein Einheitsvektor von* V

(1) *Ist $v \in \mathrm{C}(\mathrm{X}, x)$, so heisst* D *in x in der Richtung von v g-differenzierbar, wenn für jede Folge (x_n) gemäss 4.1 (1) die Folge* $\left(\frac{\mathrm{D}(x, x_n)}{\|x - x_n\|}\right)$ *konvergiert.*

(2) *Ist $v \in s\mathrm{C}(\mathrm{X}, x)$, so heisst* D *in x in der Richtung von v sg-differenzierbar, wenn für alle Folgen (x_n), (y_n) gemäss 4.1 (2) die Folge* $\left(\frac{\mathrm{D}(x_n, y_n)}{\|x_n - y_n\|}\right)$ *konvergiert.*

Der eindeutig bestimmte Limes gemäss (1) bzw. (2) heisst die Ableitung von D *in x in Richtung von v. Wir schreiben dafür* $\mathrm{D}'(x, v)$.

Offenbar impliziert die sg-Differenzierbarkeit die g-Differenzierbarkeit.

Beispiel 4.3. *Es sei α eine stetige Seminorm auf* V *und* A *die durch α definierte Semimetrik Dann ist* A *in jedem Punkt x von* V *in Richtung eines jeden Einheitsvektors v sg-differenzierbar und* $\mathrm{A}'(x, v) = \alpha(v)$.

Definition 4.4. *Voraussetzungen, wie eingangs des Paragraphen festgelegt.*

(1) D *heisst in x g-differenzierbar, wenn* D *in x in der Richtung eines jeden Einheitsvektors $v \in \mathrm{C}(\mathrm{X}, x)$ g-differenzierbar ist.*

(2) D *heisst in x sg-differenzierbar, wenn* D *in x in der Richtung eines jeden Einheitsvektors $v \in s\mathrm{C}(\mathrm{X}, x)$ sg-differenzierbar ist.*

Im Falle von (1) bzw. (2) erweitern wir die Ableitung aus 4.2 zu einer Semibetragsfunktion $\mathrm{D}'(x)$ *auf* $\mathrm{C}(\mathrm{X}, x)$ *bzw.* $s\mathrm{C}(\mathrm{X}, x)$ *durch*

$$\mathrm{D}'(x, v) := \begin{cases} 0 & v = 0 \\ \|v\| \, \mathrm{D}'\left(x, \frac{v}{\|v\|}\right) & v \neq 0 \,. \end{cases}$$

$\mathrm{D}'(x)$ *heisst die Ableitung von* D *in x.*

Wir nennen D *g-differenzierbar* bzw. *sg-differenzierbar*, wenn D die angesprochene Eigenschaft in jedem Punkte aus X besitzt. In diesem Fall definiert D einen *Semibetrag* D' auf C (X) bzw. sC (X).

Im Falle der Semimetrik A aus 4.3 ist A' = s.

4.5. *Ist x ein innerer Punkt von* X *und* D *in x sg-differenzierbar, so ist* D' (x) *eine Seminorm auf* V = sC (X)$_x$.

Beweis: Seien $u, v \in$ V. Dann gilt für (kleine) positive Zahlen t:

$$\frac{D(x, x+t(u+v))}{t} \leq \frac{D(x, x+tu)}{t} + \frac{D(x+tu, x+t(u+v))}{t}$$

$$D'(x, u+v) \leq D'(x, u) + D'(x, v).$$

Für unsere Theorie bedeutsam sind die beschränkten Semimetriken.

Definition 4.6. *Voraussetzungen, wie eingangs des Paragraphen festgelegt.*

(1) D *heisst in x g-beschränkt, wenn es eine Zahl* C > 0 *und eine Umgebung* U *von x in* X *gibt mit*

$$D(x, y) \leq C \| x - y \| \quad \forall y \in U.$$

(2) D *heisst in x sg-beschränkt, wenn es eine Zahl* C > 0 *und eine Umgebung* U *von x in* X *gibt mit*

$$D(x', y') \leq C \| x' - y' \| \quad \forall x', y' \in U.$$

Wir nennen D *g-beschränkt* bzw. *sg-beschränkt*, wenn D die angesprochene Eigenschaft in jedem Punkt aus X besitzt.

Dem Leser überlassen wir den Beweis der folgenden einfachen Aussage.

4.7. *Ist* dim V < ∞ *und* D *in x g- bzw. sg-differenzierbar, so ist* D *in x g- bzw. sg-beschränkt.*

4.8. *Voraussetzungen, wie eingangs des Paragraphen festgelegt.*

Ist D *in x g-differenzierbar und g-beschränkt (sg-differenzierbar und sg-beschränkt), so ist* D' (x) *ein stetiger Semibetrag auf* C (X)$_x$ (sC (X)$_x$).

Zum Beweis benötigen wir folgenden Hilfssatz, dessen Beweis wir dem Leser überlassen.

