GABRIELE KORCHMÁROS (*)

Sulle ovali di traslazione in un piano di Galois d'ordine pari (**)

Dedicata al Prof. Beniamino Segre

SUMMARY. — Let Ω be an oval [$(q+2)$-arc] in a Galois plane $S_{2,q}$, with q even, and suppose that $q+1, q-1 \neq p^r$ (p prime, $r > 1$). Taking any $(q+1)$-arc Ω_0 contained in Ω we prove that the Pascal lines to Ω_0 (cfr. F. Buekenhout [2], 7.1) form one (and no others) of the following sets:

i) the empty set (and Ω is a non traslation oval);
ii) one tangent (and Ω is a traslation oval);
iii) all the lines (and Ω_0 is a conic).

INTRODUZIONE

Scopo della presente Nota è di c a r a t t e r i z z a r e le ovali di traslazione di $S_{2,q}$, piano di Galois d'ordine p a r i, mediante considerazioni astratte di carattere gruppale, secondo quanto specificato da F. Buekenhout nella sua Memoria [2].

Al riguardo si dimostra qui in primo luogo che in $S_{2,q}$, con q pari, privando un'ovale – con B. Segre – di un suo punto O e dicendo tangenti le rette per O, condizione necessaria e sufficiente affinché una delle tangenti risulti – con F. Buekenhout – retta pascaliana rispetto al $(q+1)$-arco $\Omega_0 = \Omega - \{O\}$ è che, pensando questa tangente retta all'infinito, Ω sia un'ovale di traslazione; se fra le tangenti rimanenti si hanno ulteriori rette pascaliane, Ω_0 risulta costituita dai punti di una conica non singolare di $S_{2,q}$, il nucleo della quale viene a coincidere col punto O; se no allora, a norma di un recente risultato di S. E. Payne ([10]), ved. anche J. W. P. Hirschfeld [6]), Ω_0 appartiene alla classe di ovali data da B. Segre nella sua Nota [13].

Ammessa poi l'ipotesi $q+1 \neq p^r$ (risp. $q-1 \neq p^r$) in cui p^r denota una potenza ad esponente $r > 1$ di un numero primo dispari qualsiasi, si dimostra se una retta esterna (risp. una secante non uscente dal punto O) rispetto al $(q+1)$-arco Ω_0 risulta retta pascaliana relativamente al medesimo arco, allora questo è una conica non singolare di $S_{2,q}$ avente per nucleo il punto O.

Da quanto sopra discende che, nell'ipotesi in cui né $q+1$ né $q-1$ uguaglino una potenza p^r ($r > 1$) di un numero primo, per un'ovale Ω di $S_{2,q}$, con

(*) Budapest (Ungheria).
(**) Memoria presentata dall'Accademico dei XL BENIAMINO SEGRE il 5-11-1975.

q pari, l'insieme delle rette pascaliane rispetto al $(q+1)$-arco $\Omega_0 = \Omega - \{O\}$, dove O denota un qualsiasi punto giacente su Ω, può essere

i) vuoto,

ii) una sola tangente,

iii) tutte le rette del piano;

e queste classi di ovali riescono caratterizzate ordinatamente come le ovali non di traslazione, o quelle di traslazione date da B. Segre, od infine dalle coniche di $S_{2,q}$, a cui si aggreghi il nucleo.

Dedichiamo i primi due numeri ad alcuni richiami al riguardo, desunti essenzialmente dai risultati ottenuti da B. Segre, da F. Buekenhout e da J. Tits; per ulteriori informazioni sulla questione rimandiamo ai lavori [14], [16] e [2], [18], [19] rispettivamente.

1. Ricordiamo anzitutto che – con B. Segre – chiamasi *k-arco* un insieme di k punti a tre a tre non allineati di un piano $S_{2,q}$ di Galois; esso denominasi un'*ovale*, quando k sia tale che in $S_{2,q}$ non esista nessun $(k+1)$-arco.

Mentre nel caso d i s p a r i il problema delle ovali è pienamente risolto da un teorema ben noto di B. Segre [12], secondo cui ogni ovale risulta allora costituita dai punti di una conica non singolare di $S_{2,q}$ ed è quindi un $(q+1)$-arco, nel caso rimanente (q p a r i, ossia $q = 2^t$) si è tuttora ben lungi dal conoscere appieno la struttura generale delle ovali (cfr. B. Segre [15], ultimo capoverso a p. 786).

Si sa soltanto ch'esse allora risultano $(q+2)$-archi, esempi al riguardo essendo dati dagli insiemi di traslazione definiti coll'aggregare ai punti di una conica non singolare di $S_{2,q}$ il nucleo di questa. Mentre per $t = 1, 2$ non vi sono altre ovali all'infuori di quegli insiemi, nell'ipotesi che sia $t > 4$ e $t \neq 6$ altri esempi notevoli sono offerti dalle ovali di traslazione date da B. Segre, e più precisamente da quelle ottenibili in $S_{2,q}$ aggregando i punti all'infinito degli assi x, y a quelli del diagramma di traslazione

$$y = x^{2^g} \quad (\text{con } 2 \leq g \leq t-2, (g, t) = 1),$$

nessun $(q+1)$-arco delle quali risulta una conica.

