LUCIANO MISICI

Su di un problema di superficie libera nella convezione naturale (*) (**)

SUMMARY. — The free surface problem of a liquid filling a cavity and subject to a natural convection process is dealt with. The domain perturbation technique is applied and the analytic solution is evaluated by means of Papkovich-Fadle series. Numerical results are given to show the convergence carachteristics of the series.

POSIZIONE DEL PROBLEMA

Si consideri una cavità rettangolare di lunghezza infinita, con due pareti verticali, a distanza 2 d, in cui è contenuto un liquido omogeneo viscoso.

Sia (x, y) un sistema di assi cartesiani con x perpendicolare alle superfici verticali e coincidente con il pelo libero quando il liquido è in quiete. L'asse y sia lungo la mezzeria della cavità, positivo verso il basso. Lungo il pelo libero il fluido è a contatto con un altro fluido di viscosità trascurabile. Se $\mathrm{T}(x, y)$ è la temperatura di un punto generico e T_0 rappresenta una temperatura di riferimento, sia $\theta(x, y) = (\mathrm{T}(x, y) - \mathrm{T}_0)/\mathrm{T}_0$.

Si vuole studiare il problema della convenzione naturale nella cavità, corrispondente ad una data distribuzione di θ sul fondo $(y = -\mathrm{D})$ del tipo $\theta(x, -\mathrm{D}) = \varepsilon f(x/\mathrm{d})$ essendo ε una costante.

Il pelo libero di normale n e di equazione $y = \varphi(x)$, sia adiabatico, mentre sulle pareti verticali debbono essere soddisfatte condizioni di tipo adiabatico.

Indichiamo con $\boldsymbol{u}$ il vettore velocità, di componenti u e v, g l'accelerazione di gravità, ρ e μ la densità e la viscosità del fluido, k la sua conducività termica, σ la tensione superficiale, γ l'inverso della resistenza termica superficiale per unità di area, β il coefficiente di espansione termica; $\boldsymbol{e}_y$, ∇, ∇^2 il versore nell'asse y, il gradiente e il laplaciano rispettivamente; si ponga $\Phi(x, y) = p(x, y) - p_e - \rho g y$, dove p è la pressione nel fluido e p_e la pressione esterna. Il deviatore del tensore degli sforzi $\mathbf{S}$, per un liquido newtoniano è espresso in funzione del tensore delle deformazioni dalla relazione $\mathbf{S} = 2\mu\mathbf{D}[\boldsymbol{u}]$ con $\mathrm{D}_{ij}[\boldsymbol{u}] = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i)$.

(*) Memoria presentata dall'Accademico dei XL GUGLIELMO RIGHINI l'11-10-1977.

(**) Ricerca svolta nell'ambito del G.N.A.F.A., Consiglio Nazionale delle Ricerche. Istituto di Matematica, Università di Camerino.

Il sistema di equazioni da risolvere è quindi [1]:

$$\rho \boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{u} = - \nabla \Phi + \boldsymbol{e}_y \rho g \beta \theta + \mu \nabla^2 \boldsymbol{u} \tag{1}$$

$$\boldsymbol{u} \cdot \nabla \theta = k \nabla^2 \theta \tag{2}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0 \tag{3}$$

con le condizioni:

$$\pm \frac{\partial \theta}{\partial x} + \gamma \theta = 0 \qquad \text{per} \quad x = \pm \mathrm{d} \tag{4}$$

$$\theta (x , - \mathrm{D}) = \varepsilon f (x/\mathrm{d}) \tag{5}$$

$$\left[\frac{\partial \theta}{\partial y} - \varphi' \frac{\partial \theta}{\partial x} \right]_{y = \varphi(x)} = 0 \tag{6}$$

$$\boldsymbol{u} (\pm \mathrm{d} , y) = \boldsymbol{u} (x , - \mathrm{D}) = 0 \tag{7}$$

$$[v - \varphi' u]_{y = \varphi(x)} = 0 \tag{8}$$

$$[(\mathrm{S}_{yy} - \mathrm{S}_{xx}) \varphi' + (1 - (\varphi')^2) \mathrm{S}_{yx}]_{y = \varphi(x)} = 0 \tag{9}$$