4.9. *Seien* Y *ein topologischer Raum,* W *ein Banachraum mit Norm* $\|\cdot\|$ *und* β *ein Semibetrag auf einem Unterkegel* K *von* Y × W. *Dann gilt:* β *ist genau dann stetig, wenn* β *beschränkt und auf* S := {(y, v) ∈ K : $\|v\|$ = 1} *stetig ist.*

Beweis von 4.8: Wir beschränken uns auf den Fall "*sg*" und wenden 4.9 auf $Y = \{x\}$, $W = V$, $K = sC(X)$, an. Dabei ist offenbar nur der Nachweis der Stetigkeit von $D'(x)$ auf $S = \{v \in sC(X, x) : \|v\| = 1\}$ von Interesse.

Dazu betrachten wir eine Folge (v_m) in S mit $v_m \to v$.

Zu jedem Vektor v_m, $m \in \mathbf{N}$, existieren Folgen (x_{mn}), (y_{mn}) gemäss 4.1 (2). Wir finden dann zu jedem $m \in \mathbf{N}$ ein $n_m \in \mathbf{N}$, derart dass für $x'_m := x_{mn_m}$, $y'_m := y_{mn_m}$ gilt:

$$\|x - x'_m\| < \frac{1}{m+1}\,, \quad \|x - y'_m\| < \frac{1}{m+1}\,;$$

$$\left\| \frac{x'_m - y'_m}{\|x'_m - y'_m\|} - v_m \right\| < \frac{1}{m+1}\,;$$

$$\left| \frac{D(x'_m, y'_m)}{\|x'_m - y'_m\|} - D'(x, v_m) \right| < \frac{1}{m+1}\,.$$

Die Folgen (x'_m), (y'_m) erfüllen 4.1 (2) bzgl. v. Also gilt:

$$\frac{D(x'_m, y'_m)}{\|x'_m - y'_m\|} \to D'(x, v)\,.$$

Im endlichdimensionalen Fall bedeutet die Differenzierbarkeit gerade Approximierbarkeit durch einen Semibetrag.

4.10. *Sei* $\dim V < \infty$ *und x innerer Punkt von* X. *Dann gilt:* D *ist genau dann in x g-differenzierbar, wenn ein stetiger Semibetrag* β *auf* $V = C(X)$, *existiert mit*

$$\lim_{y \to x} \frac{D(x, y) - \beta(x - y)}{\|x - y\|} = 0\,.$$

β *ist eindeutig bestimmt und gleich* $D'(x)$.

Der Beweis von 4.10 sowie Formulierung und Beweis der analogen Aussage im Falle der *sg*-Differenzierbarkeit sei dem Leser überlassen.

Im Fall der *sg*-Differenzierbarkeit haben wir die folgende Verschärfung von 4.8.

4.11. *Voraussetzungen, wie eingangs des Paragraphen festgelegt.*

Ist D *auf* X *sg-differenzierbar und sg-beschränkt, so ist* D' *eine stetige Funktion auf* $sC(X)$.

Beweis: Man wende 4.9 auf $Y = X$, $W = V$, $K = sC(X)$ an und modifiziere den Beweis von 4.8 geringfügig.

Aus 4.11 folgt:

4.12. *Sei* $\dim V < \infty$ *und* X *eine offene Teilmenge von* V. *Ist* D *auf* X *sg-differenzierbar, so gibt es zu jedem Kompaktum* Y *in* X *und zu jeder Zahl*

$\varepsilon > 0$ *eine Zahl* $r > 0$ *mit der Eigenschaft:*

$$|D(x, y) - D'(x, x - y)| \leq \varepsilon \|x - y\| \qquad \forall x, y \in Y, \|x - y\| < r.$$

4.13. *Aussage 4.12 gilt offenbar auch, wenn* X *ein kompaktes Intervall im* $\mathbf{R}^n$ *und* $Y = X$ *ist.*

Daraus folgt:

4.14. *Ist* X *ein Intervall* $\leq a, b \geq$, $a < b$, *in* $\mathbf{R}$ *und* D *sg-differenzierbar auf* X, *so gilt für den identischen Weg* x *auf* X:

$$\int_x D = \int_x D'.$$

Beweis: Ist $\varepsilon > 0$ vorgegeben, so existiert ein $r > 0$ mit den in 4.12 genannten Eigenschaften. Ist dann $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ eine Zerlegung mit $a_{k+1} - a_k < r$, so gilt:

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} D(a_{k+1}, a_k) - \sum_{k=0}^{n-1} D'(a_{k+1}, 1)(a_{k+1} - a_k) \right| \leq \varepsilon (b - a).$$

Der Differenzierbarkeitsbegriff ist ein topologischer Begriff.

4.15. *Voraussetzungen, wie eingangs des Paragraphen festgelegt.* $\|\cdot\|^*$ *sei eine weitere zu* $\|\cdot\|$ *äquivalente Norm auf* V. *Dann gilt:*

D *ist in* x *bzgl.* $\|\cdot\|$ *g- bzw. sg-differenzierbar* $\Longleftrightarrow$ D *ist in* x *bzgl.* $\|\cdot\|^*$ *g- bzw. sg-differenzierbar.*

Die Ableitungen hängen nicht von der Wahl der Norm ab.