2. Denoti d'ora in avanti $S_{2,q}$ un piano di Galois d'ordine q pari – ossia $q = 2^t$ – e supponiamo assegnata in esso un'ovale Ω. È ben noto che le rette di $S_{2,q}$ si distribuiscono in due diverse categorie, da dirsi rispettivamente *esterne* o *secanti*, secondoché esse hanno 0 o 2 punti a comune con Ω.

Privando Ω di un suo punto O, quelli rimanenti costituiscono ovviamente un $(q+1)$-arco che verrà denotato con Ω_0. Seguendo le convenzioni introdotte da J. Tits [18] e F. Buekenhout [2], le secanti per il punto O converremo di chiamarle *tangenti*. Essendo Ω un $(q+2)$-arco, per ogni punto appartenente ad Ω_0 passa una e una sola tangente, e tali rette esauriscono gli elementi del fascio di rette che ha centro in O.

Ad un punto $P \in \Omega$ del piano riesce opportuno associare una permutazione **P** involutoria, detta *involuzione* (su Ω_0) *di centro* P, in maniera che due punti di Ω_0 risultino una coppia in essa qualora essi giacciano sopra una retta uscente da P. Queste permutazioni costituiscono, quindi, un insieme di sostituzioni su Ω_0 operante in modo strettamente 2-transitivo e generante, come si stabilisce agevolmente, un gruppo (almeno) 3-transitivo sopra Ω_0.

J. Tits il quale insieme con F. Buekenhout e riattaccandosi a B. Segre è stato fra i primi ad interessarsi della struttura generale di tali sostituzioni, ha dimostrato al riguardo che Ω_0 è una conica non singolare di $S_{2,q}$ (e allora col col nucleo O) se, e soltanto se, il gruppo generato dalle involuzioni su Ω_0 porge una rappresentazione strettamente 3-transitiva di $PSL\,(2\,,2^t)$ (cfr. [2], Prop. 2.4). Va ricordato che in tal caso, affinché il prodotto **SRP** [1] di tre involuzioni **P** , **R** , **S** risulti involutorio, occorre e basta che i centri P , R , S giacciano su di una retta di $S_{2,q}$ ([2], Prop. 7.3, 7.4).

A tale proposito, F. Buekenhout ha esaminato il significato geometrico di quest'ultimo attributo, assegnandogli un'interpretazione di carattere costruttivo ([2], Prop. 7.2): Per ogni tre punti P , R , S situati su di una retta l (e fuori di Ω) il prodotto **SRP** risulta involutorio se, e soltanto se, l è pascaliana; il che val quanto dire che ogni esagono iscritto in Ω_0 con due punti diagonali sopra l è pascaliano, ossia il terzo punto diagonale giace esso pure su l. Egli ha inoltre così in particolare dimostrato che, se tutti gli esagoni iscritti nel $(q+1)$-arco Ω_0 sono pascaliani, allora Ω_0 è una conica non singolare di $S_{2,q}$, e viceversa [2].

Supponiamo sino alla fine del presente numero *che in* $S_{2,q}$ *vi siano delle rette pascaliane rispetto ad* Ω_0; denotandone una con l, ci riferiamo al gruppo G^* generato dalle involuzioni su Ω_0 col centro sopra $l - \Omega$, il quale, per definizione, rappresenta un gruppo di permutazioni operante sullo stesso $(q+1)$-arco.

Ricordiamo anzitutto (ved. per esempio [3], Teor. 1.1) che i generatori assegnati, cioè le involuzioni col centro sopra $l - \Omega$, costituiscono un insieme di sostituzioni dotato di due sistemi di transitività al massimo: $\Omega_0 \cap l$ e $\Omega_0 - l$. Ne segue, in particolare, che G^* agisce transitivo su $\Omega_0 - l$.

Ricordiamo poi una proprietà di queste involuzioni, valida solo nell'ipotesi imposta all'inizio del penultimo capoverso, proprietà pressoché caratteristica per il gruppo G^* (cfr. [3], Théorème 3, Lemma 4.1): se **P** , **R** , **S** sono involuzioni col centro sopra $l - \Omega$ e $\mathbf{RP} \neq \mathbf{S}$ allora il prodotto **SRP** è parimente un'involuzione col centro sopra $l - \Omega$. Da essa discende agevolmente che i prodotti di due involuzioni col centro sopra $l - \Omega$, chiamate qui anche col nome c o r r i s p o n d e n z e a s s i a l i, generano un gruppo abeliano, che denoteremo con H^*. È del tutto immediato che G^* ammette H^* come un sottogruppo abeliano di indice 1 oppure 2. Se si tengono presenti risultati elementari sugli insiemi di sostituzioni transitivi, e più precisamente quelli che, riferiti a un insieme I di

(1) Ora e in seguito, il prodotto operatorio va effettuato da destra a sinistra.