$$[\mathrm{S}_{yy} - \varphi' \mathrm{S}_{xy} - \Phi]_{y = \varphi(x)} = [\sigma (\varphi' / (1 + (\varphi')^2)^{1/2})' - \rho g \varphi]_{y = \varphi(x)} \tag{10}$$

$$\frac{1}{2\,\mathrm{d}} \int_{-\mathrm{d}}^{\mathrm{d}} \varphi (x) \, \mathrm{d}x = 0 \tag{11}$$

$$\varphi' (\pm \mathrm{d}) = 0 \, . \tag{12}$$

1. Perturbazione lagrangiana di dominio

Lo studio del problema (1), ⋯, (12) può condursi mediante la cosiddetta perturbazione lagrangiana di dominio, una tecnica proposta da Joseph già nel 1967 [2]. Tale tecnica fu successivamente consolidata da Sattinger [3] con la dimostrazione della convergenza dello sviluppo in serie, che è alla base del metodo, almeno in alcuni casi notevoli, quale ad esempio il caso che si sta trattando. Nel procedimento si suppone che la soluzione sia nota in un dominio di riferimento D_0 e che essa, nel dominio effettivo D_ε, possa svilupparsi in serie di potenze di un parametro ε, essendo i coefficienti della serie le derivate sostanziali delle variabili valutate in D_0. Il dominio perturbato va quindi inizialmente trasformato in un dominio di riferimento mediante un'applicazione analitica in ε ed univocamente invertibile. Dopo lo sviluppo della soluzione in serie di potenze si determinano i coefficienti in termini della soluzione nota in D_0 ed infine si rappresenta la soluzione in D_ε. Nel problema in esame si prenderà come dominio di riferimento D_0, quello corrispondente al fluido in quiete e la trasformazione che porta da $\mathrm{D}_\varepsilon = \{(x , y) / - \mathrm{d} \leq x \leq \mathrm{d} \, ; \, - \mathrm{D} \leq y \leq \varphi (x)\}$

a $D_\varepsilon = \{(x_0, y_0) / -d \leq x_0 \leq d\ ;\ -D \leq y_0 \leq 0\}$ sia $y = \chi(x_0, y_0, \varepsilon) = \varphi + (D + \varphi)\, y_0/D$; per la soluzione analitica in ε si ponga:

$$(1.1) \qquad \begin{bmatrix} u(x, y, \varepsilon) \\ \theta(x, y, \varepsilon) \\ \Phi(x, y, \varepsilon) \\ \varphi(x, \varepsilon) \end{bmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \begin{bmatrix} u^{[n]}(x_0, y_0) \\ \theta^{[n]}(x_0, y_0) \\ \Phi^{[n]}(x_0, y_0) \\ \varphi^{[n]}(x_0) \end{bmatrix} \cdot \varepsilon^n$$

dove $(\cdot)^{[n]}(x_0, y_0) = d^n(\cdot)/d\varepsilon^n{}_{\varepsilon=0}$ è la derivata totale n-esima in D_0. Per le funzioni trasformate le derivate parziali rispetto ad ε sono date da $(\cdot)^{(n)}(x_0, y_0) = \partial^n(\cdot)/\partial\varepsilon^n|_{\varepsilon=0}$. Tra le derivate totali e quelle parziali di una funzione $F(x, y, \varepsilon)$ trasformata nella $F(x_0, \chi(x_0, y_0, \varepsilon), \varepsilon)$ valgono le relazioni:

$$(1.2) \qquad \begin{aligned} F^{[0]} &= F^{(0)} \\ F^{[1]} &= F^{(1)} + \chi^{[1]} F_y^{(0)} \\ F^{[2]} &= F^{(2)} + 2\chi^{[1]} \cdot F_y^{(1)} + \chi^{[2]} F_y^{(0)} + \chi^{[1]} F_{yy}^{(0)} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

e quindi per l'indipendenza di x_0 ed y_0 da ε ed essendo $\chi = \chi(x_0, y_0, \varepsilon)$ si avrà $\chi^{[n]} = \chi^{(n)}$ e $\varphi^{[n]} = \varphi^{(n)}$.