Beweis: Wir beschränken uns auf den Fall "*sg*" und beweisen "$\Rightarrow$". Wir betrachten einen Vektor $v^* \in sC(X, x)$, $\|v^*\|^* = 1$ und dazu Folgen $(x_n), (y_n)$ gemäss 4.1 (2) bzgl. $\|\cdot\|^*$. Wir haben:

$$\frac{x_n - y_n}{\|x_n - y_n\|} = \frac{x_n - y_n}{\|x_n - y_n\|^*} \cdot \left\| \frac{x_n - y_n}{\|x_n - y_n\|^*} \right\|^{-1} \to \frac{v^*}{\|v^*\|} =: v,$$

$$\frac{D(x_n, y_n)}{\|x_n - y_n\|} = \frac{D(x_n, y_n)}{\|x_n - y_n\|^*} \cdot \left\| \frac{x_n - y_n}{\|x_n - y_n\|^*} \right\|^{-1} \to D'_*(x, v),$$

wobei D'_* die Ableitung bzgl. $\|\cdot\|^*$ bezeichnet.

Wir wollen unsere Überlegungen nun auf C^1-Räume übertragen. Von zentraler Bedeutung sind dabei die folgenden *Kettenregeln.*

4.16. *Sei* X^* *eine Teilmenge eines Banachraumes* V^* *mit der Norm* $\|\cdot\|^*$, *und sei* $f: X^* \to X$ *eine* C^1*-Abbildung. Ferner sei* $x^* \in X^*$ *und* $x := f(x^*)$. *Dann gilt:*

(1) *Ist* D *in* x *g- bzw. sg-beschränkt, so ist* $D \circ (f, f)$ *in* x^* *g- bzw. sg-beschränkt.*

(2) *Ist* D *in* x *g-beschränkt und g-differenzierbar (sg-beschränkt und sg-differenzierbar), so ist* $D \circ (f, f)$ *in* x^* *g-differenzierbar (sg-differenzierbar) und*

$$D \circ (f, f)' (x^*) = D' (x) \circ d_{x^*} f .$$

Beweis: (1) Zunächst sei D die durch $\|\cdot\|$ definierte Abstandsfunktion auf X. Wir dürfen annehmen, dass X, X^* offene Kugeln sind und dass für alle $y \in X^*$ und eine geeignete Konstante $C > 0$ gilt $\| d_y f \| \leq C$. Dann gilt für alle $y, y' \in X^*$:

$$\| f(y) - f(y') \| \leq C \| y - y' \|^* .$$

Im allgemeinen Fall – wir beschränken uns auf den Fall "*sg*" – dürfen wir davon ausgehen, dass Konstanten $C', C > 0$ existieren mit:

$$D(u, u') \leq C' \| u - u' \| \qquad \forall u, u' \in X ,$$

$$\| f(y) - f(y') \| \leq C \| y - y' \|^* \quad \forall y, y' \in X^* .$$

Dann gilt:

$$D(f(y), f(y')) \leq C' C \| y - y' \| \quad \forall y, y' \in X^* .$$

(2) Wir beschränken uns auf den Fall "*sg*" und nehmen an, dass eine Konstante $C > 0$ existiert mit $D(u, u') \leq C \| u - u' \| \; \forall u, u' \in X$. Ist dann $\mathfrak{v}^* \in sC(X^*, x^*)$, $\| \mathfrak{v}^* \|^* = 1$ und sind $(x_n), (y_n)$ Folgen gemäss 4.1 (2), so gilt

$$\frac{f(x_n) - f(y_n)}{\| x_n - y_n \|^*} \to d_{x^*} f(\mathfrak{v}^*) =: \mathfrak{v} .$$

Ist $\mathfrak{v} = 0$, so gilt:

$$\frac{D(f(x_n), f(y_n))}{\| x_n - y_n \|^*} \leq C \left\| \frac{f(x_n) - f(y_n)}{\| x_n - y_n \|^*} \right\| \to 0 ;$$

ist $\mathfrak{v} \neq 0$, so dürfen wir annehmen, dass $f(x_n) \neq f(y_n) \; \forall n \in N$ ist, und haben

$$\frac{D(f(x_n), f(y_n))}{\| x_n - y_n \|^*} = \frac{D(f(x_n), f(y_n))}{\| f(x_n) - f(y_n) \|} \cdot \left\| \frac{f(x_n) - f(y_n)}{\| x_n - x_n \|^*} \right\| \to D'(x, \mathfrak{v}) .$$

DEFINITION 4.17. *Voraussetzungen, wie eingangs des Paragraphen festgelegt.* D *heisst in* x *differenzierbar (s-differenzierbar), wenn* D *in* x *g-beschränkt und g-differenzierbar (sg-beschränkt und sg-differenzierbar) ist.*

Gemäss 4.16 sind die Begriffe der Differenzierbarkeit und der s-Differenzierbarkeit für C^1-Räume sinnvoll. *Ist* X *ein* C^1*-Raum,* D *eine Semimetrik auf* X *und* $x \in X$, *so ist im Falle der Differenzierbarkeit bzw. s-Differenzierbarkeit von* D *in* x *die Ableitung* $D'(x)$ *ein stetiger Semibetrag auf* $C(X)_x$ *bzw.* $sC(X)_x$. *Ist* D *auf* X *s-differenzierbar, so ist* D' *ein stetiger Semibetrag auf* $sC(X)$. 4.16 liefert eine Kettenregel für Semimetriken auf C^1-Räumen – auf eine Formulierung verzichten wir.