(2) Più in generale, può dimostrarsi l'ultimo asserto in ogni piano proiettivo (del che però non faremo uso): cfr. [1], [3], [4], [8], [11].

oggetti e ad un insieme F di sostituzioni transitivo su I, esprimono come il prodotto FF risulti altresì transitivo su I e, qualora questo sia un gruppo abeliano, costituisce un gruppo regolare sull'insieme I, risulterà che H^0 agisce regolarmente su $\Omega_0 - l$.

Si osservi che, mentre le corrispondenze assiali contenute in G^0 non lasciano fisso alcun punto situato su $\Omega_0 - l$, le involuzioni di centro sopra $l - \Omega$ sono dotate di punti fissi situati su $\Omega_0 - l$ qualora l non passi per O. Ciò fornisce che se, con le convenzioni introdotte, l non è tangente ad Ω_0, gli elementi di H^0 sono corrispondenze assiali; inoltre fissato un qualsiasi punto $P \in l - \Omega$, essi risultano della forma **RP** con un'opportuna involuzione **R** col centro sopra $l - \Omega$.

Se in particolare prendiamo una conica non singolare di $S_{2,q}$ quale $(q+1)$-arco Ω_0, il teorema sopracitato di J. Tits, come si vede subito, risulta definitivo al riguardo. Infatti, essendo conosciuta fino in fondo la struttura dei sottogruppi di PSL $(2, q)$ (cfr [7], II.8), ciò fornisce che per G^0 si presentano attualmente due casi ben distinti secondoché l è tangente o no rispetto ad Ω_0.

Nel primo caso, G^0 sarà abeliano elementare d'ordine 2^t, e quindi $G^0 = H^0$; nel secondo caso, invece, G^0 risulterà diedrale contenente H^0 quale sottogruppo ciclico di indice 2, e l'ordine di G^0 vale $2(2^t+1)$ oppure $2(2^t-1)$ a seconda che l sia una retta esterna o una secante che non passi per il punto O.

Relativamente a questi due casi, ci proponiamo ora di provare come tali specialità della struttura di G^0 valgano a caratterizzare rispettivamente le ovali di traslazione, ove l si assuma quale retta all'infinito, e le coniche non singolari di $S_{2,q}$.

3. Supposto dapprima l tangente ad Ω_0, il nostro intento è, a norma della fine del numero precedente, di dimostrare la seguente condizione necessaria e sufficiente affinché Ω sia un'ovale di traslazione.

Teorema 1. *Con riferimento al piano $S'_{2,q}$ $(q = 2^t)$ affine di Galois, avente l come retta all'infinito, Ω è un'ovale di traslazione se, e soltanto se, Ω abbia due punti impropri e, tolto uno O di essi, le involuzioni sul $(q+1)$-arco Ω_0, formato dai punti rimanenti sopra Ω, aventi il centro situato su $l - \Omega$, ossia le permutazioni*

$$(*) \qquad \mathbf{P} : C\,(\in \Omega_0) \begin{cases} PC \cap \Omega_0 - C\,, & se \quad C \notin PO \\ C\,, & se \quad C \in PO \end{cases}$$

involutorie, al variare P su $l - \Omega$, e la permutazione identica dell'insieme Ω_0 costituiscono un gruppo abeliano elementare d'ordine 2^t.

Dimostrazione. Osserviamo anzitutto che, assunto ad arbitrario un parallelogramma ABCD con A, B, C situati su Ω, la condizione affinché il quarto vertice D del parallelogramma cada altresì su Ω equivale a supporre che Ω sia un'ovale di traslazione. Osserviamo poi che la detta condizione per ABCD, coll'uso delle involuzioni, si traduce nel supporre che, posto $P = l \cap AB$, $Q = l \cap BC$, i punti $\mathbf{QP}(B) = \mathbf{Q}(A)$ e $\mathbf{PQ}(B) = \mathbf{P}(C)$ vengano a coincidere.

Confrontando queste due osservazioni ne discende la sufficienza del teorema; inversamente, data un'ovale Ω di traslazione in $S'_{2,q}$, per ogni punto $B \in \Omega$ affine si perviene alla $\mathbf{PQ}(B) = \mathbf{QP}(B)$, purché tanto PB quanto QB intersechino Ω in un ulteriore punto distinto da B.

Quest'ultima richiesta, essendo Ω un $(q+2)$-arco, rimane soddisfatta da ogni $P, Q \in l - \Omega$ non appena il punto B stia su $\Omega - l$, risultando $\mathbf{PQ} = \mathbf{QP}$ per tutte le involuzioni $\mathbf{P}, \mathbf{Q}$ col centro sopra $l - \Omega$.