Nel problema considerato è immediato rendersi conto che, per $n = 0$, si ha la soluzione $(u^{(0)}, \Phi^{(0)}, \theta^{(0)}, \varphi^{(0)}) = 0$ mentre per $n = 1$ si ha che la prima approssimazione per il sistema (1), $\cdots$, (12) può scriversi nella forma:

$$(1.3) \qquad -\nabla\Phi^{(1)} + e_{y_0}\, \rho g \beta \theta^{(1)} + \mu \nabla^2 u^{(1)} = 0$$

$$(1.4) \qquad \nabla^2 \theta^{(1)} = 0$$

$$(1.5) \qquad \nabla \cdot u^{(1)} = 0$$

$$(1.6) \qquad \pm \frac{\partial\theta^{(1)}}{\partial x_0} + \gamma\, \theta^{(1)} = 0 \quad \text{per} \quad x = \pm d$$

$$(1.7) \qquad \theta^{(1)}(x_0, -D) = f(x_0/d)$$

$$(1.8) \qquad u^{(1)}(\pm d, y_0) = u^{(1)}(x_0, -D) = 0$$

mentre sulla curva di pelo libero le condizioni si semplificano notevolmente trasformandosi in:

$$(1.9) \qquad v^{(1)} = 0$$

$$(1.10) \qquad S_{x_0 y_0} = 0$$

$$(1.11) \qquad 2\mu \frac{\partial v^{(1)}}{\partial y_0} - \Phi^{(1)} = \sigma \frac{d^2 \varphi^{(1)}}{dx_0^2} - \rho g \varphi^{(1)}$$

$$(1.12) \qquad \frac{\partial \theta^{(1)}}{\partial y_0} = 0$$

da risolversi in D_0. Successivamente alla soluzione di (1.3), $\cdots$, (1.12) la trasformazione già indicata permetterà di rappresentare la soluzione stessa in D_ε.

2. La soluzione per il campo fluido

In ciò che segue si ometteranno per chiarezza gli apici indicanti la derivazione rispetto ad z nel sistema (1.3) ,$\cdots$, (1.12) e si opererà una adimensionalizzazione delle variabili indipendenti ponendo $\xi = x_0/\mathrm{d}$, $\eta = y_0/\mathrm{d}$ con $\bar{\mathrm{D}} = \mathrm{D}/\mathrm{d}$.

Per semplicità si supporrà inoltre che la distribuzione nota della temperatura sul fondo della cavità sia una funzione pari $g(\xi)$. Quanto verrà detto in tal caso potrebbe infatti essere facilmente generalizzato. La determinazione di θ che soddisfa il problema differenziale:

$$\nabla^2 \theta = 0 \tag{2.1}$$

$$\pm \frac{\partial\theta}{\partial\xi} + \gamma\theta = 0 \qquad \text{per} \quad \xi = \pm 1 \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial\eta}(\xi\,,0) = 0 \tag{2.3}$$

$$\theta(\xi\,,-\bar{\mathrm{D}}) = g(\xi) \tag{2.4}$$

è agevolmente ottenuta [4] e si ha:

$$\theta(\xi\,,\eta) = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\gamma^2+\alpha_k^2)\cos\alpha_k\xi\cos h\alpha_k\eta}{[\gamma+\gamma^2+\alpha_k^2]\cos h\alpha_k} \cdot \int_0^1 g(\xi)\cos\alpha_k\xi\, d\xi \tag{2.5}$$

con α_k radice k-esima dell'equazione trascendente $\alpha \operatorname{tg} \alpha = \gamma$.

Quando si introduce la funzione di corrente $u = \psi_{y_0}$; $v = -\psi_{x_0}$ e la si adimensionalizza ponendo $\Psi(\xi\,,\eta) = \mu\psi(x_0\,,y_0)/\rho g\beta\,\mathrm{d}^3$ il problema costituito da (1.4)-(1.6) con θ dato dalla (2.5) corrisponde alla soluzione della

$$\nabla^4 \Psi = \theta_\xi \tag{2.6}$$

con le condizioni

$$\Psi(\pm 1\,,\eta) = \Psi_\xi(\pm 1\,,\eta) = 0 \tag{2.7}$$

$$\Psi(\xi\,,0) = \Psi_{\eta\eta}(\xi\,,0) = \Psi(\xi\,,-\bar{\mathrm{D}}) = \Psi_\eta(\xi\,,-\bar{\mathrm{D}}) = 0\,. \tag{2.8}$$