SATZ 4.18. *Sei D eine s-differenzierbare Semimetrik auf einem C^1-Raum X. Dann gilt für alle stückweise glatten Wege w in X:*

$$\int_w D = \int_w D' .$$

4.18 ist eine triviale Folgerung aus 4.14 und der Kettenregel.

DEFINITION 4.19. *Eine Semimetrik D auf einem C^1-Raum X heisst stark definit, wenn es zu jedem Punkt $x \in X$ eine Karte (U, u, M), $M \subset V$, und eine Zahl $C > 0$ gibt, so dass für alle $x', y' \in U$ gilt:*

$$D(x', y') \geq C \, \| u(x') - u(y') \|$$

($\|\cdot\|$ Norm des Banachraumes V).

Der Begriff der starken Definitheit hängt nicht von der Wahl der Karte *ab*; wir überlassen dem Leser den Beweis der folgenden Aussage.

4.20. *Sei X ein C^1-Raum, D eine stark definite Semimetrik auf X, $x \in X$ und (U, u, M) eine Karte zu x. Dann gibt es eine Umgebung U' von x in U, so dass $(U', u \mid U', u(U'))$ mit einer geeigneten Konstanten $C > 0$ der Bedingung 4.19 genügt.*

Ist D eine s-differenzierbare Semimetrik auf einem C^1-Raum X und ist D stark definit, so auch D'.

SATZ 4.21. *Sei X eine C^2-Banachmannigfaltigkeit und D eine Semimetrik auf X.*

Zu jedem Punkt x aus X gebe es eine Umgebung U, so dass D^2 eine C^2-Funktion auf $U \times U$ ist. Dann ist D eine s-differenzierbare Semimetrik. D' ist gleichmässig und wird von einem Semiskalarprodukt σ erzeugt.

Ist D ausserdem stark definit, so ist X eine Hilbertmannigfaltigkeit und σ eine Riemannsche Struktur auf dem Tangentialbündel.

Beweis: Wir dürfen annehmen, dass X eine Kugel in einem **R**-Banachraum V ist, und dass $E := D^2$ eine C^2-Funktion auf $X \times X$ ist. Mit ∂ bezeichnen wir die Ableitung nach der zweiten Koordinate. Gemäss der Taylorformel gilt für $x', y' \in X$:

$$E(x', y') = \partial E(x', x')(y' - x') + \int_0^1 \partial^2 E(x', x' + t(y' - x'))(1 - t) \, dt \, (y' - x', y' - x')$$

wobei $\partial^2 E : X \times X \to L^2(V, \mathbf{R})$ eine stetige Abbildung in den Raum $L^2(V, \mathbf{R})$ der stetigen Bilinearformen auf V ist.

Wir dürfen annehmen, dass eine Konstante $C > 0$ existiert mit $\| \delta^2 E(x', y') \| \leq C \quad \forall x', y' \in X$. Also ist

$$\left\| \int_0^1 \delta^2 E(x', x' + t(y' - x')(1-t)\, dt(y' - x', y' - x) \right\| \leq C \| y' - x' \|^2 \quad \forall x', y' \in X.$$

Wegen $E(x', y') \geq 0 \quad \forall x', y' \in X$ ist $\delta E(x', x') = 0 \quad \forall x' \in X$ und wir haben

$$D(x', y') \leq \sqrt{C} \| y' - x' \| \qquad \forall x', y' \in X.$$

Nun sei $x \in X$, $v \in V$, $\| v \| = 1$. Wir betrachten zu v Folgen (x_n), (y_n) gemäss 4.1 (2). Es folgt:

$$\frac{D(x_n, y_n)}{\| x_n - y_n \|} \to \sqrt{\frac{1}{2} \delta^2 E(x, x)(v, v)}.$$

Offenbar braucht man in 4.21 nur verlangen, dass $D^2(\cdot, \cdot)$ bzgl. der zweiten Koordinate 2-mal stetig differenzierbar ist.

Aus 4.21 und [9] folgt:

Satz 4.22. *Sei X ein Ramisscher Raum und D eine stark definite Semimetrik auf X. Ist D^2 im Sinne von 4.21 in den regulären Punkten lokal eine C^2-Funktion, so ist X ein Ramisscher Raum mit Karten in der Kategorie der C-Hilberträume.*

Ist D eine (s-) differenzierbare Semimetrik auf einem C^1-zusammenhängenden C^1-Raum, so stellt sich die Frage, ob $D = \inf \int D'$ ist. I.a. ist die Frage zu verneinen:

4.23. *Sei X ein C^1-zusammenhängender C^1-Raum und sei D eine in $x \in X$ differenzierbare (s-differenzierbare) Semimetrik auf X. Dann gilt für jede in 0 differenzierbare Funktion $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$, für die $f \circ D$ eine Semimetrik ist: $f \circ D$ ist in x differenzierbar (s-differenzierbar) mit $f'(0)\, D'(x)$ als Ableitung.*

Beweis: Es existiert eine in 0 stetige Funktion $r : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ mit $r(0) = 0$ und

$$f(t) = f'(0)\, t + r(t)\, t \qquad \forall t \in \mathbf{R}_+.$$

O.B.d.A. ist X Teilmenge eines Banachraumes. Dann gilt für alle $x', y' \in X$:

$$f \circ D(x', y') = f'(0)\, D(x', y') + r(D(x', y'))\, D(x', y').$$

Aus 4.23 folgt insbesondere, dass mit D auch stets $\dfrac{D}{1+D}$ differenzierbar (s-differenzierbar) ist und dass $D' = \left(\dfrac{D}{1+D} \right)'$ gilt.