Ne discende manifestamente che tali involuzioni generano un gruppo G^0 abeliano, il quale, come abbiamo già notato, agisce transitivamente sui punti affini di Ω. È ben noto che tali proprietà implicano che G^0 agisca anche regolarmente, dunque che l'ordine di G^0 uguagli $|\Omega - l|$. Poiché le involuzioni col centro sopra $l - \Omega$ sono in numero di $|l - \Omega|$ e $|l - \Omega| + 1 = |\Omega - l|$, ne segue che le involuzioni esauriscono gli elementi di G^0 distinti dall'unità. Di conseguenza, G^0 attualmente dev'essere abeliano elementare d'ordine $|l - \Omega| + 1$, dove quest'ultimo intero deve valere una potenza del 2. Ebbene $|l - \Omega| = 2$, $|l - \Omega| = 2^t - 1$, sicché per concludere G^0 è abeliano elementare d'ordine 2^t, onde la necessità della condizione data nel teorema.

Passiamo ora al secondo caso, in cui cioè l non sia tangente a Ω_0, e mostriamo come si stabilisca l'inversa della proposizione relativa al gruppo G^0 enunciata nel penultimo capoverso del n. 2, la quale, ricordiamo, afferma che se Ω_0 è una conica di $S_{2,q}$ allora G^0 risulta diedrale, d'ordine $2\,|l - \Omega|$.

Supponiamo dunque G^0 diedrale d'ordine $2\,|l - \Omega|$; e denotiamo di nuovo con H^0 il suo sottogruppo d'ordine $|l - \Omega|$, costituito dalle corrispondenze assiali, composizioni di due delle involuzioni col centro sopra $l - \Omega$.

Siccome H^0 – a norma di quant'è stato segnalato nel quint'ultimo capoverso del n. 2 – agisce regolarmente su $\Omega_0 - l$, ogni punto B di quest'ultimo insieme resta individuato una volta assegnati un punto $A \in \Omega_0 - l$ prefissato e l'elemento di H^0 che muta A in B. Nell'ipotesi attuale – cioè qualora H^0 sia ciclico – ciascun elemento di H^0 può assumersi uguale ad una potenza di un generatore h comunque prescelto, risultando che, al variare di i da O a $l^* - 1$, dove $l^* = |l - \Omega|$, le immagini $h^i(A) = A_i$ – sottinteso $A_0 = A$ – sono distinte e percorrono tutto l'insieme $\Omega_0 - l$.

Assunto $l^* \geq 5$, proviamo che, con riferimento al piano affine avente l come retta all'infinito, valgono le

(1) $$A_i A_{i+1} \parallel A_{i-1} A_{i+2},$$

(2) $$A_{i-1} A_{i+1} \parallel A_{i-2} A_{i+2},$$

ove gli indici s'intendono considerati (com'è lecito) modulo l^*.

Per verificare la (1), si consideri quell'involuzione $\mathbf{P}$ col centro sopra $l - \Omega$ che muta A_i in A_{i+1}. Essendo G^0 un gruppo diedrale ed H^0 un suo sottogruppo d'indice 2, si vede che

$$\mathbf{P}(A_{i-1}) = \mathbf{P}h^{i-1}(A_0) = \mathbf{P}h^{-1}(h^i(A_0)) = \mathbf{P}h^{-1}(A_i) = h\mathbf{P}(A_i) = h(A_{i+1}) = A_{i+2},$$

sicché $A_i A_{i+1} \parallel A_{i-1} A_{i+2}$.

In modo del tutto analogo si prova la (2).

È anche immediato verificare che le seguenti proposizioni ben note dalla Geometria restano inalterate se riferite ad un piano di Galois:

a) cinque punti a tre a tre non allineati individuano una conica non singolare,

b) due coniche aventi in comune quattro punti e la tangente in uno di essi (od anche tre punti e due tangenti) risultano coincidenti.

Posto di nuovo $l^* = |\Omega_q - I|$, indichi ora j un indice assumente i valori $0 \leq j \leq l^* - 1$, e riferiamoci al pentagono $A_{j-3}\,A_{j-2}\,A_{j-1}\,A_j\,A_{j+1}$ che supponiamo non degenere [3] e per il quale, in virtù delle (1), (2), valgono le

$$A_{j-1}\,A_j \parallel A_{j-2}\,A_{j+1}\,, \tag{3}$$

$$A_{j-2}\,A_j \parallel A_{j-3}\,A_{j+1}\,, \tag{4}$$

$$A_{j-2}\,A_{j-1} \parallel A_{j-3}\,A_j\,. \tag{5}$$

Consideriamo la conica Γ individuata dai vertici del pentagono $A_{j-3}\,A_{j-2}\,A_{j-1}\,A_j\,A_{j+1}$. L'esagono (degenere) $A_{j-3}\,A_j\,A_{j-1}\,A_{j-1}\,A_{j-2}\,A_{j+1}$ iscritto in Γ è pascaliano ed ammette in forza delle (3) e (5) due coppie di lati paralleli – ($A_{j-3}\,A_j$; $A_{j-1}\,A_{j-2}$) e ($A_j\,A_{j-1}$; $A_{j-2}\,A_{j+1}$) rispettivamente – che risultano essere opposti. Pertanto il lato $A_{j-1}\,A_{j-1} = t_{j-1}$ – cioè la tangente di Γ per il punto A_{j-1} – è altresì parallelo al lato opposto $A_{j-3}\,A_{j+1}$, onde si perviene alla