Una soluzione particolare della (4.1) che viene indicata con Ψ^* si scrive nella forma

$$\Psi^*(\xi,\eta) = \frac{1}{8}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathrm{B}_k}{\alpha_k b_k} \cdot \{b_k(\xi^2-1)\operatorname{sen}\alpha_k\xi - \gamma^2\alpha_k\cos\alpha_k\xi + \gamma\alpha_k^2\sin\alpha_k\xi\}\cos h\alpha_k\eta \tag{2.9}$$

con

$$\mathrm{B}_k = \frac{2(\gamma^2+\alpha_k^2)}{(\gamma+\gamma^2+\alpha_k^2)\cos h\alpha_k\bar{\mathrm{D}}} \int_0^1 g(\xi)\cos\alpha_k\xi\, d\xi$$

$$b_k = \tfrac{1}{2}(\alpha_k^2\gamma - \alpha_k^2\gamma^2 - \alpha_k^4)\,.$$

Se si pone quindi $\Psi(\xi,\eta) = G(\xi,\eta) + \Psi^*(\xi,\eta)$ si dovrà risolvere il seguente problema in G:

$$\nabla^4 G(\xi,\eta) = 0 \tag{2.10}$$

$$G(\pm 1,\eta) = G_\xi(\pm 1,\eta) = 0 \tag{2.11}$$

$$G(\xi,0) = -\frac{1}{8}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_k}{b_k\,\alpha_k}\,q(\xi) \tag{2.12}$$

$$G_{\eta\eta}(\xi,0) = -\frac{1}{8}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_k\,\alpha_k}{b_k}\,q(\xi) \tag{2.13}$$

$$G(\xi,-\bar{D}) = -\frac{1}{8}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_k\cos h\alpha_k\bar{D}}{\alpha_k\,b_k}\,q(\xi) \tag{2.14}$$

$$G_\eta(\xi,-\bar{D}) = \frac{1}{8}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_k\,\mathrm{sen}\,h\,\alpha_k\bar{D}}{b_k}\,q(\xi) \tag{2.15}$$

con $q(\xi) = b_k(\xi^2 - 1)\,\mathrm{sen}\,\alpha_k\xi - \alpha_k\gamma^2\xi\cos\alpha_k\xi + \gamma\alpha_k^2\,\mathrm{sen}\,\alpha_k\xi$.

Per la biarmonica (2.10) si può dare una soluzione per mezzo di una serje di Papkovich-Fadle del tipo:

$$G(\xi,\eta) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{+\infty}(C_n e^{s_n\eta} + D_n e^{-s_n\eta})\cdot\Phi_1^{(n)}(\xi)/s_n^2 \tag{2.16}$$

con s_n radici complesse della sen $2s = 2s$, prese nel primo e nel quarto quadrante e tali che $s_{-n} = \bar{s}_n$ mentre è

$$\Phi_1^{(n)} = s_n\cos(s_n)\,\mathrm{sen}(s_n\xi) - s_n\,\mathrm{sen}(s_n)\cos(s_n\xi)\,. \tag{2.17}$$

Il problema si sposta ora alla determinazione dei coefficienti C_n e D_n che compaiono nella (2.17). Se si segue un procedimento, applicato da Smith [5] alla soluzione di un problema di elasticità, si trova che:

$$C_n + D_n = \frac{1}{K_n}\int_{-1}^{1}[f_1^{(n)}, f_2^{(n)}]\cdot\begin{vmatrix}0 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}G_{\eta\eta}(\xi,0)\\ G_{\xi\xi}(\xi,0)\end{vmatrix}\,d\xi \tag{2.18}$$

$$K_n(C_n e^{-s_n\bar{D}} + D_n e^{s_n\bar{D}}) + \sum_{\substack{l=-\infty \\ l\neq n}}^{+\infty}A_{ln}\left(c_l e^{-s_l\bar{D}} - \frac{1+s_l}{1-s_l}D_l e^{s_l\bar{D}}\right) = \tag{2.19}$$