Sei Γ die Carathéodorysche Semimetrik auf einem Serreschen Raum. In [10] wird gezeigt, dass $\Gamma' = \gamma$ ist. Damit gilt insbesondere $\int \Gamma = \int \gamma$ auf $\mathfrak{W}^1$. Es ist unbekannt, wann $\Gamma = \inf \int \gamma$ ist.

Ist β ein summierbarer Semibetrag auf dem Kegel $C(X)$ bzw $sC(X)$ eines C^1-zusammenhängenden C^1-Raumes X, so stellt sich die Frage, ob $\inf \int \beta$ differenzierbar (s-differenzierbar) ist mit β als Ableitung. I.a. muss diese Frage natürlich verneint werden.

Sei K die Kobayashi-Semimetrik auf einem zusammenhängenden Ramisschen Raum X (bzgl. Def. vgl. [5]). In [14] wird gezeigt, dass für endlichdimensionale Mannigfaltigkeiten $K = \inf \int \varkappa$ gilt. Es ist unbekannt, wann $K' = \varkappa$ gilt.

Die folgende Definition ist geometrisch plausibel:

Definition 4.24. *Ein summierbarer Semibetrag β auf dem Kegel $C(X)$ bzw. $sC(X)$ eines C^1-zusammenhängenden C^1-Raumes X heisst infinitesimal geodätisch (s-infinitesimal geodätisch) in einem Punkte $x \in X$, wenn $\inf \int \beta$ in x differenzierbar (s-differenzierbar) ist mit β als Ableitung.*

Satz 4.25. *Jede Finslernorm β auf dem Tangentialbündel einer zusammenhängenden C^1-Banachmannigfaltigkeit X ist s-infinitesimal geodätisch.*

Beweis: Sei $x \in X$. Wir betrachten eine Karte (U, u, M) zu x, derart dass M eine Kugel in einem Banachraum V mit dem Mittelpunkt $0 = u(x)$ ist und $(U, (\mathrm{id}, du), U \times V)$ der Bedingung 3.8 genügt. Wir identifizieren U mit M und nehmen an, dass $\|\cdot\| := \beta(0, \cdot)$ die Norm von V ist.

Wir setzen für $y \in M$, $v \in V$

$$\alpha(y, v) := \beta(y, v) - \|v\|,$$

geben uns ein $r > 0$ vor und zeigen, dass für alle Punkte x', y' einer geeigneten Umgebung von 0 gilt:

$$(1-r)\|x' - y'\| \leq \inf \int \beta(x', y') \leq (1+r)\|x' - y'\|.$$

Zur r existiert gemäss 3.8 eine Kugel K mit dem Radius $s > 0$ um 0, so dass gilt $\bar{K} \subset M$ und $|\alpha(y, v)| \leq r\|v\| \quad \forall y \in \bar{K}, v \in V$.

O.B.d.A. ist $r \leq 1/2$. Dann gilt für $y \in \bar{K}$, $v \in V$:

$$1/2\|v\| \leq \|v\| - r\|v\| \leq \beta(y, v) \leq \|v\| + r\|v\| \leq 3/2\|v\|.$$

Wir betrachten eine Kugel L um 0 mit einem Radius $s' \leq s/2$. Sind dann x', y' Punkte aus L, so gilt für jeden stückweise glatten Verbindungsweg w, der Punkte ausserhalb von K trifft:

$$\int_w \beta \geq 1/2(s - s') \geq s/4.$$

Andererseits gilt für die Verbindungsstrecke w^*:

$$\int_{w^*} \beta \leq 3/2 \, \| x' - y' \| < 3r' .$$

Wählen wir also $3r' = r/4$, so kann man sich bei der Berechnung von $\inf \int \beta (x', y')$ auf Wege in K beschränken. Für einen stückweise glatten Verbindungsweg w in K gilt aber:

$$(1 - r) \int_w \| \cdot \| \leq \int_w \beta \leq (1 + r) \int_w \| \cdot \| ,$$

woraus folgt:

$$\int_w \beta \geq (1 - r) \| x' - y' \| , \quad \inf \int \beta (x', y') \geq (1 - r) \| x' - y' \| ;$$

$$\int_w \beta \leq (1 + r) \| x' - y' \| , \quad \inf \int \beta (x', y') \leq (1 + r) \| x' - y' \| .$$

§ 5. Metrische Eigenschaften Serrescher Räume

Jeder Serresche Raum kann mit der Struktur eines Finslerschen Raumes versehen werden; denn es gilt:

Satz 5.1. *Jeder Serresche Raum ist metrisch einfach.*

Beweis: Sei X ein Serrescher Raum und $x \in$ X. O.B.d.A. ist X eine analytische Menge in einem Gebiet G eines Zahlenraumes $\mathbf{C}^n$ im klassischen Sinne. Wir dürfen annehmen, dass zu X eine Singularitätenauflösung $f : \mathrm{X}' \to \mathrm{X}$ existiert (vgl. [4]). Sei β eine stetige Norm auf dem Tangentialbündel von X′ und $| \cdot |$ eine Norm des $\mathbf{C}^n$. O.B.d.A. existiert eine Konstante $\mathrm{C} > 0$ mit

$$| d_y f (v) | \leq \mathrm{C} \beta (v) \qquad \forall v \in \mathrm{T} (\mathrm{X}')_y , \;\; y \in \mathrm{X}' .$$

Ist nun eine Zahl $r > 0$ vorgegeben, so betrachte man alle Punkte $y' \in \mathrm{X}'$, zu denen es einen Punkt $y \in f^{-1}(\{x\})$ in derselben Zusammenhangskomponente von X′ gibt mit $\inf \int \beta (y , y') < r$. Diese Punkte bilden eine offene Obermenge U von $f^{-1}(\{x\})$. Ist $x' \in f(\mathrm{U})$, so gibt es Punkte $y , y' \in \mathrm{X}'$ mit $f(y) = x, f(y') = x'$ und einen stückweise glatten Verbindungsweg w von y und y' mit $\int_w \beta < r \cdot f \circ w$ ist ein stückweise glatter Verbindungsweg von x und x' mit $\int_{f \circ w} | \cdot | < \mathrm{C} \cdot r$. Da x innerer Punkt von $f(\mathrm{U})$ ist, sind wir fertig.

Die Tangentialräume T (X) Serrescher Räume X sind abgeschlossen und linear; also fallen für Normen auf T (X) die Begriffe " stetig " und " Finslernorm " zusammen. Im folgenden Satz wird die Möglichkeit diskutiert, dass für einen zusammenhängenden Serreschen Raum X eine Finslernorm β auf T (X) s-infinitesimal geodätisch ist; d.h. dass $\left(\inf \int \beta\right)'$ existiert und mit der Beschränkung von β auf sC (X) übereinstimmt.

Satz 5.2. *Sei X ein zusammenhängender Serrescher Raum. Auf dem Tangentialraum* T (X) *gebe es eine s-infinitesimal geodätische Finslernorm, welche von einem Skalarprodukt herrührt. Dann ist* X *eine Mannigfaltigkeit.*

Wir dürfen annehmen, dass X eine analytische Menge in einer offenen Teilmenge G des $\mathbf{C}^n$ ist mit $0 \in X$. Wir zeigen: 0 ist regulärer Punkt.

Im folgenden bedeute $|\cdot|$ die euklidische Norm des Zahlenraumes. Für Einheitsvektoren $\mathfrak{v} \in \mathbf{C}^n$ und Zahlen $\alpha \in \mathbf{R}$, $0 < \alpha < 1$, $r \in \overline{\mathbf{R}_+^*}$ sei

$$K_\alpha^r(\mathfrak{v}) := \{u \in \mathbf{C}^n : |u| < r,\ \exists t \in \mathbf{R}_+^* \text{ mit } |u - t\mathfrak{v}| < \alpha t\}.$$

Die Norm gemäss 5.2 sei β. Wir dürfen annehmen, dass eine in 0 stetige Funktion f existiert mit $f(0) = 0$ und

$$|\mathfrak{v}|\,(1 - f(|x|)) \leq \beta(x, \mathfrak{v}) \leq |\mathfrak{v}|\,(1 + f(|x|)) \qquad \forall (x, \mathfrak{v}) \in T(X).$$

Wir gehen schrittweise vor.

1. Schritt: *Der Tangentenkegel* C (X)$_0$ *von* X *in* 0 *ist linear.*

Beweis des 1. Schrittes: Wir zeigen, dass mit zwei Einheitsvektoren $\mathfrak{v}^1, \mathfrak{v}^2$, $|\mathfrak{v}^1 - \mathfrak{v}^2| < 2$, auch stets die Verbindungsstrecke in T (X)$_0$ liegt. Wir gehen indirekt vor und nehmen an, dass ein Vektor $\mathfrak{v}$ auf der Verbindungsstrecke zweier Einheitsvektoren $\mathfrak{v}^1, \mathfrak{v}^2$, $|\mathfrak{v}^1 - \mathfrak{v}^2| < 2$, aus C (X)$_0$ nicht zu C (X)$_0$ gehört.