$$t_{j-1} = A_{j-1}\,A_{j-1} \parallel A_{j-3}\,A_{j+1}\,. \tag{6}$$

Allo stesso modo si ottiene che l'esagono pascaliano degenere $A_{j-3}\,A_{j+1}\,A_{j-2}\,A_{j-2}\,A_j\,A_{j-1}$ implica:

$$t_{j-2} = A_{j-2}\,A_{j-2} \parallel A_{j-3}\,A_{j-1}\,. \tag{7}$$

Ponendo nel penultimo capoverso al posto di $j+1$ ed al posto di $A_{j-3}\,A_{j-2}\,A_{j-1}\,A_j\,A_{j+1}$ $A_{j-2}\,A_{j-1}\,A_j\,A_{j+1}\,A_{j+2}$, si denoti con Γ' la conica circoscritta a quest'ultimo pentagono e rispettivamente con t'_j e t'_{j-1} le tangenti di Γ' per i punti A_j ed A_{j-1}; dalle (6), (7) si ricavano le

$$t'_j = A_j\,A_j \parallel A_{j-2}\,A_{j+2}\,, \tag{8}$$

$$t'_{j-1} \parallel A_{j-2}\,A_j\,. \tag{9}$$

Confrontando le (6), (4) e (8), risultano allora senz'altro le

$$t_{j-1} \parallel A_{j-3}\,A_{j+1} \parallel A_{j-2}\,A_j \parallel t'_{j-1}\,. \tag{10}$$

(3) Se $A_{j-3}\,A_{j-2}\,A_{j-1}\,A_j\,A_{j+1}$ fosse degenere, ossia se $l^* < 5$, q si ridurrebbe a 2 oppure a 4, onde Ω_q sarebbe una conica non singolare di $S_{2,2}$ o $S_{2,4}$ e lo scopo attuale si raggiungerebbe banalmente.

Ne consegue che le coniche Γ e Γ' hanno quattro punti A_{j-2}, A_{j-1}, A_j, A_{j+1} in comune ed ammettono in A_{j-1} la stessa tangente. Risulta quindi, in virtù della proposizione *b*), $\Gamma = \Gamma'$. Da ciò, al variare j da 0 a $l^* - 1$, si ottiene ache la sufficienza del seguente

Teorema 2. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè un'ovale* Ω *sia ottenibile in* $S_{2,q}$ $(q = 2^r)$ *coll'aggregare ai punti di una conica non singolare il nucleo di questa, è che* $S_{2,q}$ *ammetta (almeno) una retta* l *tale che le involuzioni sul* $(q+1)$-*arco* $\Omega_0 = \Omega - \{O\}$ *associate ai punti* $l - \Omega$, *ossia le permutazioni involutorie definite mediante la* (*) *al variare di* P *su* $l - \Omega$, *generino un gruppo diedrale d'ordine* $2\,l^* = 2\,|\,l - \Omega\,|$.

Il procedimento dimostrativo testé usato, conduce a una delle condizioni sufficienti affinché i sistemi di transitività di un sottogruppo ciclico di H^*, gruppo costituito dalle corrispondenze assiali, possano essere delle coniche. Dopo averla esplicitata in forma conveniente alla dimostrazione di un prossimo teorema, concluderemo questo paragrafo col dare alcune indicazioni atte a renderne completa la giustificazione.

Data un'ovale Ω, *supponiamo che* $S_{2,q}$ *sia dotato di una retta* l *e di un punto* O *non incidenti fra di loro tali che* l *sia pascaliana rispetto al* $(q+1)$-*arco* $\Omega_0 = \Omega - \{O\}$ *e denotiamo, come al solito, con* H^* *il gruppo costituito dalle corrispondenze assiali, composizioni di due delle involuzioni definite mediante la* (*). *Allora, per un qualsiasi punto* $A \in \Omega_0 - l$, *il sistema di transitività contenente* A *di un sottogruppo* H_1^0 *ciclico di* H^* *giace su una conica* Γ *di* $S_{2,q}$ *e detti, per un generatore* g *di* H_1^0, $g^i(A) = A_i$ $(i = 0, 1, \cdots, u-1$, *in cui* u *indica l'ordine di* H_1^0 *e* $A_0 = A)$, *la tangente di* Γ *per il punto* A_i *e la retta* $A_{i-1}A_{i+1}$ *(dove gli indici vanno considerati modulo* u), *s'intersecano su* l *comunque si prenda* i *fra i numeri* $0, 1, \cdots, u-1$.

Denotando con D il sistema di transitività assegnato, supponiamo dapprima che D risulti costituito dai vertici del triangolo $A_0A_1A_2$, il che equivale alla ipotesi che l'ordine di H_1^0 valga 3. Conduciamo allora, con riferimento al piano affine avente l quale retta all'infinito, per ogni vertice dello stesso triangolo una retta parallela al lato a questo opposto, e denotiamo tali rette con t_0, t_1, t_2 in maniera che A_0, A_1, A_2 giacciano rispettivamente su t_0, t_1, t_2. La conica individuata dai punti A_0, A_1, A_2 e dalle tangenti t_0 e t_1 ammette $A_0A_0A_2A_2A_1A_1$ come esagono pascaliano (degenere) attualmente dotato di due coppie di lati paralleli – $(t_0\,;A_2A_1)$ e (t_1, A_0A_2) – fra loro opposti, risultando che la tangente della conica nel punto A_2 e la secante A_0A_1 sono altresì paralleli. Ne consegue che quest'ultima tangente e la retta t_2 vengono a coincidere, onde l'asserto per $t = 3$.