$$= \int_{-1}^{1}[f_1^{(n)}, f_2^{(n)}]\cdot\begin{vmatrix}0 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}G_\eta(\xi,-\bar{D})\\ G_{\xi\xi}(\xi,-\bar{D})\end{vmatrix}\,d\xi$$

dove $K_n = -4 \operatorname{sen}^4 (s_n)$ mentre

$$f_1^{(n)}(\xi) = (s_n \cos(s_n) + 2 \operatorname{sen}(s_n)) \cos(s_n \xi) - s_n \xi \cos(s_n) \operatorname{sen}(s_n \xi)$$

$$f_2^{(n)}(\xi) = \Phi_1^{(n)}(\xi)$$

$$A_{ln} = \frac{1 - s_l}{s_l} \cdot \int_{-1}^{1} \Phi_1^{(l)}(\xi) \cdot f_2^{(n)}(\xi)\, d\xi .$$

Le (2.18), (2.19), quando si sostituiscano le espressioni di $G_{\xi\xi}(\xi, 0)$, $G_{\xi\xi}(\xi, 0)$, $G_\xi(\xi, -\bar{D})$, $G_{\xi\xi}(\xi, -\bar{D})$ ottenute da (2.12), (2.15), formano un sistema non omogeneo di equazioni lineari, il cui numero di equazioni è uguale al numero dell'incognite, che ci permette di ricavare C_n e D_n.

3. Calcolo della frontiera libera

L'equazione che descrive la frontiera libera (1.11) verrà risolta una volta che siano resi adimensionali la funzione Φ con la posizione $P(\xi, \eta) = \Phi(x_0, y_0)/\rho g \beta d$ e la funzione φ, ponendo $h(\xi) = \sigma\varphi(x_0)/\rho g \beta d^3$. La (1.11) potrà infatti scriversi nella forma

$$\frac{d^2 h(\xi)}{d\xi^2} - a^2 h(\xi) = -P(\xi, 0) - 2 \frac{\partial^2 \Psi(\xi, 0)}{\partial\xi \partial\eta} . \tag{3.1}$$

In (3.1) l'espressione di $P(\xi, 0)$ si ricava immediatamente quando si ricordi che la (1.3) proiettata sull'asse η può scriversi

$$P_\eta(\xi, \eta) = \theta(\xi, \eta) - \nabla^2 \Psi_\xi(\xi, \eta) \tag{3.2}$$

e tale equazione può facilmente integrarsi tenendo conto delle (2.9), (2.16). Dalle (3.1) e (3.2) ricordando che $\int_{-1}^{1} h(\xi)\, d\xi = 0$ e $\frac{d}{d\xi} h(\pm 1) = 0$, si ottiene la soluzione analitica, che esprime la curva di pelo libero in prima approssimazione:

$$h(\xi) = \left\{ \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} (b_1 \cos(s_n \xi) + b_2 \xi \operatorname{sen}(s_n \xi)) \right\} + 2 b_3 \cos h(s_n \xi) + b_4 \tag{3.3}$$

dove
$$b_1 = \frac{-2(C_n - D_n)(2 \operatorname{sen}(s_n) - s_n \cos(s_n))}{a^2 + s_n^2} - \frac{2 s_n^2 (C_n - D_n) \operatorname{sen}(s_n)}{(a^2 + s_n^2)^2}$$

$$b_2 = -2(C_n - D_n) s_n \operatorname{sen}(s_n)/(a^2 + s_n^2)$$

$$b_3 = -\frac{1}{2a \operatorname{sen} h(a)} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} (b_2 - s_n b_1) \operatorname{sen}(s_n) + b_2 s_n \cos(s_n)$$

$$b_4 = -\frac{2 b_3 \operatorname{sen} h(a)}{a} - \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \left(\frac{b_1}{s_n} + \frac{b_2}{s_n^2} \right) \operatorname{sen}(s_n) - \frac{b_2}{s_n} \cos(s_n) .$$

Si vuole qui terminare mostrando alcune caratteristiche della serie di Papkovich-Fadle in una particolare applicazione, quando cioè si ponga $g(\xi) = 1$, corrispondente ad una parete di fondo della cavità a temperatura costante, con $D = 2$. Nelle tabelle che seguono sono riportati i valori di $G_{\xi\xi}(\xi, 0)$, $G_{\eta\eta}(\xi, 0)$ e di $G(\xi, -\bar{D})$, calcolati per alcuni ξ. Come può rilevarsi la convergenza della serie è molto rapida, il che rende il procedimento adottato per lo studio del problema particolarmente valido al fine della valutazione numerica dalla soluzione.