Sei $\mathfrak{v}^0 := \mathfrak{v}/|\mathfrak{v}|$. Aus $\mathfrak{v}^0 \notin C(X)_0$ folgt die Existenz einer Zahl α, $0 < \alpha < 1$, mit

$$K_\alpha^s(\mathfrak{v}^0) \cap X = \emptyset$$

Gemäss [16] existieren glatte Wege $\mathfrak{w}^1, \mathfrak{w}^2 : \leq 0, \delta \geq \to X$ mit den Eigenschaften:

$$\mathfrak{w}^1(0) = \mathfrak{w}^2(0) = 0\,;$$

$$(\mathfrak{w}^1)'(0) = \mathfrak{v}^1 \quad , \quad (\mathfrak{w}^2)'(0) = \mathfrak{v}^2\,.$$

Indem man eventuell $|\mathfrak{w}^1|$, $|\mathfrak{w}^2|$ als neue Parameter einführt, darf man davon ausgehen, dass für alle $t \in\ \leq 0, \delta \geq$ gilt:

$$|\mathfrak{w}^1(t)| = |\mathfrak{w}^2(t)| = t\,.$$

Geben wir uns eine Zahl $\gamma, 0<\gamma<1$, vor, so können wir durch Verkleinern von δ erreichen, dass für alle $t \in \langle 0, \delta \rangle$ gilt:

$$\mathfrak{w}^1(t) \in K_\gamma^m(\mathfrak{v}^1) \quad , \quad \mathfrak{w}^2(t) \in K_\gamma^m(\mathfrak{v}^2) .$$

Wir wählen nun α und dazu Zahlen $\gamma, 0<\gamma<1$, so, dass gilt:

$$K_\gamma^m(\mathfrak{v}^1) \cap K_\alpha^m(\mathfrak{v}^a) = K_\gamma^m(\mathfrak{v}^2) \cap K_\alpha^m(\mathfrak{v}^a) = \emptyset .$$

Es ist nützlich, folgende Grössen zu betrachten: für $x, y \in \mathbf{C}^m$, $x, y \notin K_\alpha^m(\mathfrak{v}^a)$ sei $B_\rho(x, y)$ das Infimum aller Längen $\int_{\mathfrak{w}} |\cdot|(1-\rho)$, wobei $\mathfrak{w}$ ein stückweise glatter Weg ist, der x und y ausserhalb $K_\alpha^m(\mathfrak{v}^a)$ verbindet, und $\rho \in \langle 0, 1 \rangle$; für γ (wie oben) und $t \in \mathbf{R}_+^*$ sei

$$C_\rho(\gamma, t) := \frac{\inf\{B_\rho(x, y) : x \in K_\gamma^m(\mathfrak{v}^1), y \in K_\gamma^m(\mathfrak{v}^2), |x| = |y| = t\}}{\sup\{|x-y| : x \in K_\gamma^m(\mathfrak{v}^1), y \in K_\gamma^m(\mathfrak{v}^2), |x| = |y| = t\}} .$$

Wir haben für $t \in \langle 0, \delta \rangle$ (δ klein) und $\rho \in \langle 0, 1 \rangle$:

$$\frac{\inf \int \beta(\mathfrak{w}^1(t), \mathfrak{w}^2(t))}{|\mathfrak{w}^1(t) - \mathfrak{w}^2(t)|} \geq C_\rho(\gamma, t) .$$

Nun hängt $C_\rho(\gamma, t)$ offenbar nicht von t ab, also $C_\rho(\gamma, t) = C_\rho(\gamma, 1)$; ausserdem ist $\lim_{\gamma \to 0} C_\rho(\gamma, 1) = B_\rho(\mathfrak{v}^1, \mathfrak{v}^2)\,|\mathfrak{v}^1 - \mathfrak{v}^2|^{-1}$. Aus der Formel $\left(\inf \int \beta\right)'(0) = |\cdot| \,|\, sC(X)_a$ und der angegebenen Ungleichung folgt:

$$1 \geq \frac{B_\rho(\mathfrak{v}^1, \mathfrak{v}^2)}{|\mathfrak{v}^1 - \mathfrak{v}^2|} ,$$

also $B_0(\mathfrak{v}^1, \mathfrak{v}^2) \leq |\mathfrak{v}^1 - \mathfrak{v}^2|$. Das ist unmöglich.

Gemäss [16] ist $C(X)_a$ ein m'-dimensionaler Raum, $m' = \dim_a X$. Wir denken uns G in der Form $G = G' \times G''$ vorgegeben, wobei G', G'' Kugeln in $\mathbf{C}^{m'}$ bzw. $\mathbf{C}^{m''}$ sind, und nehmen an, dass $C(X)_a = \mathbf{C}^{m'} \times \{0\}$ ist.

Da $\{0\} \times \mathbf{C}^{m''}$ $C(X)_a$ einpunktig schneidet, existiert eine analytische Menge $Y \subset G'$, $\dim Y < m'$, derart dass $X \cap (G' - Y) \times G''$ eine unverzweigte s-blättrige Überlagerung von $G' - Y$ ist.