Il caso consecutivo compatibile con l'ordine di H_1^0 è $t = 5$; suppongasi dunque in seguito $t \geq 5$. Poiché l è pascaliana rispetto ad Ω_0, ci si può servire della proposizione richiamata nel sesto capoverso del n. 2, dalla quale si deduce facilmente che, fissato un indice i $(0 \leq i \leq u-1)$, l'involuzione **P** col centro sopra $l - \Omega$ individuata dai punti A_i ed A_{i+1} è autoconiugata mediante g. Pertanto, in virtù delle relazioni che si ottengono da quelle date nel capoverso precedente le (1) e (2) col porvi g al posto h, si vede che le (1) e (2) restano inalterate se riferite al piano affine $S'_{2,q}$ avente l quale retta all'infinito. Se si passa poi per i successivi capoversi della dimostrazione del Teor. 2, sempre col porvi al posto di $\Omega_0 - l$ D, al posto di h g e riferendo a $S'_{2,q}$ il procedimento là usato, si ottiene che D è contenuto in una conica non singolare di $S_{2,q}$ la quale, in virtù della (7), soddisfa alla proprietà richiesta.

3. Nel numero precedente abbiamo dato, coll'uso delle involuzioni su di un'ovale a del gruppo da esse generato, una traduzione dell'ipotesi che la stessa ovale risulti di traslazione e, in particolare, sia ottenibile da una conica non singolare aggregandole il nucleo.

Confrontando tali risultati enunciati nei Teoremi 1 e 2 con quelli proposti nell'Introduzione al presente lavoro, appare che per provare questi ultimi basta tener conto del fatto espresso dal

Teorema 3. *Assegnata un'ovale Ω in un piano $S_{2,q}$ $(q = 2^r)$ di Galois, supponiamo che $S_{2,q}$ ammetta una retta l e un punto O giacente su Ω tali che l sia pascaliana rispetto al $(q+1)$-arco $\Omega_0 = \Omega - \{0\}$. Allora, se l passa per O, le involuzioni su Ω_0 col centro sopra $l - \Omega$ definite mediante la (*) e la permutazione identica sopra Ω_0 costituiscono un gruppo abeliano elementare d'ordine 2^r; quando poi fra le rette rimanenti uscenti da O vi siano ulteriori rette pascaliane, Ω_0 risulta costituita dai punti di una conica, il nucleo della quale viene a coincidere con O. Se invece l non passa per O, ammessa l'ipotesi $q+1 \neq p^r$ oppure $q-1 \neq p^r$ (p primo ed $r > 1$) secondochè l sia esterna o secante rispetto ad Ω_0, le involuzioni sullo stesso $(q+1)$-arco Ω_0 col centro sopra $l - \Omega$, definite mediante la (*), generano un gruppo diedrale di ordine $2\,|l - \Omega|$.*

Dimostrazione. Riprendendo lo studio svolto dal quinto capoverso nel n. 2, supposta dapprima l passante per O, ossia con le notazione là introdotte l tangente ad Ω_0, incominciamo col provare il primo asserto.

Ricordiamo all'uopo che G^* contiene un sottogruppo H^* proprio o no, operante regolarmente su $\Omega_0 - l$ e che gli elementi di G^* non appartenenti di H^* sono tutte involuzioni col centro sopra $l - \Omega$, nessuna delle quali è dotata, in base alla (*), di punti fissi su $\Omega_0 - l$.

Ciò fornisce agevolmente che anche G^* agisce regolarmente su quest'insieme, onde $G^* = H^*$. Poichè le involuzioni col centro sopra $l - \Omega$ contenute in G^* sono in numero di $|l - \Omega|$ e questo eguaglia $|\Omega_0 - l| - 1$, ne consegue che ogni elemento di G^* distinto dall'unità è una di tali involuzioni. Essendo H^* abeliano e $|l - \Omega| = 2^r - 1$, se ne trae il primo asserto.

In base al Teor. 1, dalla parte già dimostrata del teorema attuale si deduce che una tangente ad Ω_0 è pascaliana rispetto allo stesso insieme se, e soltanto se, il gruppo generato dalle elazioni col centro sulla medesima tangente ammette un sottogruppo M^* soddisfacente alle seguenti condizioni:

i) M^* muta Ω_0 in sé,
ii) M^* lascia fisso il punto di contatto della tangente con Ω_0,
iii) M^* è transitivo sui punti di $\Omega_0 - l$.