TABELLA 1. – *Convergenza della serie di Papkovich-Fadle in superficie.*

$$\begin{vmatrix} f \\ g \end{vmatrix} = -\frac{25}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_k \alpha_k}{b_k} \begin{vmatrix} q''(\xi)/\alpha_k^2 \\ q(\xi) \end{vmatrix} \simeq 100 \cdot \sum_{\substack{n=-N \\ n \neq 0}}^{N} (C_n + D_n) \begin{vmatrix} \Phi_1^{''(n)}(\xi)/\varepsilon_n^2 \\ \Phi_1^{(n)}(\xi) \end{vmatrix}$$

ξ	$f(\xi)$	N = 1	N = 4	N = 8	N = 12	N = 16	N = 20
0	0	0	0	0	0	0	0
0.2	—0.5577	—0.5777	—0.5530	—0.5566	—0.5590	—0.5568	—0.5581
0.4	—0.8658	—0.9237	—0.8756	—0.8622	—0.8636	—0.8661	—0.8666
0.6	—0.6888	—0.7025	—0.6728	—0.6815	—0.6883	—0.6906	—0.6893
0.8	0.1766	0.2876	0.1529	0.1870	0.1714	0.1789	0.1762
1.0	1.8796	1.5898	1.8582	1.8736	1.8782	1.8789	1.8792
ξ	$g(\xi)$	N = 1	N = 4	N = 8	N = 12	N = 16	N = 20
0	0	0	0	0	0	0	0
0.2	0.0243	—0.0448	0.0204	0.0228	0.0257	0.0234	0.0247
0.4	0.0382	0.0383	0.0461	0.0339	0.0362	0.0386	0.0390
0.6	0.0345	0.1625	0.0225	0.0264	0.0335	0.0362	0.0356
0.8	0.0152	0.1244	0.0311	0.0052	0.0209	0.0124	0.0160
1.0	0	0	0	0	0	0	0

TABELLA 2. – *Convergenza della serie di Papkovich-Fadle sul fondo.*

$$r(\xi) = -\frac{25}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_k \cos h\, \alpha_k \bar{D}}{\alpha_k b_k} \cdot q(\xi) \simeq 100 \cdot \sum_{\substack{n=-N \\ n \neq 0}}^{N} (C_n e^{-\varepsilon_n \bar{D}} + D_n e^{\varepsilon_n \bar{D}})\, \Phi_1^{(n)}(\xi)/\varepsilon_n^2$$

ξ	$r(\xi)$	N = 1	N = 2	N = 4	N = 6	N = 8
0	0	0	0	0	0	0
0.2	—0.1920	—0.2395	—0.1793	—0.1914	—0.1923	—0.1920
0.4	—0.2939	—0.3223	—0.3011	—0.2952	—0.2930	—0.2940
0.6	—0.2559	—0.2218	—0.2661	—0.2541	—0.2573	—0.2560
0.8	—0.1079	—0.0636	—0.0946	—0.1101	—0.1081	—0.1080
1.0	0	0	0	0	0	0

Bibliografia

[1] D. D. Joseph (1976) – *Stability of Fluid Motions*, II, Springer-Verlag, New York.

[2] D. D. Joseph (1973) – *Domain Perturbation. The Higher Order Theory of Infinitesimal Water Waves*, «Arch. Rat. Mech. Anal.», *51* (4), 295–303.

[3] D. H. Sattinger (1976) – *On the Free Surface of a Viscous Fluid Motion*, «Proc. R. Soc. Lond. A.», *349*, 183–204.

[4] H. S. Carslaw e J. C. Jaeger (1959) – *Conduction of Heat in Solids*, Oxford University Press.

[5] R. C. Smith (1952) – *The Bending of a Semi-Infinite Strip*, «Aust. J. Scie. Res.», *5*, 227–237.