2. Schritt: *Die Blätterzahl s ist gleich 1.*

Beweis des 2. Schrittes: Wir gehen indirekt vor und nehmen an, dass $s \geq 2$ ist. Es ist $\dim C(Y)_a \leq m' - 1$. Also existiert ein Einheitsvektor e in $\mathbf{C}^{m'}$ mit $\mathbf{C} \cdot e \cap C(Y)_a = \{0\}$. Wir wählen eine Zahl $\alpha, 0 < \alpha < 1$, und r so, dass $K_\alpha^r(e) \cap Y = \emptyset$ ist. Dann zerfällt X über $K_\alpha^r(e)$ in s Blätter, die zu $K_\alpha^r(e)$

biholomorph äquivalent sind. Seien B_1, B_2 zwei dieser Blätter. In B_1, B_2 gibt es Wege $w^1, w^2 : < 0, \delta > \to X$, deren erste m' Komponentenfunktionen die Abbildung $t \mapsto t \cdot v$ liefern. Für $t \in < 0, \delta >$ gilt offenbar (δ klein)

$$\inf \int \beta (w^1(t), w^2(t)) \geq \alpha/2t .$$

Bezeichnen wir mit z^1, z^2 die von den m'' letzten Komponentenfunktionen gelieferten Abbildungen, so ist wegen $C(X)_v = \mathbf{C}^{m'} \times \{0\}$:

$$\lim_{t \to 0} \frac{z^1(t)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{z^2(t)}{t} = 0 .$$

Mit

$$\frac{\inf \int \beta (w^1(t), w^2(t))}{|w^1(t) - w^2(t)|} \geq \frac{\frac{1}{2} \alpha t}{|z^1(t)| + |z^2(t)|}$$

für $t \in < 0, \delta >$ erhalten wir einen Widerspruch.

Die noch ausstehenden Überlegungen sind vom selben Typ wie Schritt 2.

Die infinitesimale Geodäsie ist eine wesentlich schwächere Eigenschaft als die s-infinitesimale Geodäsie. Im folgenden Satz werden Methoden und Begriffe aus [13] benutzt.

Satz 5.3. *Sei X ein zusammenhängender reindimensionaler Serrescher Raum, und sei β eine Finslernorm auf $T(X)$. Dann ist β in jedem tangentiell reduzierten Punkt $x \in X$, in dem $C(X)_x$ eine isolierte Singularität besitzt, infinitesimal reduziente.*

Wir dürfen annehmen, dass X eine analytische Menge in einer offenen Teilmenge G des $\mathbf{C}^m$ und $x = 0$ ist, und legen auf $\mathbf{C}^m$ die Norm $\|\cdot\| := \beta(0, \cdot)$ zugrunde. Dabei sei m die Einbettungsdimension von X.

Ist dann $v \in C(X, 0)$, $\|v\| = 1$ und (x_n) eine Folge gemäss 4.1 (1), so folgt sofort

$$\liminf \frac{\inf \int \beta (x_n, 0)}{\|x_n\|} \geq 1 .$$

Andererseits folgert man mit Hilfe einer Richtungsuniformisierung von X (vgl. [13]), bezogen auf den regulären Vektor v, sofort auch

$$\limsup \frac{\inf \int \beta (x_n, 0)}{\|x_n\|} \leq 1 .$$

Jede Hyperfläche, definiert durch eine Potenzreihe f mit irreduziblem Leitterm $f^{(s)}$, erfüllt 5.3, sofern $f^{(s)}$ eine isolierte Singularität hat.

Literatur

[1] Douady A. (1966) – *Le problème des modules pour les sous-espaces analytiques compactes d'un espace analytique donné.* « Ann. Inst. Fourier », *16*, 1–98.

[2] Douady A. – *A remark on Banach-analytic spaces.* Stanford University.

[3] Grauert H. und Reckziegel H. (1965) – *Hermitesche Metriken und normale Familien holomorpher Abbildungen.* « Math. Z. », *89*, 108–125.

[4] Hironaka H. (1964) – *Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero.* « Ann. of Math. », *79*, 109–326.

[5] Kobayashi Sh. (1970) – *Hyperbolic manifolds and holomorphic mappings.* Marcel Dekker, New York.

[6] Lang S. (1972) – *Differential manifolds.* Addison-Wesley Publ. Comp.

[7] Palais R. S. (1966) – *Homotopy theory of infinite dimensional manifolds.* « Topology », *5*, 1–16.

[8] Palais R. S. (1966) – *Lusternik-Schnirelman theory on Banach manifolds.* « Topology », *5*, 115–132.

[9] Ramis J.-P. (1970) – *Sous-ensembles analytiques d'une variété banachique complexe.* Springer-Verlag.

[10] Reiffen H.-J. (1965) – *Die Carathéodorysche Distanz und ihre zugehörige Differentialmetrik.* « Math. Ann. », *16*, 315–324.

[11] Reiffen H.-J. (1968) – *Analytische Kegelmengen.* « Math. Z. », *104*, 50–58.

[12] Reiffen H.-J. und Trapp H. W. (1972–1973) – *Einführung in die Analysis I, II, III.* B. I. Hochschultaschenbücher 776, 786, 787; Bibliographisches Institut; Mannheim/Wien/Zürich.

[13] Reiffen H.-J. (1975) – *Richtungsuniformisierung bei analytischen Mengen.* « manuscripta math. », *17*, 15–20.

[14] Royden H. L. (1971) – *Remarks on the Kobayashi metric.* « Lectures Notes in Math. », *185*; Springer-Verlag.

[15] Spallek (1969) – *Differenzierbare Räume.* « Math. Ann. », *180*, 269–296.

[16] Whitney H. (1972) – *Complex analytic varieties.* Addison-Wesley Publ. Comp.