Ebbene, se $S_{2,q}$ ammette, oltre l, un'ulteriore retta pascaliana rispetto ad Ω_q debbono allora aversi (almeno) due di tali gruppi, onde, a norma di un teorema di J. Tits ([19], 2.4.1, cfr. anche [4], 1.4.51), Ω_q resta individuato dai punti di una conica non singolare di $S_{2,q}$.

Infine, sia l una retta non uscente da O e, sempre in armonia con le convenzioni usate nel n. 2, si denotino con G^* il gruppo generato dalle involuzioni su Ω_q col centro sopra $l - \Omega$ e con H^* il suo sottogruppo costituito dalle corrispondenze assiali, composizioni di due di queste involuzioni.

Mostriamo ora che, sotto l'ipotesi ammessa a quest'ultimo riguardo (ved. l'enunciato), il gruppo generato da due elementi h_1 e h_2 dello stesso ordine e contenuti in H^* risulta necessariamente ciclico.

Premettiamo a tal fine che, essendo H^* un sottogruppo d'ordine $|l - \Omega|$ di G^*, possiamo all'uopo supporre che H^* debba possedere degli elementi d'ordine dispari distinti da 1 e c; sia g uno di essi, l'ordine del quale verrà denotato con u.

Per un punto A situato nell'insieme $\Omega_q - l$, indicheremo con Γ_1 (risp. con Γ_2) il sistema di transitività contenente A del gruppo generato da g e h_1 (risp. da g e h_2). Siccome ambedue i gruppi posseggono due elementi d'ordine primo distinti fra loro e atti a generarli, tali gruppi devono essere ciclici, il che ci consente di usufruire della proposizione finale del n. 3°. Ne deriviamo prima di tutto che sia Γ_1 sia Γ_2 possono venir estese in coniche non singolari di $S_{2,q}$, che designamo rispettivamente con Γ_1^* e Γ_2^*; inoltre, posto $g^i(A) = A_i$ $(i = 0, 1, \cdots, u - 1;\ A_0 = A)$, risulta

$$\{A_0, A_1, \cdots, A_{u-1}\} \subset \Gamma_1^* \cap \Gamma_2^*,$$

e quelle coniche ammettono la stessa tangente in A_i comunque si prenda i fra i numeri $0, 1, \cdots, u - 1$.

Attualmente, visto che $u \geq 3$, tali condizioni implicano che Γ_1^* e Γ_2^* possano venir individuate servendosi degli stessi punti e delle stesse tangenti, onde esse costituiscono una medesima conica di $S_{2,q}$, che indicheremo con Γ^*.

Per stabilire alcune proprietà di h_1, legate al suo sistema di transitività Δ_1 contenente A, poniamo $h_1(A) = B_1$ ed $l \cap AB = R_1$ e rappresentiamo h_1 – com'è lecito in base alla quart'ultima proposizione del n. 1 – sotto la forma $\mathbf{U}_1 \mathbf{R}_1$, con $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{U}_1$ involuzioni su Ω_q di centro $R_1, U_1 \in l - \Omega$ rispettivamente. Ci sarà utile osservare che tanto $\mathbf{R}_1$ quanto $\mathbf{U}_1$ mutano Δ_1 in sé. Infatti, preso un qualsiasi punto $B \in \Delta_1$ e detta f la potenza di h_1 che muta A in B, dalla proposizione richiamata nel sest'ultimo capoverso ricaviamo:

$$\mathbf{R}_1(B) = \mathbf{R}_1(f(A)) = \mathbf{R}_1 f(A) = f^{-1}\mathbf{R}_1(A) = f^{-1}(\mathbf{R}_1(A)) = f^{-1}(A);$$

poiché Ω_q è trasformato in sé da $\mathbf{R}_1 \mathbf{U}_1$ e da $\mathbf{R}_1$, lo è anche da $\mathbf{U}_1$.

Se ora per comodità espositiva denotiamo con $\mathbf{P}^*$ l'involuzione su Γ^* di centro P, ossia la permutazione

$$\mathbf{P}^*: C\,(\in \Gamma^*) \begin{cases} (CP - \Gamma^*) - C, & \text{se } CP \text{ è secante di } \Gamma^* \\ C, & \text{se } CP \text{ è tangente di } \Gamma^* \end{cases}$$

dei punti di Γ^*, da quanto sopra si traggono le

i) $\Delta_2 \subset \Gamma^* - \Omega_s$,

ii) tanto $\mathbf{R}_2^*$ che $\mathbf{U}_1^*$ mutano Δ_1 in sé e lo stesso può dirsi di $\mathbf{R}_1^* \mathbf{U}_1^*$.

Ne consegue manifestamente che le involuzioni $\mathbf{R}_1$ ed $\mathbf{R}_1^*$ (risp. $\mathbf{U}_1$ e $\mathbf{U}_1^*$) effettuano una medesima permutazione sui punti appartenenti a Δ_1. Tale concordanza stabilisce appunto che il sistema di transitività contenente A di $\mathbf{U}_1^* \mathbf{R}_1^*$ è altresì Δ_1, sicché $\mathbf{U}_1^* \mathbf{R}_1^*$, essendo un elemento regolare su Γ^*, risulta d'ordine $|\Delta_1| = v$.

Se denotiamo con Δ_2 il sistema di transitività contenente A di h_2 e poniamo $h_2(\mathrm{A}) = \mathrm{B}_2$, $\mathrm{AB}_2 \cap l = \mathrm{R}_2$, rappresentando poi h_2 sotto la forma $\mathbf{U}_2 \mathbf{R}_2$ come dinanzi, le precedenti argomentazioni continuano a sussistere, onde del pari l'ordine di $\mathbf{U}_2^* \mathbf{R}_2^*$ deve valere v.

Avuto riguardo al Teor. 2, il gruppo generato dalle composizioni di due delle involuzioni su Γ^* col centro sopra $l - \Gamma^*$ è ciclico, sicché, a norma di un risultato ben noto dall'Algebra (ved. per esempio [20] I. 22.3), $\mathbf{U}_2^* \mathbf{R}_2^*$ risulta una potenza s di $\mathbf{U}_1^* \mathbf{R}_1^*$. Avuto riguardo a ciò che Δ_1 e Δ_2 ammettono dei punti comuni, ne segue che Δ_1 e Δ_2 vengono a coincidere. Di conseguenza, $(\mathbf{U}_1 \mathbf{R}_1)^s$ ed $\mathbf{U}_2 \mathbf{R}_2$ effettuano una stessa permutazione sui punti di $\Delta_1 = \Delta_2$. L'asserto risulterà perciò provato, non appena rilevi ancora che H^0, cioè il gruppo costituito dalle composizioni di due delle involuzioni sul $(q+1)$-arco Ω_s col centro sopra $l - \Omega$, è regolare sull'insieme $\Omega_s - l$.

Ormai è immediato quanto asserito dalla terza parte del teorema da stabilire. Infatti, il risultato poc'anzi conseguito fornisce subito (cfr. anche [8], 10.23) che ogni sottogruppo di Sylow di H^0 è ciclico; eppertanto H^0, essendo abeliano, dev'essere anche ciclico, il che val quanto dire che G^0 è diedrale.

Bibliografia

[1] Artzy R. (1968) – *Pascal's theorems of an oval*, « Amer. Math. Monthly », *75*, 143–146.

[2] Buekenhout F. (1966) – *Étude intrinsèque des ovals*, « Rend. Mat. », *25*, 333–363.

[3] Buekenhout F. (1966) – *Plans projetifs à ovoides pascaliens*, « Arch. Math. (Basel) », *17*, 89–93.

[4] Conti G. (1975) – *Piani proiettivi dotati di un ovale pascaliano*, « Boll. U.M.I. » (4), *11*, 330–338.

[5] Dembowski P. (1967) – *Finite Geometries*, Springer-Verlag.

[6] Hirschfeld J. W. P. (1975) – *Ovals in Desarguesian Plans of Even Order*, « Annali Mat. Pura Appl. », *102*.

[7] Huppert B. (1967) – *Endliche Gruppen*, Springer Verlag.

[8] Karzel H. e Sörensen K. (1970) – *Projektive Ebenen mit einem pascalischen Oval*, « Abh. Hamburg. », *35*, 123–125.

[9] Kochendörffer R. (1966) – *Lehrbuch der Gruppentheorie unter besonderer Berücksichtigungen der endlichen Gruppen*, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig.

[10] Payne S. E. (1971) – *A complete determination of translation ovoids in finite Desarguesian planes*, « Atti Accad. Naz. Lincei, Rendiconti » (8), *51*, 328–331.

[11] RIGBY J. F. (1969) – *Pascal Ovals in Projective Planes*, « Canad. J. Math. », *21*, 1462–1476.

[12] SEGRE B. (1955) – *Ovals in a finite projective planes*, « Canad. J. Math. », 7, 414–416.

[13] SEGRE B. (1957) – *Sui k-archi nei piani finiti di caratteristica due*, « Rev. Math. Pures Appl. », *2*, 289–300.

[14] SEGRE B. (1959) – *Le geometrie di Galois*, « Annali Mat. Pura Appl. », *48*, 1–96.

[15] SEGRE B. (1962) – *Ovali e curve σ nei piani di Galois di caratteristica due*, « Atti Accad. Naz. Lincei, Rendiconti » (8), *32*, 785–790.

[16] SEGRE B. (1967) – *Introduction to Galois geometries*, « Atti Accad. Naz. Lincei, Memorie » (8), *8*, 135–236.

[17] SEGRE B. e BARTOCCI U. (1971) – *Ovali ed altre curve nei piani di Galois di caratteristica due*, « Acta Arith. », *18*, 423–449.

[18] TITS J. (1952) – *Généralisations des groupes projectifs basées sur leurs propriétés di transitivité*, « Mém. Acad. Royal », *27*.

[19] TITS J. (1962) – *Ovoïdes à translations*, « Rendic. Mat. », *21*, 37–59.

[20] ZAPPA G. (1965) – *Fondamenti di teoria dei gruppi*, Vol. I, Edizione Cremonese (Roma).